Prácticas Matlab

Práctica 7: Convergencia Series de Términos Positivos

Objetivos

- Estudiar la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos utilizando distintos criterios combinando las conclusiones experimentales (el ordenador) con el rigor matemático (resultados teóricos).

Comandos de Matlab

Para calcular la suma entre dos valores de una expresión simbólica

symsum(f,a,b)

symsum(f,s,a,b)

Ejemplo:

```
>> syms n
>> symsum(1/n,1,inf)
```

Para calcular la suma de las componentes de un vector

sum(vector)

Ejemplo:

```
>> vector=1:100;
>> sum(vector)
>> sum(vector(20:30))
```

Ejercicios resueltos

1

Cálculo de sumas finitas y sumas infinitas de forma simbólica con symsum.

(a) Calcular la suma de los primeros K números naturales y comprobar que $1+2+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

(b) Calcular la suma de los cuadrados de los primeros k números naturales y comprobar que $1+2^2+\ldots+k^2=\dfrac{k(k+1)}{2}$

(c) Comprobar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.1}}\approx 10.5844$$

Solución:

Comandos Matlab

```
syms k
%Apartado a
symsum(k,1,k)
%Apartado b
symsum(k^2,1,k)
%Apartado c
symsum(1/(2^k),1,Inf)
symsum(1/k^2,1,Inf)
symsum(1/k,1,Inf)
double(symsum(1/(k^(1.1)),1,Inf))
```

Observación: El comando symsum no funciona con el factorial. Puedes verlo escribiendo:

```
syms k
symsum(factorial(k),1,Inf)
```

Para calcular series que contengan el factorial se deberá invocar al núcleo Maple que tendrá que estar instalado.

En el siguiente ejercicio se trabajará con las **series armónicas generalizadas**

Series armónicas generalizada: Son de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ para p>0.

Estas series son divergentes para $0 < p \le 1$ y convergentes para $p > 1$

2

Se consideran las series armónicas para los valores de

$$p = 0.5\,,\ 0.9,\ 1.0\,,\ 1.1\,,\ 2.0$$

y, fijado un valor de p, la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = 1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}$$

Se pide:

(a) Rellenar la siguiente tabla

p	S_{100}	S_{300}	S_{1000}	Valor de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
0.5				$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.5}} =$
0.9				$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}} =$
1				$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$
1.1				$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}} =$
2				$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}} =$

(b) Observar que a la vista de los valores obtenidos para las sumas parciales no se podría afirmar que las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ tienen distinto carácter.

Solución:

(a) Puedes utilizar el siguiente código que permite representar y calcular la suma parcial enésima de una sucesión

Código Matlab

```
%Términos a calcular
numTerminos=10^3;
n=1:1:numTerminos;
%Término general de la serie
p=2;
an=1./(n.^p);
%Cálculo de la sumas parciales
for k=1:numTerminos
    sn(k)=sum(an(1:k));
end
%Representación de an y Sn
hold on
format long
%Mostramos los valores de n para representar y para escribir
valores=1:10;
plot(valores),an(valores),'or')
plot(valores),sn(valores),'og')
hold off
%Mostramos los valores de n, an y sn
disp(['        n                   Sucesión an          Sucesión Sn'])
disp([valores' an(valores)' sn(valores)'])
```

3

Se consideran las siguientes series

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{n \cdot 3^{2n}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n+2}}{(n+1)^2 \cdot 2^{2n}}$

(a) Comprobar si cumplen la condición necesaria de convergencia.

(b) Aplicar el criterio del cociente a las series anteriores para determinar su carácter.

Criterio del cociente: Se considera la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \text{ ó } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

entonces

- Si $L<1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- Si $L>1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

Solución:

(a) Puedes utilizar el siguiente código para ver si el término general de una serie tiende a cero (condición necesaria de convergencia).

Código Matlab
```
syms n
an=(n+1)*(5^n)/(n*3^(2*n));
limit(an,n,Inf)
```

Nota: La serie del apartado (1) cumple la condición necesaria de convergencia pero la (2) no. Esto significa, al ser una serie de términos positivos, que la serie del apartado (2) es divergente mientras que para la serie del apartado (1) la condición necesaria no aporta información sobre su convergencia o divergencia.

(b)
Código Matlab
```
syms n
an=(n+1)*(5^n)/(n*3^(2*n));
an1=subs(an,n,n+1);
L=limit(an1/an,n,Inf)
%Un valor aproximado de la suma puede ser
sumaaprox=double(symsum(an,1,inf))
```

Nota: Observamos que el criterio del cociente da información sobre la convergencia de la serie del apartado (1) y que permite concluir también que la serie del apartado (2) es divergente.

4

Se consideran las siguientes series

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{n \cdot 3^{2n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n+2}}{(n+1)^2 \cdot 2^{2n}}$

Aplicar el criterio de la raíz a las series anteriores para determinar su carácter.

Criterio de la raíz: Se considera la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

entonces

- Si $L<1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- Si $L>1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

Solución

Código Matlab

```
syms n
an=(n+1)*(5^n)/(n*3^(2*n));
L=limit(an^(1/n),n,Inf)
%Un valor aproximado de la suma puede ser
sumaaprox=double(symsum(an,1,inf))
```

Nota: Observamos que el criterio de la raíz da información sobre la convergencia de la serie del apartado (1) y que permite concluir también que la serie del apartado (2) es divergente.

Ejercicios propuestos

1

En este ejercicio se pide analizar de nuevo las sucesiones de sumas parciales de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.1}}$$

(a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge muy lentamente ya que la sucesión $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ tiende a infinito como lo hace $\log(n)$.

Euler demostró que

$$\lim\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=\gamma$$

siendo γ una constante que recibe el nombre de *constante de Euler*.

Se pide calcular el valor de esta constante con cuatro cifras decimales exactas calculando $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n$ para un valor de n adecuado..

(b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.1}}$ converge lentamente a un número entre 10 y 11 ya que la sucesión $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1.1}}$ está acotada por las sucesiones

$$10-\frac{10}{(n-1)^{0.1}}<S_n<11-\frac{10}{n^{0.1}}$$

Comprueba que esta desigualdad es cierta para los valores de n siguientes: $10, 10^2, 10^3$

2

Dadas las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n}{n^4+2^{n+1}}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{5n+1}{7n+3}$

Se pide:

(a) determinar si se cumple o no la condición necesaria de convergencia.

(b) obtener los términos S_{10} y S_{300} siendo Sn la sucesión de sumas parciales.

(c) calcular su carácter a mano y luego comprobar los cálculos realizados utilizando Matlab.