E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación Curso 2010-2011

Grados E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación Asignatura: Cálculo I

**Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.**

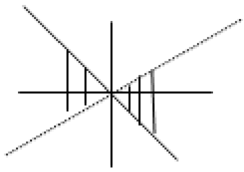
## Ejercicios resueltos

**1** Representar el dominio de la función $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\,e^{\frac{x+y}{x-y}}$

Solución: El dominio es el conjunto de los puntos

$$Domf=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,(x.-y)(x+y)\geq 0,\ \ x\neq y\}$$

es decir, los puntos del plano comprendidos entre las rectas x=y, x=-y salvo los de la recta x=y, gráficamente



**2** Dada las superficies

(1) $z=x^2+y^2$ (2) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}$

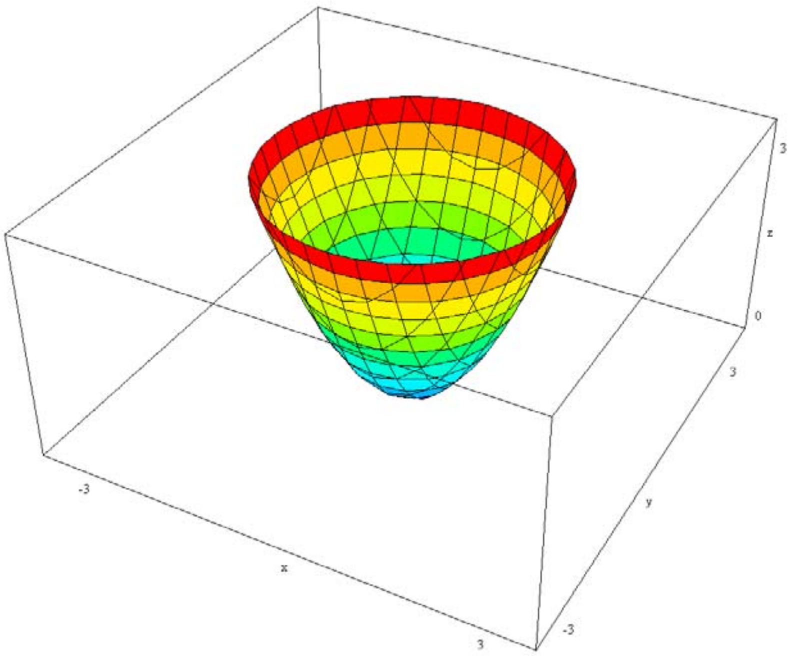
Se pide:

(a) Obtener las trazas

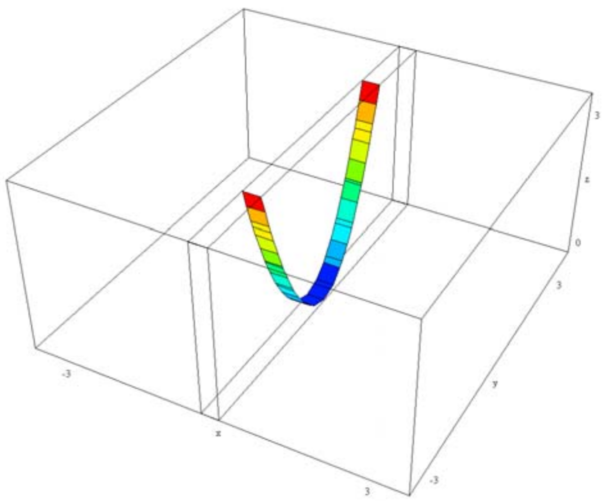
(b) Obtener las curvas de nivel

(c) Realizar un bosquejo de su gráfica

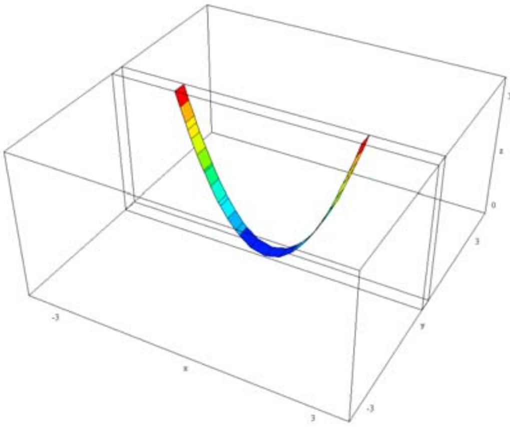
Solución: (a) Se trata de un paraboloide



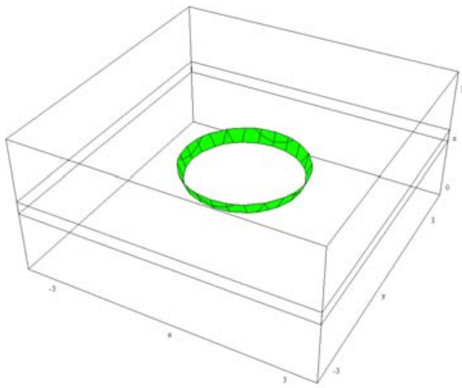

Al cortar por planos x=cte: Parábolas $z = cte + y^2$

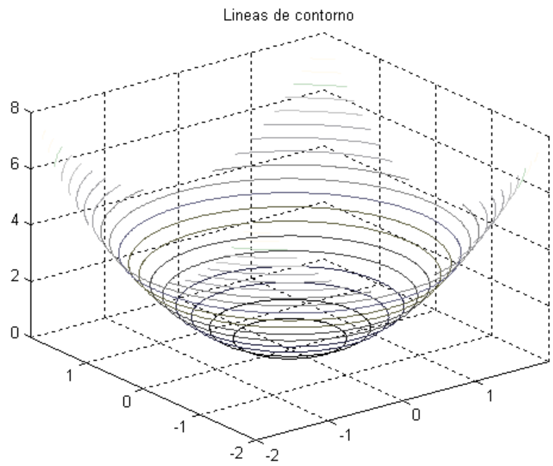


Al cortar por planos y=cte: Parábolas $z = x^2 + cte$

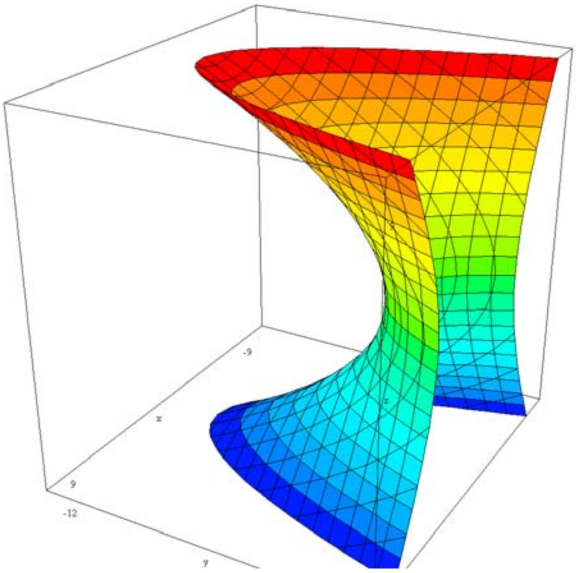


Al cortar por planos z=cte (curvas de nivel): Circunferencias $Cte = x^2 + y^2 \quad (Cte > 0)$

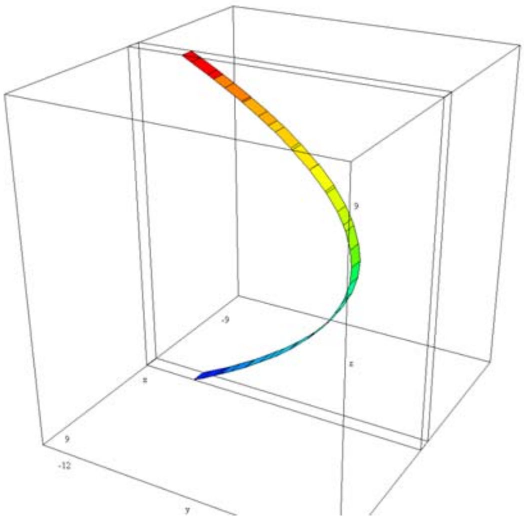




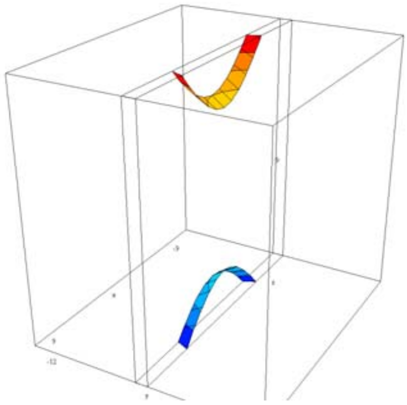
(2) Se trata de un hiperboloide



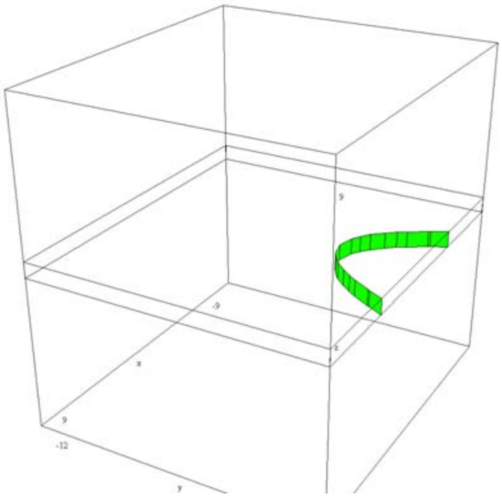
Curvas x=cte: Parábolas $y = Cte - \frac{z^2}{9}$



Curvas y=cte: Hipérbolas $Cte = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9}$



Curvas: z=cte: Parábolas $y = \frac{x^2}{4} - Cte$



**3** El precio de un piso P en función de la superficie S y de la calidad de los materiales C viene dado por una función $P(S,C)$. ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$? ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$?

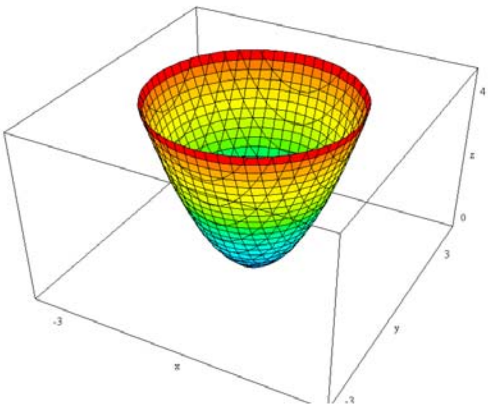
Solución:

Si $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$ significa que a mayor calidad de los materiales aumenta el precio de la vivienda. Parece razonable.

Si $\dfrac{\partial P}{\partial S} < 0$ significaría que al aumentar la superficie del piso el precio disminuiría. Esto no parece lógico.

**4** El conjunto de los puntos (x, y) con $0 \le x \le 5$, $0 \le y \le 5$ es un cuadrado colocado en el primer cuadrante del plano XY. Supongamos que se caliente ese cuadrado de tal manera que $T(x,y) = x^2 + y^2$ es la temperatura en el punto P(x, y). ¿En qué sentido se establecerá el flujo de calor en el punto $P_o(2,5)$?

Solución:



*Indicación*: El flujo de calor en la región está dado por una función vectorial $C(x,y)$ porque su valor en cada punto depende de las coordenadas de éste. Sabemos por física que $C(x,y)$ será perpendicular a las curvas isotermas $T(x,y) = c$ donde c es constante. El gradiente y todos sus múltiplos verifican esta condición. En esta situación nos dice la física que $C = -K\nabla T$ donde K es una constante positiva (llamada conductividad térmica). Nótese que la razón del signo negativo es que el calor fluye desde puntos de mayor temperatura a puntos de menor temperatura.

Solución:

Como $T(3,4) = 25$ el punto P está en la isoterma $T(x,y) = 25$, que es un cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$. Sabemos que el flujo de calor en $P_o(2,5)$ es $C_o = -K\nabla T_o$.

Como $\nabla T = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$ se tiene que $\nabla T_o = 6\vec{i} + 8\vec{j}$. Así el flujo de calor en Po es: $C_o = -K\left(6\vec{i} + 8\vec{j}\right)$. Como la conductividad térmica es positiva se puede afirmar que el calor fluye en Po en el sentido del vector unitario:

$$\vec{u} = \frac{-\left(6\vec{i} + 8\vec{j}\right)}{\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2}} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

**5** Hallar $a$ y $b$ para que la derivada direccional máxima de la función $e^{ax+by}\cos(x+y) - z = 0$ en el punto $(0,0)$ sea $3\sqrt{2}$ en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante

Solución:

La función $z = e^{ax+by}\cos(x+y)$ es continua por ser composición de funciones continuas y es diferenciable por ser las derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = ae^{ax+by}\cos(x+y) - e^{ax+by}sen(x+y)$$
$$z'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = be^{ax+by}\cos(x+y) - e^{ax+by}sen(x+y)$$

Esto significa que la derivada direccional en un punto siguiendo una dirección se puede obtener como el producto escalar de la dirección por el gradiente en el punto considerado.

$$D_u f(0,0) = \left\langle \nabla f(0,0), u \right\rangle = 3\sqrt{2}$$

Por otro lado el gradiente nos marca la dirección donde la derivada direccional es máxima que en este caso es además la bisectriz del primer cuadrante luego en este caso:

$$\left\|\nabla f(0,0)\right\| = 3\sqrt{2} \qquad u = \frac{1}{\left\|\nabla f(0,0)\right\|}\nabla f(0,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Calculando el gradiente en el origen:

$$\nabla f(0,0) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

se tiene que cumplir que:

$$\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{2} \qquad u=\left(\frac{a}{3\sqrt{2}},\frac{b}{3\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \Rightarrow a=b$$

Por lo tanto, resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones: $a=b=3$

**6** De una función $z=f(x,y)$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ se sabe que el plano tangente a $f(x,y)$ en el punto (1, 2) es: $2x+3y+4z=1$. ¿Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de f en la dirección que une el punto (1, 2) con el punto (3,4)? Justificar la respuesta.

Solución:

La dirección en la que nos piden calcular la derivada direccional es:

$$v=(3-1,4-2)=(2,2)\Rightarrow u=\frac{v}{\|v\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Como el plano tangente en el punto (1, 2) es

$$2x+3y+4z=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+z=\frac{1}{4} \qquad \text{(I)}$$

que corresponde a la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)=z-f(1,2) \qquad \text{(II)}$$

se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\frac{-1}{2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\frac{-3}{4}$$

sin más que igualar los coeficientes en las dos expresiones (I) y (II).

Luego la derivada direccional pedida es:

$$D_u(f,(1,2))=\left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2),\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right),u\right\rangle=\left\langle\left(\frac{-1}{2},-\frac{3}{4}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle=\frac{-5}{4\sqrt{2}}=\frac{-5\sqrt{2}}{8}$$

**7** Sea $u=x^4y+y^2z^3+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ donde

$$\begin{cases} x = 1 + rse^t \\ y = rs^2e^{-t} \\ z = r^2 s \; sent \end{cases}$$

Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2, s = 1, t = 0$ sabiendo que $\varphi'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -1$

Solución.-

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} =$$

$$= \left(4x^3 y + \varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\right) re^t + \left(x^4 + 2yz^3 + +\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}\right) 2rse^{-t} + 3y^2 z^2 r^2 sent$$

Para r=2, s=1, t=0 se tiene que x=3, y=2, z=0. Sustituyendo estos valores en la expresión anterior, así como $\varphi'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -1$, resulta que $\dfrac{\partial u}{\partial s} = 758$.

**8** Calcular la expresión de las derivadas parciales respecto a "x" y a "y" de la función:

$$\omega = f\left(g\left(x^2\right) + h(y), g(x)h(y)\right)$$

Considerando que g y h son funciones derivables y que f es una función diferenciable.

Solución:

Se trata de calcular las derivadas parciales de $\omega = f(u, v)$ siendo

$$u = g\left(x^2\right) + h(y) \qquad v = g(x)h(y)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\cdot g'\left(x^2\right)\cdot 2x + \frac{\partial \omega}{\partial v}\cdot g'(x)\cdot h(y)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial u}\cdot h'(y) + \frac{\partial \omega}{\partial v}\cdot g(x)\cdot h'(y)$$

**9** Determine los puntos críticos de la siguiente función y clasifíquelos:

$$f\left(x,y\right)=x^3+y^3-3x-12y+20$$

Solución:

Para determinar los puntos críticos se plantea la condición necesaria de extremo local. Los puntos que cumplan estas condiciones necesarias son los puntos críticos de la función.

*Condición necesaria*

$$\nabla f(x,y) = (0, 0).$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3x^2-3=0\rightarrow 3x^2=3\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1.$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3y^2-12=0\rightarrow 3y^2=12\rightarrow y^2=4\rightarrow y=\sqrt{4}=\pm 2.$$

Los puntos que anulan las derivadas son los que resultan de combinar los dos posibles de x que anulan la derivada parcial respecto a x con los dos valores de y que anulan la derivada parcial respecto a y:

(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)

Para clasificar estos puntos críticos como máximos locales, mínimos locales o puntos de silla se pasa a estudiar las condiciones suficientes de máximo o mínimo local, condiciones de segundo orden, pues sólo son suficientes para aquellos puntos que previamente hubiesen anulado el gradiente de la función (condición de primer orden).

*Condición suficiente*

Para estudiar estas condiciones se debe estudiar el signo de la forma cuadrática representada por la matriz hessiana de la función en cada uno de los puntos críticos. En general, para cualquier punto $(x,y) \in D_f$ (dominio de f(x,y)) se tiene que

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

- En el (1, 2) se tiene

$$Hf(1,2)=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix},\ H_1=\left|6\right|=6>0,\ H_2=\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix}=72>0.$$

  La función alcanza un mínimo local estricto en el punto (1, 2).

- En el (1, -2) se tiene

$$Hf(1,-2)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix},$$

$$H_1=|6|=6>0,\ H_2=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & -12\end{vmatrix}=-72<0.$$

El punto (1,-2) es un punto de silla.

- En el (-1, 2) se tiene

$$Hf(-1,\ 2)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix},$$

$$H_1=|-6|=-6>0,\ H_2=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & 12\end{vmatrix}=-72<0.$$

El punto (-1, 2) es un punto de silla.

- En el (-1, -2) se tiene

$$Hf(-1,-2)=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix},$$

$$H_1=|-6|=-6<0,\ H_2=\begin{vmatrix}-6 & 0\\ 0 & -12\end{vmatrix}=72>0.$$

La función alcanza un máximo local estricto en el punto (-1, -2).

**10** Hallar los valores extremos de $z=f(x,y)=xy$, sobre la circunferencia $x^2+y^2=1$.

Solución:

Hay que calcular los extremos de $z=f(x,y)=xy$, con la condición $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$.

Vemos que f y g son diferenciables en R². La función auxiliar de Lagrange

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

Calculamos las derivadas de primer orden de F y resolvemos el sistema

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=y+2\lambda x=0\\ F_y(x,y,\lambda)=x+2\lambda y=0\\ F_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

Despejando $\lambda$ en las dos primeras ecuaciones anteriores tenemos

(II) $\lambda = -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{x}{2y}$ se sigue que: $y^2 = x^2$ (III)

Por la tercera ecuación de (I), y por (III) debe ser

$$y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y por (III) $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Así obtenemos los puntos críticos de f sometidos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$:

$$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \;,\; P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\; P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \;,\; P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

Analizamos la diferencial segunda: $d^2 f$ (= signo $\Delta$f ) teniendo en cuenta que dx, dy están ligadas por $dg = 0$, es decir, $2xdx + 2ydy = 0$

Entonces, según lo visto antes es signo $d^2f$ = signo $d^2F$. Ahora, como

$$\begin{cases} F_{xx} = 2\lambda \\ F_{yy} = 2\lambda \\ F_{xy} = 1 \end{cases}$$

$$d^2 f = d^2F = F_{xx}dx^2 + 2F_{xy}dxdy + F_{yy}dy^2 = 2dx^2 + 2\lambda dxdy + 2dy^2$$

Por otra parte, tenemos que

$P_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\lambda_1 = -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{2}$, $P_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\lambda_2 = -\dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{2}$,

$P_3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\lambda_3 = -\dfrac{y}{2x} = \dfrac{1}{2}$, $P_4\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\lambda_4 = -\dfrac{y}{2x} = \dfrac{1}{2}$

luego, en $P_1$ y $P_2$ tendremos:

$d^2f = -dx^2 + 2\,dx\,dy - dy^2 = -(dx^2 - 2\,dx\,dy + dy^2) = -(dx - dy)^2$ .(IV)

(aquí ya vemos que $d^2f$ tiene signo negativo, por lo tanto $\Delta f$ tendrá signo negativo, lo cual implicará que f tiene máximo local en $P_1$ y $P_2$. No obstante, continuaremos adelante con el fin de ilustrar totalmente el procedimiento en estudio).

Ahora bien, dx y dy están ligadas por $dg(x,y) = 2x\,dx + 2y\,dy = 0$, lo que implica que, $dy = -\frac{x}{y}dx$ (V) ($y \neq 0$ en $P_1$, $P_2$).

De (IV) y de (V) resulta $d^2f = -(dx + x/y\,dx)^2$

Ahora, como en

$$P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ y } P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ es } \frac{x}{y}=+1$$

tenemos que

$$d^2f = -(dx + dx)^2 = -4\,dx$$

Por lo tanto, signo $\Delta f$ = signo $d^2f$ = - 1. Luego, f tiene en $P_1$, $P_2$ máximo relativo. Además, vale

$$z = f(x,y)\big|_{P_1,P_2} = \frac{1}{2}$$

Análogamente, como en $P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y en $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es $\frac{x}{y}=-1$, tendremos:

$$d^2f = dx^2 + 2\,dx\,dy + dy^2 = (dx + dy)^2 = \left(dx - \frac{x}{y}dx\right)^2 = (dx + dx)^2 = 4dx^2$$

Por lo tanto signo $\Delta f$ = signo $d^2f$ = + 1.

Esto significa que f tiene en $P_3$, $P_4$ valor mínimo local. Además es

$$z = f(x,y)\big|_{P_3,P_4} = \frac{-1}{2}$$