Tema 5: Integración de funciones de una variable.

Ejercicios resueltos

Integración indefinida

1 Resolver $\int \frac{x^2 . dx}{\sqrt{1-x^6}}$

Solución:

Hacemos el cambio $x^3 = t,\ x = t^{1/3},\ x^2 dx = \frac{1}{3} dt$ sustituyendo e integrando, obtenemos:

$$\int \frac{x^2 . dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{3} arcsen\ t + C = \frac{1}{3} arcsen\,(x^3) + C$$

2 Resolver la integral $I = \int \log\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$.

Solución:

Integrando por partes:

$$\begin{cases} \log\left(x+\frac{1}{x}\right) = u, & \frac{1}{x+\frac{1}{x}} . \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} dx = du \\ dx = dv & x = v \end{cases}$$

$$I = x \log\left(x+\frac{1}{x}\right) - \int \frac{x(x^2-1)}{x(x^2+1)} dx$$

por otro lado

$$-\int \frac{x(x^2-1)}{x(x^2+1)} .dx = -\int \frac{(x^2-1)}{(x^2+1)} .dx = \int \frac{(1-x^2)}{(x^2+1)} .dx = \int \left[-1 + \frac{2}{1+x^2}\right] .dx =$$

$$= -x + 2.arc\ tg\ x + C$$

es decir

$$I = x\log\left(x+\frac{1}{x}\right) - x + 2arc\ tg\ x + C$$

3

Determinar el valor de la integral I= $\int \frac{x.e^{arc\ senx}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$.

Solución:

Integramos por partes:

$$\begin{cases} e^{arc\ senx} = u & e^{arc\ senx}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}} = dv & -\sqrt{1-x^2} = v \end{cases},$$

$$\text{I}= -\sqrt{1-x^2}.e^{arc\ senx} + \int e^{arc\ senx}.dx$$

Integrando otra vez por partes

$$\begin{cases} e^{arc\ senx} = u & e^{arc\ senx}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du \\ dx = dv & x = v \end{cases}$$

$$I = -\sqrt{1-x^2}e^{arc\ senx} + xe^{arc\ senx} - \int \frac{xe^{arc\ senx}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}e^{arc\ senx} + x.e^{arc\ senx} - I$$

podemos escribir

$$2I = e^{arc\ senx}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right),$$

luego

$$I = \frac{1}{2}e^{arc\ senx}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

4

Resolver $\int x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

Solución:

Integramos por partes:

$$\begin{cases} \log\dfrac{1+x}{1-x}=u & \dfrac{1-x}{1+x}.\dfrac{1(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}d\,x=\dfrac{2}{1-x^2}dx=du \\ x.dx=dv & \dfrac{x^2}{2}=v \end{cases}$$

$$\int x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).dx=\frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\int\frac{x^2}{1-x^2}.dx=\frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\int\left[1+\frac{-1}{(1-x)(1+x)}\right]dx$$

Para resolver $\int\frac{-dx}{(1-x)(1+x)}$, descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(1-x)(1+x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}=\frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

igualando numeradores

$$-1=A(1+x)+B(1-x)$$

para x=1 $\rightarrow$ -1=2A $\rightarrow$A=-1/2

para x=-1 $\rightarrow$-1=2B $\rightarrow$ B=-1/2

Luego

$$\int\frac{-dx}{(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}=-\frac{1}{2}\log|1-x|-\frac{1}{2}\log|1+x|=\frac{-1}{2}\log|1-x^2|$$

quedando en definitiva:

$$\int x\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=\frac{x^2}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{1}{2}\log|1-x^2|+C$$

5

Resolver la integral I= $\int\frac{1+sen^2\,x}{sen\,x.\cos x}.dx$.

Solución:

MÉTODO 1:

Podemos escribir

$$1+sen^2\ x=\left(\cos^2\ x+sen^2\ x\right)+sen^2\ x=\cos^2\ x+2sen^2\ x \rightarrow$$

$$\frac{1+sen^2\ x}{sen\ x.\cos x}=\frac{\cos^2 x+2sen^2 x}{senx.\cos x}=\frac{\cos^2 x}{senx.\cos x}+\frac{2sen^2 x}{senx.\cos x}=\frac{\cos x}{senx}+2\frac{senx}{\cos x}$$

luego

$$\int\frac{1+sen^2\ x}{sen\ x.\cos x}dx=\int\left[\frac{\cos x}{senx}+2\frac{senx}{\cos x}\right]dx=\log|senx|-2\log|\cos x|+C.$$

MÉTODO 2:

Hacemos $sen\ x=t \rightarrow \cos x dx=dt \rightarrow$ $\cos x=\sqrt{1-sen^2 x}=\sqrt{1-t^2}$ $\rightarrow$ $dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, por tanto

$$\int\frac{1+sen^2\ x}{sen\ x.\cos x}.dx=\int\frac{1+t^2}{t.\sqrt{1-t^2}}.\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{1+t^2}{t.(1-t^2)}.dt$$

podemos escribir

$$\frac{1+t^2}{t.(1-t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}+\frac{C}{1+t}=\frac{A(1-t)(1+t)+Bt(1+t)+Ct(1-t)}{t(1-t)(1+t)} \rightarrow$$

$$1+t^2=A(1-t)(1+t)+Bt(1+t)+Ct(1-t)$$

dando valores a t:

para t=0 $\rightarrow$ 1=A

para t=1 $\rightarrow$ 2=2B $\rightarrow$ B=1

para t=-1 $\rightarrow$ 2=-2C $\rightarrow$ C=-1

luego

$$\int\frac{1+t^2}{t(1-t^2)}dt=\int\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}+\frac{-1}{1+t}\right]dt=\log|t|-\log|1-t|-\log|1+t|+C$$

$$=\log|senx|-\log|1-senx|-\log|1+senx|+C=\log|senx|-\log\left|1-sen^2x\right|+C$$

MÉTODO 3:

Hacemos $tg(x)=t$ (hacer $tg\left(\dfrac{x}{2}\right)=t$, que es el caso general, complicaría la resolución del ejercicio)

$$x = arctg\, t \;\to\; dx = \frac{1}{1+t^2}dt\,,\; senx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,,\quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

por otro lado

$$senx\cos x = \frac{t}{1+t^2}\;;\; 1+sen^2x = 1+\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1+2t^2}{1+t^2}$$

luego I= $\displaystyle\int \frac{1+sen^2x}{sen\,x\cos x}dx = \int \frac{\frac{1+2t^2}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}\,\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1+2t^2}{t\left(1+t^2\right)}dt$

Podemos escribir $\displaystyle\frac{1+2t^2}{t.\left(1+t^2\right)} = \frac{A}{t}+\frac{B.t+C}{1+t^2} = \frac{A.\left(1+t^2\right)+\left(B.t+C\right).t}{t.\left(1+t^2\right)}$, es decir

$$1+2t^2 = A\left(1+t^2\right)+\left(Bt+C\right)t$$

identificando términos en t:

en t^2 $\to$ 2=A+B,
en t $\to$ 0=C,
ind. $\to$ 1=A, obteniéndose A=1, B=1 y C=0

luego

$$A = \int \frac{1+2t^2}{t.\left(1+t^2\right)}dt = \int\left[\frac{1}{t}+\frac{t}{1+t^2}\right]dt = \int\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2.t}{1+t^2}\right]dt = \log|t|+\frac{1}{2}\log\left|1+t^2\right|+K$$

$$= \log|tg\;x|+\frac{1}{2}\log\left|1+tg^2\;x\right|+K = \log\left|\frac{sen\;x}{\cos\;x}\right|+\frac{1}{2}\log\left|\frac{1}{\cos^2\;x}\right|+K =$$

$$= \log|senx|-\log|\cos x|+\frac{1}{2}\log 1-\frac{1}{2}\log\left|\cos^2\;x\right|+K = \log|senx|-2-\log|\cos x|+k$$

6 Calcular el valor de $\displaystyle\int \frac{dx}{sen\;x(2+\cos\;x-2.sen\;x)}$.

Solución: El cambio adecuado es

$$tg\,\frac{x}{2}=t\ ,\ \ x=2.arc\,tg\,t\ \ \to dx=2\,\frac{dt}{1+t^2}\,,$$

$$sen\,\frac{x}{2}=\frac{tg\,\frac{x}{2}}{\sqrt{1+tg^2\,\frac{x}{2}}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\,\frac{x}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\to sen\,x=2.sen\,\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\to \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-sen^2\,\frac{x}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

$$sen\,x.(2+\cos x-2.sen\,x)=\frac{2t}{1+t^2}.\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-2.\frac{2t}{1+t^2}\right)=\frac{2t}{1+t^2}.\frac{t^2-4t+3}{1+t^2}\ ;$$

$$\int\frac{dx}{sen\,x(2+\cos x-2.sen\,x)}=\int\frac{\frac{2.dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}.\frac{t^2-4t+3}{1+t^2}}=\int\frac{(1+t^2).dt}{t.\left(t^2-4t+3\right)}$$

Descomponemos en fracciones simples la función subintegral:

$$\frac{(1+t^2)}{t.\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{(1+t^2)}{t.(t-3).(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{C}{t-1}$$

$$\to 1+t^2=A(t-3)(t-1)+B\,t\,(t-1)+C\,t\,(t-3)$$

$$para\ t=0\Rightarrow 1=A.(-3).(-1)\Rightarrow A=\frac{1}{3},$$

$$para\ t=3\Rightarrow 10=B.3.2\Rightarrow B=\frac{10}{6}=\frac{5}{3},$$

$$para\ t=1\Rightarrow 2=C.1.(-2)\Rightarrow C=-1.$$

Por tanto

$$\int\frac{(1+t^2).dt}{t.\left(t^2-4t+3\right)}=\int\left[\frac{1/3}{t}+\frac{5/3}{t-3}+\frac{-1}{t-1}\right].dt=$$

$$=\ \frac{1}{3}\log|t|+\frac{5}{3}\log|t-3|-\log|t-1|+C=\frac{1}{3}\log\left|tg\,\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\log\left|tg\,\frac{x}{2}-3\right|-\log\left|tg\,\frac{x}{2}-1\right|+C.$$

7

Calcular I = $\int \dfrac{sen\, x + 3.sen\, 2x.\cos x}{1+\cos^2 x}.dx$

Solución:

$sen(2x) = 2senx\cos x$, luego I = $\int \dfrac{sen\, x + 6.sen\, x.\cos^2 x}{1+\cos^2 x}.dx =$

$$= \int \frac{sen\, x.(1+6.\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}.dx$$

Hacemos $\cos x = t \;\to\; -senxdx = dt$

Por tanto

$$\text{I}= \int \frac{-dt.(1+6.t^2)}{1+t^2} = \int \left(-6+\frac{5}{1+t^2}\right)dt = -6t + 5arctgt + C = -6\cos x + 5arctg(\cos x) + C$$

8

Resolver I= $\int \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}.(\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1})}.dx$

Solución:

$$\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2},\quad \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3} \text{ y } \sqrt[3]{(x+1)^2} = (x+1)^{2/3}$$

los exponentes de $(x+1)$ son $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$; el máximo común denominador de los denomiradores será m.c.m.(2, 3)=6; el cambio será $x+1=t^6$, $dx = 6t^5 dt$

$$\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2} = (t^6)^{1/2} = t^3\,, \qquad \sqrt[3]{x+1} = (x+1)^{1/3} = (t^6)^{1/3} = t^2\,,$$
$$\sqrt[3]{(x+1)^2} = (x+1)^{2/3} = (t^6)^{2/3} = t^4$$

Sustituyendo en la integral

$$\text{I}= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}.(\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1})}.dx = \int \frac{(t^3-t^2)6t^5\,dt}{t^4(t^3+t^2)} = 6\int \frac{(t^2-t)\,dt}{t+1} =$$

$$= 6.\int \left[t-2+\frac{2}{t+1}\right].dt$$

Podemos escribir

$$I=\int \frac{(t^3-t^2).6.t^5.dt}{t^4.(t^3+t^2)}=6.\int \frac{(t^2-t).dt}{t+1}=6.\int \left[t-2+\frac{2}{t+1}\right].dt=$$

$$=3t^2-12t+12\log|t+1|+C=3(x+1)^{1/3}-12(x+1)^{1/6}+12\log\left|(x+1)^{1/6}+1\right|+C\,.$$

9

Calcular $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.dx$

Solución:

Si en la expresión $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{1+x}$ se obtiene $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$

Podemos escribir

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.dx=\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}.dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.dx+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx\,,$$

integrando

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.dx=arc\ sen\ x-\sqrt{1-x^2}+C\,.$$

10

Resolver el valor de la integral $J=\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}.dx$

Solución:

Recordando la relación $Ch^2t-Sh^2t=1$ hacemos $x=Sht \rightarrow dx=Cht\,dt$, la integral expresada en la nueva variable es

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}.dx=\int \frac{\sqrt{Sh^2\,t+1}}{Sh^2\,t}.Ch\,t.dt=\int \frac{Ch^2\,t}{Sh^2\,t}.dt=\int \frac{Sh^2\,t+1}{Sh^2\,t}.dt=\int \left[1+\frac{1}{Sh^2\,t}\right].dt=$$

$$=t-Cotg\ ht+c=Arg\ \ Shx-Cotg\ \ h(Arg\ \ Shx)+C\,.$$

Integración definida

11 Acotar la integral $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}.dx$ utilizando el Teorema del Valor Medio para una integral definida.

Solución:

La función $\sqrt{1+x^2}$ es *estrictamente creciente* en el intervalo [0, 1] y por tanto el *mínimo absoluto m* lo alcanza en x=0, es decir,

$$m=\sqrt{1+0^2}=1$$

análogamente el *máximo absoluto M* lo alcanza en x=1, por tanto

$$M=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$$

se puede escribir

$$1\cdot(1-0)\le\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx\le\sqrt{2}(1-0)$$

simplificando

$$1\le\int_0^1\sqrt{1+x^2}.dx\le\sqrt{2}$$

12 Acotar, mediante el teorema de la media para integrales definidas, $\int_0^2 e^{x^2-x}.dx$.

Solución:

Determinaremos los extremos absolutos de la función $f(x)=e^{x^2-x}$; la función es derivable $\forall x\in\mathbb{R}$.

Los posibles extremos relativos serán los valores que anulen $f'(x)$, $f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$; haciendo $f'(x)=0$ se obtiene x=1/2 → f(1/2)= $e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{4}}$.

Comparamos con los valores en los extremos del intervalo $f(0)=e^0=1$ y $f(2)=e^2$.

En este caso $m=e^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ y $M=e^2$.

Recordando el teorema de la media para integrales definidas, podemos escribir

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a) \rightarrow \frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leq\int_0^2 e^{x^2-x}.dx\leq 2e^2.$$

13 Determinar el área limitada por las curvas $f(x)=xe^{-x}$, $g(x)=x^2e^{-x}$.

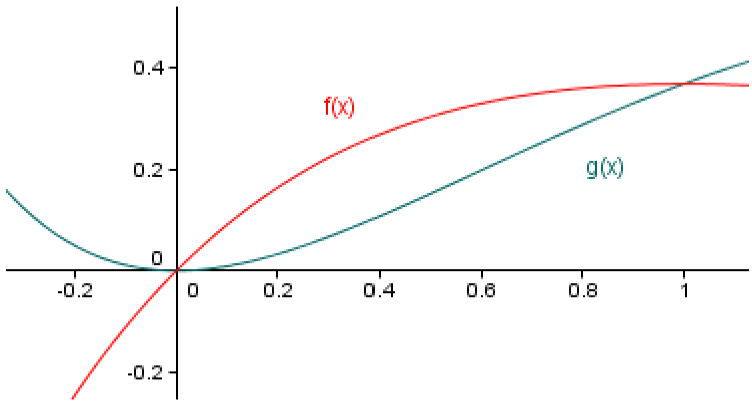
Solución:

Puntos de corte $xe^{-x}=x^2e^{-x} \rightarrow xe^{-x}(1-x)=0 \rightarrow x=0$; $x=1$ (Puntos $(0,0)$, $(1,e^{-1})$);

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0 \quad , \lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=\infty \quad , \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=\infty$$

Extremos relativos: $f(x)=xe^{-x}$; condición necesaria $f'(x)=(1-x)e^{-x}=0$, tangente horizontal en (1, 1/e); $g(x)=x^2e^{-x}$; $g'(x)=xe^{-x}(2-x)$, luego tangente horizontal en (0, 0) y en (2, 4/e). Con estos datos ya podemos esbozar el dibujo de la curva.



14 Determinar el área de la región limitada por las curvas $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ e $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, esbozando previamente un dibujo de la misma.

Solución:

$$f(x) = g(x) \rightarrow -x^2+3x-1=x^3-2x^2+x-1 = 0=x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=0$$

de aquí salen las raíces x=-1, x=0 y x=2 abscisas de los puntos de intersección de $f(x)$ y de $g(x)$, obtenemos las ordenadas correspondientes:

para x=-1 $\rightarrow$ $f(-1) = g(-1) = -5$

para x=0 $\rightarrow$ $f(0) = g(0) = -1$

para x=2 $\rightarrow$ $f(2) = g(2) = 1$

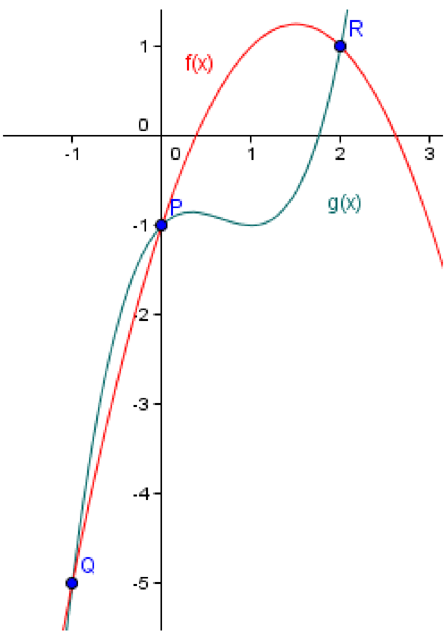
Para determinar la posición de las curvas , damos valores intermedios:

para x=-1/2 $\rightarrow$ $f(-1/2) = -11/4$, $g(-1/2) = -17/8$ $\rightarrow$

f está por debajo de g en el intervalo (- 1, 0)

para x=1 $\rightarrow$ $f(1) = 1$, $g(1) = -1 \rightarrow$

f está por encima de g en el intervalo (0, 2).



Ver figura. El área vendrá expresada por

$$A=\int_{-1}^{0}\left(g(x)-f(x)\right)dx+\int_{0}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x).dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x).dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}=\frac{37}{12}\text{ unidades de área.}$$

15 Se consideran las funciones $f(x)=2-x^2$ y $g(x)=x$. Se pide:

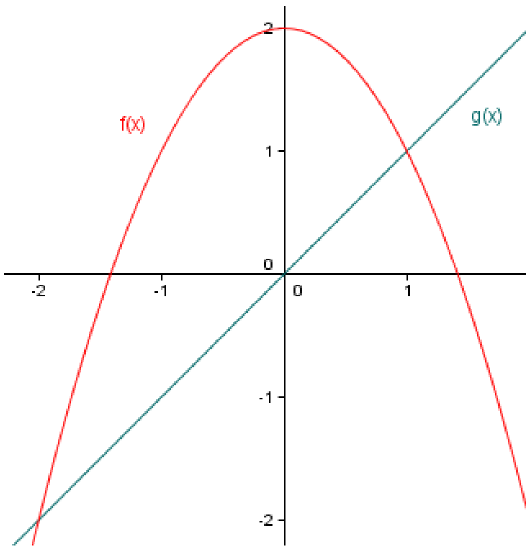
Hallar el área de la región plana de dimensiones finitas, limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ esbozando el dibujo de $f(x)$ y $g(x)$.

Solución:

Determinamos la intersección de las dos curvas:

$$\begin{cases} f(x)=2-x^2 \\ g(x)=x \end{cases} \rightarrow\ 2-x^2=x\rightarrow x^2+x-2=0\rightarrow x=-2,\ x=1$$

Los puntos de corte son $(-2,-2)$) y $(1,1)$.



el área será:

$$A=\int_{-2}^{1}\left[f(x)-g(x)\right].dx=\int_{-2}^{1}\left[2-x^2-x\right].dx=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-$$

$$-\left[2.(-2)-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}\right]=\frac{23}{2}\text{ u.d.s.}$$