Ejercicios resueltos

1

Calcular el valor de a y b para que $\dfrac{3b-2ai}{4-3i}$ sea real y de módulo unidad

Solución:

Operando

$$z=\frac{(3b-2ai)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{12b-8ai+9bi+6a}{16+9}=\frac{12b+6a}{25}+i\frac{9b-8a}{25}$$

- Si se quiere que sea real

$$\frac{9b-8a}{25}=0\ \Rightarrow\ 9b-8a=0\ \Rightarrow\ b=\frac{8a}{9}$$

- Si además es de módulo uno

$$\frac{12b+6a}{25}=1\ \Rightarrow\ 12b+6a=25\ \Rightarrow\ \frac{96a}{9}+6a=25\ \Rightarrow\ a=\frac{2}{3}$$

Luego, los valores pedidos son

$$a=\frac{2}{3}\quad b=\frac{4}{3}$$

2

Dos números complejos no nulos son tales que $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$. Probar que ${}^{z_1}\!/_{z_2}$ es imaginario.

Solución:

Método 1.- Por hipótesis,

$$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\ \Leftrightarrow\ |z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=0$$

luego

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)+i\,\mathrm{Im}\left(z_1\overline{z_2}\right)}{|z_2|^2}=i\frac{\mathrm{Im}\left(z_1\overline{z_2}\right)}{|z_2|^2}$$

donde se ha aplicado que $\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=0$ y, por tanto, z_1/z_2 es imaginario.

Método 2.- Sea

$$z_1=a+bi \qquad z_2=c+di$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{ca+db+i(da-cb)}{a^2+b^2}=\frac{ca+db}{a^2+b^2}+i\frac{da-cb}{a^2+b^2} \quad (1)$$

Por otro lado, por hipótesis

$$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$$

luego,

$$|(a+c)+i(b+d)|=|(a-c)+i(b-d)| \iff (a+c)^2+(b+d)^2=(a-c)^2+(b-d)^2 \iff$$

$$\iff a^2+c^2+2ac+b^2+d^2+2bd=a^2+c^2-2ac+b^2+d^2-2bd \iff$$

$$\iff 4ac=-4bd \iff ac=-bd$$

Finalmente, sustituyendo en (1)

$$\frac{z_2}{z_1}=i\frac{da-cb}{a^2+b^2}$$

que demuestra que es un número imaginario puro.

3 Indicar si es correcto o falso el enunciado siguiente, razonando la respuesta:

Sean $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ de módulo 1, entonces $|z_1+z_2|=2 \iff z_1=z_2$

Solución:

$\Rightarrow$ Como $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ de módulo 1, llamando $\phi=\arg(z_1)$ y $\psi=\arg(z_2)$ en forma exponencial serán $z_1=e^{i\phi}$ y $z_2=e^{i\psi}$. Luego,

$$|z_1+z_2|=\sqrt{(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}}=\sqrt{(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)}=$$

$$=\sqrt{z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}}=\sqrt{2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}}$$

En consecuencia,

$$|z_1+z_2|=2 \iff 2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=4 \iff \frac{z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}}{2}=1 \iff \operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=1 \iff$$

$$\iff \operatorname{Re}\left(e^{i(\phi-\psi)}\right)=1 \iff \cos(\phi-\psi)=1 \iff \phi=\psi+2k\pi$$

y, por tanto, como $z_1=e^{i\phi}$ y $z_2=e^{i\psi}$ la última afirmación es lo mismo que decir, $z_1=z_2$.

$\Leftarrow$ La implicación en el sentido $\Leftarrow$ es trivial ya que

si $z_1 = z_2$ entonces $z_1 + z_2 = 2z_1$, y, por tanto $|z_1 + z_2| = 2|z_1| = 2$

Otra forma.- También puede realizarse la demostración simplemente operando en forma binómica. Teniendo en cuenta que z_1 y z_2 son de módulo unidad su representación es

$$z_1 = \cos\phi + isen\phi \qquad z_2 = \cos\psi + isen\psi$$

se cumplirá

$$2 = |z_1 + z_2| = \sqrt{(\cos\phi + \cos\psi)^2 + (sen\phi + sen\psi)^2}$$

operando,

$$2 = \sqrt{\cos^2\phi + \cos^2\psi + 2\cos\phi\cos\psi + sen^2\phi + sen^2\psi + 2sen\phi sen\psi} =$$

$$= \sqrt{2 + 2(\cos\phi\cos\psi + sen\phi sen\psi)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos(\phi - \psi)}$$

Luego,

$$2 = |z_1 + z_2| \Leftrightarrow 4 = |z_1 + z_2|^2 \Leftrightarrow 1 = \cos(\phi - \psi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi - \psi = 2k\pi \Leftrightarrow \varphi = \psi + 2k\pi \underset{\substack{por\ hipótesis \\ |z_1|=|z_2|=1}}{\Leftrightarrow} z_1 = z_2$$

y, por tanto $z_1 = z_2$.

4

Describir los conjuntos de puntos del plano determinados por las siguientes expresiones complejas

(a) $\lvert z-2i\rvert \le 1$	(b) $\lvert z-2\rvert > \lvert z-3\rvert$	(c) $\lvert z-1\rvert + \lvert z+3\rvert = 10$
(d) $z\bar{z} > 4$	(e) $\lvert z-3i\rvert > 4$	(f) $\lvert z\rvert < 1, \operatorname{Im} z > 0$

Solución:

Para identificar el lugar geométrico donde se encuentra el afijo de un número complejo z, es útil definirlo como z = x + i.y, es decir, identificar: Re (z) = x, Im (z) = y. Así, será más fácil representar en el plano complejo, que haremos coincidir con el plano cartesiano, cualquier región o curva que venga dada por una relación entre las variables x e y.

(a) $|z - 2i| \le 1$

Sea $z = a + bi$ entonces $z - 2i = a + (b-2)i$, se cumplirá

$$|z-2i|\le 1 \iff \sqrt{a^2+(b-2)^2}\le 1 \iff a^2+(b-2)^2\le 1$$

El conjunto buscado es el interior del círculo de centro (0,2) y radio 1.

(b) $|z-2|>|z-3|$

Sea $z=x+iy$ entonces $z-2=(x-2)+iy$ y $z-3=(x-3)+iy$, sus módulos

$$|z-2|=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \qquad |z-3|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

y por tanto,

$$|z-2|>|z-3| \iff (x-2)^2+y^2>(x-3)^2+y^2 \iff$$

$$\iff x^2+4-4x+y^2>x^2+9-6x+y^2 \iff 2x>5 \iff x>5/2$$

La solución es el conjunto

$$R=\{x+i\,y \,/\, x>5/2,\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

(c) $|z-1|+|z+3|=10$

Forma 1: Por definición de elipse se trata de una elipse de focos los puntos 1 y -3 y semieje mayor 5

Forma 2: Sea $z=x+iy$, entonces $z-1=(x-1)+iy$, $z+3=(x+3)+iy$, luego

$$|z-1|+|z+3|=10 \iff \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$$

Pasando una de las raíces al segundo miembro y elevando al cuadrado

$$(x-1)^2+y^2=\left[10-\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right]^2$$

$$x^2+1-2x+y^2=100+(x+3)^2+y^2-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

$$-8x-108=-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

$$2x+27=5\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado,

$$(2x+27)^2=25\left((x+3)^2+y^2\right)$$

$$4x^2+27^2+108x=25(x+3)^2+y^2=25(x^2+9+6x+y^2)$$

$$21x^2+42x+25y^2=504$$

Completando cuadrados

$$21(x^2+2x)+25y^2=504$$

$$21\left((x+1)^2-1\right)+25y^2=504$$

$$21(x+1)^2+25y^2=525$$

Se trata de la elipse

$$\frac{(x+1)^2}{525\big/21}+\frac{y^2}{525\big/25}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x+1)^2}{5^2}+\frac{y^2}{21}=1$$

(d) $z\overline{z}>4$

Sea $z=x+iy$, $\overline{z}=x-iy$ entonces

$$z\overline{z}>4 \;\Leftrightarrow\; (x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2>4 \;\Leftrightarrow\; |z|>2$$

Luego $z\overline{z}>4$ es la región del plano exterior de la circunferencia de centro (0,0) y radio 2.

(e) $|z-3i|>4$

Sea $z=x+iy$, $z-3i=x+i(y-3)$ entonces

$$|z-3i|>4 \;\Leftrightarrow\; x^2+(y-3)^2>16$$

Se trata del exterior de la circunferencia de centro (0,3) = 3i y radio 4.

(f) $|z|<1, \operatorname{Im} z>0$

Se trata del conjunto

$$\left\{x+iy \,/\, x^2+y^2<1 \;\;,\;\; y>0\right\}$$

es decir, del interior del semicírculo superior de radio 1.

5

Si z_1 y z_2 son complejos, ¿qué representa el número $\frac{z_1+z_2}{2}$. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos $\lambda z_1+\mu z_2$ si λ y μ son reales y verifican $\lambda+\mu=1$?

Solución:

- Gráficamente el afijo del número complejo

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}+i\,\frac{y_1+y_2}{2}$$

representa el punto medio del vector que une el origen con el afijo del número complejo z_1+z_2

- Los puntos de la forma $\lambda z_1 + \mu z_2$ son los puntos de la recta

$$\lambda z_1 + \mu z_2 = (1-\mu) z_1 + \mu z_2 = z_1 + \mu (z_2 - z_1)$$

es decir, la recta que pasa por z_1 y cuyo vector director es $z_2 - z_1$.

6 Un triangulo equilátero tiene su centro en el origen y un vértice en el punto (1,0). Determinar los otros dos vértices.

Solución:

Los ángulos que forman dos lados de un triángulo equilátero son de $\frac{\pi}{3}$ radianes, luego hay que avanzar $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Por lo tanto, como uno de los vértices es $z_1 = 1 = e^{2\pi i}$, se tiene que

$$z_2 = e^{2\pi i} e^{2\pi i/3} = e^{2\pi i/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i sen\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_3 = e^{2\pi i} e^{2\pi i/3} e^{2\pi i/3} = e^{4\pi i/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i sen\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} i$$

son los otros dos. En forma binómica

$$(1,0), \left(-1/2, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-1/2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Otra forma: Podía haberse resuelto el problema observando si los afijos de z_1, z_2, z_3 forman un triángulo equilátero entonces

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$

y el ángulo entre $\overrightarrow{0z_1}$ y $\overrightarrow{0z_2}$ es el mismo que entre $\overrightarrow{0z_2}$ y $\overrightarrow{0z_3}$ y el mismo que entre $\overrightarrow{0z_2}$ y $\overrightarrow{0z_1}$. Por esta razón los tres vértices son las tres raíces cúbicas de la unidad. En efecto,

$$\sqrt[3]{1} = e^{\frac{2k\pi}{3} i} \quad k = 0,1,2 \Rightarrow \quad z_1 = e^{0i}, \; z_2 = e^{2\pi/3 i}, \; z_3 = e^{4\pi/3 i}$$

7 Calcular

(a) $z = \sqrt[6]{1 - \sqrt{3} i}$

(b) las raíces cúbicas del número -27 en forma binómica

Solución:

(a) Calculando su módulo y argumento

$$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\phi = \arg(z) = arctg\,\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$$

se tiene que sus raíces sextas son:

$$z_k = \sqrt[6]{2}_{\frac{-\pi/3+2k\pi}{6}} \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

(b) $z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27e^{(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}} = 3e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i}$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = 3e^{-\frac{\pi}{6}i} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = 3e^{\frac{\pi}{2}i} = 3i$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = 3e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

8

(a) Demuestre que la suma de las raíces enésimas de la unidad es cero.
(b) Demuestre que el producto de las raíces enésimas de la unidad es 1 ó –1.

Solución:

(a) Las raíces enésimas de la unidad son de la forma:

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad k = 0,1,\ldots,n-1$$

Por tanto,

$$z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\kappa\pi}{n}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \ldots + e^{i2\frac{n-1}{n}\pi}$$

Esto es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $e^{\frac{2\pi}{n}i}$ y primer termino 1, es decir,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{n}i}} = 0$$

(b) Considerando ahora el producto,

$$z_o z_1 ... z_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} z_k = 1 * e^{i\frac{2\pi}{n}} * e^{i\frac{4\pi}{n}} * .... * e^{i2\frac{n-1}{n}\pi} = e^{\left(0+i\frac{2\pi}{n}+i\frac{4\pi}{n}+...+i2\frac{n-1}{n}\pi\right)} = e^{\frac{2\pi}{n} i \sum_{k=0}^{n-1} k}$$

como, $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ se tiene

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = e^{(n+1)\pi i} = \begin{cases} -1 \ si \ n \ par \\ 1 \ si \ n \ impar \end{cases}$$

9

Consideremos el número complejo: $z = x + iy = \frac{1}{2 + \cos t + isent}$

Probar que cuando "t" varía en los numeros reales, z se mueve sobre la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que uno los puntos (1/3,0),(1,0).

Solución:

Calculamos en primer lugar la expresión de x y de y en función de t. Multiplicando por el conjugado del denominador

$$\frac{1(2+\cos t - isent)}{(2+\cos t + isent)(2+\cos t - isent)} =$$

$$= \frac{2+\cos t}{(2\cos t)^2 + sen^2 t} - i\frac{sent}{4+\cos^2 t + 4\cos t + sen^{2t}} = \frac{2+\cos t}{5+4\cos t} - i\frac{sent}{5+4\cos t}$$

Luego

$$x = \frac{2+\cos t}{5+4\cos t} \qquad y = \frac{-sent}{5+4\cos t}$$

Para comprobar que (x,y) está en la circunferencia de centro (a,b) y radio r basta verificar que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. En nuestro caso $(a,b) = \left(\frac{2}{3},0\right)$ y $r = \frac{1}{3}$. Se puede comprobar que cualquier punto de la forma

$$\left(\frac{2+\cos t}{5+4\cos t}, \frac{-sent}{5+4\cos t}\right)$$

cumple la ecuación de la circunferencia. En efecto,

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2+\cos t}{5+4\cos t} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-sent}{5+4\cos t}\right)^2 =$$

$$= \frac{(6+3\cos t - 10 - 8\cos t)^2}{9(5+4\cos t)^2} + \frac{sen^2 t}{(5+4\cos t)^2} =$$

$$=\frac{\left(-4-5\cos t\right)^2+9sen^2t}{9\left(5+4\cos t\right)^2}=\frac{16+25\cos^2 t+40\cos t+9sen^2t}{9(5+4\cos t)^2}=$$

$$=\frac{25+16\cos^2 t+40\cos t}{9(5+4\cos t)^2}=\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

10

Demostrar que el polinomio de segundo grado, $P(x)$, cuyas raíces son $1+\sqrt{3}i$ y $1-\sqrt{3}i$ verifica una de las siguientes propiedades:

A) $P(x)<0$ para todo x real.

B) $P(x)>0$ para todo x real.

Solución:

Todos los polinomios que tienen por raíces $1+\sqrt{3}i$ y $1-\sqrt{3}i$ son los de la forma:

$$P(x)=a\left[x-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right]\left[x-\left(1-i\sqrt{3}\right)\right]=a\left[\left(x-1\right)-i\sqrt{3}\right]\left[\left(x-1\right)+i\sqrt{3}\right]=$$

$$=a\left[(x-1)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2\right]=a\ \underbrace{\left[(x-1)^2+3\right]}_{positivo\ \ para\ todo\ x\ real}$$

Dependiendo del valor de a se tendrá

- Si a>0 entonces $P(x)>0$ para todo x real.
- Si a<0 entonces $P(x)<0$ para todo x real

En consecuencia, cualquier polinomio que tenga esas dos raíces es distinto de cero para todo x real.

11

¿Cuántas raíces tienen los polinomios siguientes? ¿Puedes decir algo sobre el número de raíces reales? ¿Por qué?

Solución:

(a) $p(x)=\left(\sqrt{2}+2i\right)x^5+3x^2+2i$

5 raíces en $\mathbb{C}$. No se puede decir nada sobre las reales porque $p(x)$ no es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$.

(b) $p(x)=\sqrt{2}x^7+3x^6+2$

7 raíces en $\mathbb{C}$. Tiene al menos una real por ser el grado impar.

(c) $p(x)=\sqrt{3}x^5+3x^2+2$

5 raíces en $\mathbb{C}$. Tiene al menos una real por ser grado impar.

(d) $p(x)=\sqrt{3}x^7+(\sqrt{2}+2i)x^6+2$

7 raíces en $\mathbb{C}$. No se puede decir nada sobre las reales porque $p(x)$ no es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$.

12 Hallar los números complejos z tales que $z^2+2\bar{z}^2+z-\bar{z}+9=0$

Solución:

Sea $z=a+bi$ debemos encontrar a y b de forma que:

$$(a+bi)^2+2(a-bi)^2+(a+bi)-(a-bi)+9=0 \iff$$

$$\iff a^2-b^2+2abi+2a^2-2b^2-4abi+2bi+9=0 \iff$$

$$(3a^2-3b^2+9)+i(-2ab+2b)=0 \iff \begin{cases} 3a^2-3b^2+9=0 \\ -2ab+2b=0 \end{cases}$$

Se distinguen dos casos:

- *Caso 1:* $b=0$, entonces por la primera ecuación $a^2=-3$, esto es absurdo pues a y b son números reales.

- *Caso 2:* $b\neq 0$, entonces $a=+1$, y sustituyendo en la primera ecuación

$$-3b^2-12 \Rightarrow b=\pm 2$$

Luego los números complejos son:

$$z_1=1+2i \quad z_2=1-2i$$