Tema 3: Sucesiones y Series Numéricas. Series de Potencias.

Ejercicios propuestos

1

Obtener los cuatro primeros términos, así como los términos a_{n-1} y a_{n+1}, de cada una de las sucesiones siguientes, definidas por su término general:

a) $a_n = \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ c) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ d) $a_n = \frac{n}{2n-1}$

e) $a_n = \frac{3n^2+2}{n+4}$ f) $a_n = \frac{\cos n}{e^n}$ g) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ h) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Solución:

aptdo	a_1	a_2	a_3	a_4	a_{n-1}	a_{n+1}
a)	1	1/2	1/3	1/4	1/(n-1)	1/(n+1)
b)	-1	1/2	-1/3	1/4	$(-1)^{n-1}/(n-1)$	$(-1)^{n+1}/(n+1)$
c)	1	-1/3	$1/3^2$	$-1/3^3$	$(1/3)^{n-2}$	$(1/3)^n$
d)	1	2/3	3/5	4/7	(n-1)/(2n-3)	(n+1)/(2n+1)
e)	1	7/3	29/7	25/4	$(3n^2-6n+5)/(n+3)$	$(3n^2+6n+5)/(n+5)$
f)	$\frac{\cos 1}{e}$	$\frac{\cos 2}{e^2}$	$\frac{\cos 3}{e^3}$	$\frac{\cos 4}{e^4}$	$\frac{\cos(n-1)}{e^{n-1}}$	$\frac{\cos(n+1)}{e^{n+1}}$
g)	2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}$	$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$
h)	1	3	6	10	$\frac{(n-1)\cdot n}{2}$	$\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

2

a) La sucesión recurrente $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = r a_{n-1} \end{cases}$ se llama progresión geométrica de razón *r*. Hallar su término general en función de *n* y la suma de sus *n* primeros términos. Poner un ejemplo.

b) La sucesión recurrente $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases}$ se llama progresión aritmética de distancia *d*. Hallar su término general en función de *n* y la suma de sus *n* primeros términos. Poner un ejemplo.

Solución: a) $a_n = a \cdot r^{n-1}$; $S_n = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{a \cdot (r^n - 1)}{r-1}$;

b) $a_n = a + (n-1) \cdot d$; $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{2a + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$

3

Dadas las sucesiones definidas por los siguientes términos generales:

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ b) $a_n = \sqrt[n]{2}$ c) $a_n = \dfrac{5^n - 1}{5^n + 1}$

Se pide:

a) Demostrar que son monótonas y acotadas.

b) Calcular su límite.

c) 3) ¿Cuántos términos se deben considerar en cada caso para que los puntos (n, a_n), estén en la banda limitada por las rectas $y = L - 0.1$, $y = L + 0.1$.

Solución:

a) estrictamente creciente y acotada; límite = 1; del término a_{20} en adelante

b) estrictamente decreciente y acotada; límite = 1; del término a_8 en adelante

c) estrictamente creciente y acotada; límite = 1; del término a_2 en adelante

4

Determinar, en caso de existencia, el límite de las siguientes sucesiones

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-1}{n} \; si \; n \; impar \\ \dfrac{n+1}{n} \; si \; n \; par \end{cases} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Solución: a_n no tiene límite (los términos pares forman una subsucesión que tiende a 0 y los impares una subsucesión que tiende a 1).

La sucesión

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{2k-1}\right)(-1)^k & si \; n = 2k-1 \; (n \; impar) \\ 0 & si \; n = 2k \; (n \; par) \end{cases}$$

no tiene límite ya que la subsucesión de los términos pares es 0 y una subsucesión de los impares (para n=3+2m con m un número natural) tiende a uno.

5

Encontrar para cada una de las siguientes sucesiones otra que sea equivalente, indicando cuál:

$$5n+1 \approx \boxed{} \qquad n^3+\log n \approx \boxed{}$$

$$\log\frac{1}{n} \approx \boxed{} \qquad 3\log n+e^n \approx \boxed{}$$

$$\frac{n^3-7n^5+2}{2n^3-1} \approx \boxed{} \qquad \frac{\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n+1}} \approx \boxed{}$$

$$\frac{n^3-n^2+1}{n^2+1}\log n \approx \boxed{} \qquad \frac{e^{n+1}n^4}{n^4+1} \approx \boxed{}$$

$$\log(n^2+e^n) \approx \boxed{}$$

Solución:

$$5n+1 \approx 5n \qquad n^3+\log n \approx n^3$$

$$\log\frac{1}{n} \approx -\log n \qquad 3\log n+e^n \approx e^n$$

$$\frac{n^3-7n^5+2}{2n^3-1} \approx -\frac{7}{2}n^2 \qquad \frac{\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n+1}} \approx n$$

$$\frac{n^3-n^2+1}{n^2+1}\log n \approx n\cdot\log n \qquad \frac{e^{n+1}n^4}{n^4+1} \approx e^{n+1}$$

$$\log(n^2+e^n) \approx n$$

6

Calcular, aplicando el Teorema del Encaje, el valor de los siguientes límites:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}\right)$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{3+n^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right)$$

Solución: a) límite = ½; b) límite = 1

7

a) Expresar utilizando sumatorio

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7} \qquad 1.5+0.015+0.00015+\ldots$$

b) Comprobar: $\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{k}{n}\right]\frac{1}{n}=\frac{5n^2+6n+1}{6n^2}$ utilizando que la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Desarrollar $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}kj$

d) Determinar si es cierta o falsa la siguiente igualdad

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{e^{k+3}}{(k+3)(k+4)(k+5)}=\sum_{j=4}^{8}\frac{e^{j}}{j(j+1)(j+2)}$$

Solución:

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}=\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{k+1}$

$1.5+0.015+0.00015+\ldots=1.5\sum_{n=0}^{\infty}10^{-2n}$

c) $(1+2+\ldots+n)(1+2+\ldots+n)=$

$=1\cdot 1+1\cdot 2+\ldots+1\cdot n+2\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+2\cdot n+\ldots+n\cdot 1+n\cdot 2+\ldots+n\cdot n$

d) Sí, es cierta, basta hacer el cambio j=k+3

8

Razonar si es verdadero o falso. Dada la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, se verifica:

- Es condición suficiente para que la serie sea convergente que $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.
- Es condición suficiente para que la serie sea convergente que $\lim_{n\to\infty}S_n=0$, donde (S_n) es la sucesión de sumas parciales, es decir que $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ es la suma de los n primeros términos de la serie.
- Es condición necesaria y suficiente para que la serie sea convergente que $\lim_{n\to\infty}S_n$ sea convergente a un número finito.

Solución: a) Falso; b) Verdadero; c) Verdadero

9

Hallar el término general y el carácter de una serie cuya suma parcial enésima es:

a) $S_n = \dfrac{2n}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$ b) $S_n = -\dfrac{3^{n+1}-1}{2} \quad n \in \mathbb{N}$ c) $S_n = -\dfrac{1-3^{n+1}}{2\cdot 3^n} \quad n \in \mathbb{N}$

Solución: a) $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \quad n \in \mathbb{N}$. Observar que $S_n - S_{n-1} = a_n$

b) $a_n = -3^n \quad n \in \mathbb{N}$ c) $a_n = \dfrac{1}{3^n} \quad n \in \mathbb{N}$

10

Comprobar la condición necesaria de convergencia en las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b^n}{n},\ b \in \mathbb{R}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p,\ p \in \mathbb{R}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n}$

Solución: a), d), e) y f) verifican la condición necesaria de convergencia;

b) verifica la condición necesaria de convergencia $\Leftrightarrow |b| \le 1$;

c) verifica la condición necesaria de convergencia $\Leftrightarrow p < 0$;

g), h), i) no verifican la condición necesaria de convergencia

11

Obtener el carácter de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{3^n n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{e^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{(\log 2)^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n4^{n-1}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^{2n}(n+1)^3}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{2^{2n}(n+1)^3}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^{n+2}}{2^{2n}(n+1)^2}$

Solución: a) Convergente b) Convergente c) Divergente

d) Convergente e) Convergente f) Convergente

g) Divergente h) Divergente

12

Aplicar alguno de los criterios: del cociente o de la raíz para estudiar el carácter de las series siguientes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot 5^n}{n \cdot 3^{2n}}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\log\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\right]^n$

Solución: a) divergente; b) convergente; c) convergente

13

Estudiar la naturaleza de la serie aplicando alguno de los criterios de comparación:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{1}{n}\right)$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n-1}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^5+1}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)^{1/2}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)+2}{n^2-n-1}$ i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$

Solución: a) convergente (comparar con geométrica de razón ½);

b), c), d) y e) divergentes (comparar con la serie armónica); f) divergente (comparar con la armónica generalizada p=2/3); g) y h) convergentes (comparar con la armónica generalizada p=3/2 y 2, respectivamente); i) divergente

14

Estudiar el carácter de las siguientes series. Justificar adecuadamente las respuestas.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n+1}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n-1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+3}}{5^{2n}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{3n+2}{4n^2-3}\right)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\log 2n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^{n-1}}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{2n+9}{n+7}\right)$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} sen^2\left(\frac{2n+5}{3n^2+8}\right)$ k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \log(n)}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+\cos^3 n}}$

Solución:

a) Convergente. b) No converge. c) Convergente. d) Convergente. e) Convergente. f) El término general no tiende a cero. No es convergente por la condición necesaria de convergencia. No se puede aplicar Leibniz. g) Es convergente por comparación con la serie armónica generalizada para p=2. h) Convergente. i) Divergente. j) Convergente. k) Convergente. Absolutamente convergente. l) Convergente. No absolutamente convergente. m) Es absolutamente convergente, luego es convergente.

15

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,2^n}$. Se pide:

a) Probar que es convergente.

b) Calcular S_4 y determinar el error que se comete al aproximar la suma de la serie utilizando esta suma parcial. ¿Es S_4 mayor o menor que la suma exacta?.

c) Calcular el valor de n necesario para aproximar la suma de la serie por S_n con error menor que 0.001.

Solución: a) serie alternada convergente porque verifica el teorema de Leibniz

b) $S_4 = -\frac{77}{3\cdot 2^6} = -\frac{77}{192}$; $|Error| \le |a_5| = \frac{1}{5\cdot 2^5} = \frac{1}{160}$; S_4 es mayor que la suma exacta

16

Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{(n+1)^2}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\cdot(x-2)^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

Solución: a) R = 1; b) R = 0; c) R = ∞ ; d) R = 1/2

17

a) Desarrollar la función $f(x) = x\cdot e^x$ en serie de potencias de x , obteniendo el término general de la serie mediante la derivada enésima de $f(x)$, aplicando la fórmula de MacLaurin.

b) Obtener el campo de convergencia de la serie de potencias del apartado anterior.

c) Hallar el número de términos de la serie que debemos sumar para obtener el valor aproximado de $\frac{-1}{2\sqrt{e}}$ con dos cifras decimales exactas, es decir que el error cometido en la aproximación sea inferior a 0'005.

Solución: a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$; b) $\mathbb{R}$; c) n = 4 términos, $\frac{-1}{2\sqrt{e}}\cong-\frac{29}{96}$

a) Desarrollar $f(x)=\log(1+x)$ en serie de potencias de x, obteniendo el término general, hallar el radio de convergencia de la serie y estudiar el intervalo de convergencia de dicho desarrollo en serie.

b) Aplicación del apartado a): calcular, sin utilizar la regla de L' Hôpital, el valor de

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$$

c) Determinar la suma de la serie

$$\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}+......+(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2n}$$

d) Obtener el valor aproximado de $\log(1.3)$ tomando como suma los tres primeros términos del desarrollo obtenido en el apartado a). ¿Cuál es el error cometido?

e) ¿Cuántos términos deberíamos tomar en el cálculo de $\log(1.3)$ para que el error cometido fuese menor que 10^{-6}.

f) Calcular $\log(2.1)$ tomando como suma aproximada los tres primeros términos del desarrollo de $\log(1+x)$. Interpreta la solución.

Solución: a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}\quad\forall x\in(-1,1]$; b) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{3}$;

c) $\log\left(\frac{3}{2}\right)$; d) $\log(1,3) \cong 0,264$; e) n = 9 términos; f) $\log(2,1) = f(1,1) \cong 0,9387$ no es una buena aproximación porque la serie no converge a *f(x)* para x = 1,1

19 Desarrollar en serie de potencias de x las siguientes funciones, indicando el campo de validez del desarrollo en cada caso:

a) $f(x) = \log(1+x^2) - arctgx$ b) $f(x) = \dfrac{3}{(1-x).(1+2x)}$ c) $f(x) = \dfrac{2+x}{1+2x+x^2}$

Solución: a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n}}{n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in [-1,1]$;

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n\cdot 2^{n+1}\right]\cdot x^n \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+2)\cdot x^n \quad \forall x \in (-1,1)$