Prácticas Matlab

Práctica 9: Derivación parcial. Gradiente.

Objetivos

- Determinar las derivadas parciales de una función de forma simbólica.
- Representar el campo gradiente y mostrar su interpretación geométrica.

Comandos de Matlab

quiver

Dibuja los vectores U, V con flechas en los puntos X, Y. Las matrices X, Y, U, V deben tener el mismo tamaño.

Ejemplo:

```
[X,Y]=meshgrid(-1:0.5:1);
U=Y+X;V=-X+Y;
quiver(X,Y,U,V)
```

gradient

Calcula el gradiente de forma numérica de una matriz

Ejemplo:

```
[x,y] = meshgrid(-2:.2:2, -2:.2:2);
z = x .* exp(-x.^2 - y.^2);
[px,py] = gradient(z,.2,.2);
```

clabel

Permite etiquetar las curvas de nivel con el valor de la función en los puntos de cada curva. La opción clabel('manual') permite poner etiquetas únicamente a las curvas que se deseen.

Ejemplo:

```
[X,Y]=meshgrid(-1:0.5:1);
Z=X+Y;
[c,h]=contour(X,Y,Z);
Clavel(c,h)
```

Ejercicios resueltos

1

Cálculo de la derivada parcial en forma simbólica

Dada la función $f(x,y) = sen(xy) + \cos(xy^2)$ calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$$

Recuerda que las derivadas parciales de segundo orden se definen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}(x,y) = f'_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

(b) Comprueba que se verifica el teorema de Schwarz

TEOREMA DE SCHWARZ.- Sea $z = f(x,y)$ es una función de dos variables. Si se verifica que existen $f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ y además f_{xy} es continua en una región abierta D entonces se cumple que en dicha región se da la igualdad de las derivadas cruzadas de segundo orden, $f_{xy} = f_{yx}$.

Solución

(a) Código Matlab

```
syms x y
f=sin(x*y)+cos(x*y^2);
fx=diff(f,x,1)
fy=diff(f,y,1)
fxy=diff(fx,y,1)
fyx=diff(fy,x,1)
```

Nota: Puedes realizar los cálculos a mano y comprobar el resultado con Matlab

2

Visualizando el gradiente de funciones de dos variables

Definición (*Gradiente*).- Si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables se define el gradiente de f en el punto $\overline{x_o} = (a,b)$ como el vector: $\nabla f(a,b) = f_x(a,b)\mathbf{i} + f_y(a,b)\mathbf{j}$

Dibujar en cada punto de la malla [-1,1]x[-1,1] el vector gradiente de la función $f(x,y)=x^2+y^2$

Solución

Comandos Matlab. Una posibilidad puede ser:

```
[X,Y]=meshgrid(-1:0.1:1)
U=2*X;
V=2*Y;
quiver(X,Y,U,V)
```

Otra posibilidad:

```
[X,Y]=meshgrid(-1:0.1:1);
Z=X.^2+Y.^2;
[U,V]=gradient(Z,0.1,0.1)
quiver(X,Y,U,V)
```

3

El gradiente y las curvas de nivel

Superponer a la figura del gráfico obtenido en el ejercicio 2 las distintas curvas de nivel de la función $f(x,y)=x^2+y^2$.

Solución

Código Matlab

```
grid off
hold on
[c,h]=contour(X,Y,Z);
%Ponemos un título al gráfico de la figura 1
title('Gradiente y curvas de nivel')
%Para identificar las curvas de nivel
clabel(c,h)
%Probar clabel(c,'manual')
```

Podemos dibujar también la gráfica de la función

```
%Representamos la gráfica de la función
figure(2)
surf(X,Y,Z)
title('Superficie')
```

Observa que:

- El vector gradiente en un punto es ortogonal a la curva de nivel que pasa por dicho punto. Puedes visualizar esta propiedad del gradiente con ayuda del applet que se encuentra en la página: http://personales.unican.es/alvareze/Descartes/Gradiente/00_gradiente.html

- En cada punto el vector gradiente apunta a la dirección de máximo crecimiento de la función.

- La longitud del vector gradiente aumenta a medida que aumenta la razón de crecimiento de la función.

Ejercicios propuestos

1

Estudio de la función en las proximidades de un punto crítico (es decir, un punto donde el gradiente se anula)

Considerar la función $z = f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$ sobre la región $D = \{(x,y) / -1 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 1\}$. Se pide:

(a) Representar el campo gradiente.

(b) Superponer las curvas de nivel.

(c) Representar la función.

¿Qué observas en relación a los puntos donde el gradiente se anula y los puntos donde la función toma los valores máximo y mínimo?

2

Dibujar el campo vectorial gradiente superpuesto a las curvas de nivel para cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ sobre $D = \{(x,y) / -2 \le x \le 2, \ -2 \le y \le 2\}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + y^4}{x^4 + y^4 + 1}$ sobre

$D = \{(x,y) / -1 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 1\}$

Explicar qué información dan estos gráficos respecto a la localización de los puntos máximos y mínimos de esta función en D.