E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación Curso 2010-2011

Grado Ingeniería Tecnologías de Telecomunicación Asignatura: Cálculo I

PRUEBAS DE EVALUACIÓN

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

PRUEBA 1 - 22 NOVIEMBRE 2010

1

(a) Representar en el plano las raíces cuartas del número complejo $z=\left(\frac{10\sqrt{3}+10i}{5+5i}\right)^{-6}$. Escribir las soluciones en forma binómica y exponencial.

(b) Representar gráficamente la región del plano donde se encuentran los afijos del siguiente conjunto de números complejos $\left\{z\in\mathbb{C} \,/\quad 0\le z\cdot\bar{z}\le \left|e^{i(2-3i)}\right|\right\}$

Puntuación:

2

Determinar el carácter y la suma de las siguientes series:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+3}}{3^{2n-1}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n^2+3}{n+1}\right)$ (3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$

Puntuación:

3

Se considera $f(x)=\log\left(\frac{1}{(x-1)(2x-1)}\right)$. Se pide:

(a) Calcula la fórmula de Taylor de la función en el punto $a=0$.

(b) Calcula una cota del error cuando queremos aproximar $-\log(0.72)=\log\left(\frac{1}{(0.1-1)(2\cdot 0.1-1)}\right)$ por el polinomio de grado 3. Justificar la respuesta.

(c) ¿De qué grado se debe considerar el polinomio de Taylor de $f(x)$ en $a=0$ si se quiere aproximar con él el valor de $-\log(0.72)$ con un error menor que 10^{-1}? Justificar la respuesta.

Puntuación:

4

Dadas las curvas $x^2+y^2-4x=1$, $x^2+y^2+2y=9$. Se pide

(a) Representar las curvas y determinar los puntos de corte.

(b) Calcular las rectas tangentes y normales en dichos puntos a ambas curvas.

Puntuación:

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

RECUPERACIÓN PRUEBA 1 - 22 NOVIEMBRE 2010

1

(1) Encontrar las raíces complejas de la ecuación: $z^4 - z^2(1+i) + i = 0$.

(2) Escribir en forma binómica y exponencial el número w del que es raíz décima $1-\sqrt{3}i$.

Puntuación:

2

(1) Determinar el carácter y la suma de las siguientes series

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n \cdot e^{2n+3}}{(5n+3)2^{n+1}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{3^{4n+5}}$

(2) Justificar por qué una serie de términos positivos no puede ser oscilante.

Puntuación:

3

Calcular, mediante la diferencial, una aproximación de cos(155º) y dar una cota del error cometido. Hacer una representación gráfica de la función y de la diferencial de la función en el punto que se considere.

Puntuación:

4

(1) Calcular los extremos relativos de la función $f(x) = x^4 \cdot e^{-x^2}$.

(2) Justificar, utilizando el polinomio de Taylor, la razón por la que son máximos o mínimos relativos los puntos que se hayan obtenido en el apartado (1).

Puntuación:

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

PRUEBA 2 – 24 ENERO 2011

1

Desarrollar en serie de potencias de x las siguientes funciones, indicando, en cada caso, el campo de convergencia del desarrollo

(a) $f(x)=\log(1+x)$ (b) $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$

Puntuación:

2

(a) Calcular $E=y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}$ siendo $z=f(u,v)$, $u=\sqrt{x^2+y^2}, v=arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(b) Una función diferenciable en el punto $(0,1,-5/3)$ tiene como plano tangente en dicho punto el plano: $2x+3y+3z=2$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ y obtener también el vector tangente que se encuentra en el plano vertical que contiene a la dirección $(0,1)$.

Puntuación:

3

Considerar una placa delgada que tiene la forma del triángulo R de vértices A(1,0), B(-1,1) y C(1,-1). Suponiendo que la temperatura en cada punto de la placa viene dada por la función $T(x,y)=x^2-xy+y^2$, se pide obtener los extremos absolutos de la función T en dicho triángulo.

Puntuación:

4

(a) Calcular las siguientes integrales $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2}}$, $\int \frac{dx}{\cos^2 x - sen^2 x}$

(b) Ordenar los siguientes números sin obtener el valor de las integrales definidas

$$I_1 = \int_0^e \frac{dx}{1+x^2} \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}dx}{1+x^2} \qquad I_3 = |I_2|$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{xdx}{x-2} \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{x+x^3}$$

Puntuación:

Indicaciones:

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: El integrando es una función racional en senx, cosx: $R(senx, \cos x)$ donde R indica una función racional. Cambios aconsejados:

1. Si $R(senx, \cos x)$ es par en $(\operatorname{sen} x, \cos x)$, el cambio es $\operatorname{tg} x = t$
2. Si $R(senx, \cos x)$ es impar en cos x, el cambio es $senx = t$.
3. Si $R(senx, \cos x)$ es impar en sen x, el cambio es $\cos x = t$.
4. Si $R(senx, \cos x)$ no tiene ninguna de las paridades anteriores, entonces el cambio general aplicable es $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

FUNCIONES IRRACIONALES $\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \cdot dx$, donde f es una función racional de las variables del integrando, con $a \neq 0$. Se aplican tres posibles cambios de variable, según sea la expresión siguiente:

1. $ax^2+bx+c = p^2 - (qx+r)^2 \rightarrow$ cambio de variable, $qx + r = p \cdot sen\, t$
2. $ax^2+bx+c = p^2 + (qx+r)^2 \rightarrow$ cambio de variable, $qx + r = p \cdot Sh\, t$
3. $ax^2+bx+c = -p^2 + (qx+r)^2 \rightarrow$ cambio de variable, $qx + r = p \cdot Ch\, t$

NOTA: En todos los ejercicios se deberá justificar la respuesta explicando el procedimiento seguido en la resolución del ejercicio.

EXAMEN FEBRERO

1

(1) Sea α el argumento del número complejo z. Podemos asegurar entonces que el cociente $\dfrac{z}{-1-\sqrt{3}\,i}$ es un número real negativo:

__A) Si $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ __ B) Si $\alpha = \dfrac{5\pi}{3}$ __ C) Si $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

__D) Para ningún valor α de los anteriores el cociente $\dfrac{z}{-1-\sqrt{3}\,i}$ es un número real negativo.

(2) El conjunto de puntos del plano que equidistan de $A(1,1)$ y $B(3,2)$ son aquellos z complejos que cumplen:

__A) $|z-(1+i)| = |3+2i|$

__B) $|iz - i(1+i)| = |(3+2i)-z|$

__C) $|z| = |(3+2i)-(1+i)|$

__D) Ninguna de las anteriores

(3) Resolver la ecuación $z^7 - \bar{z} = 0$. Representar en el plano complejo los puntos solución de la ecuación

Puntuación:

2

(1) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{3^{2n+1}}$ determinar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones **justificando** la respuesta:

(a) La serie es convergente porque su término general tiende a cero.

(b) La sucesión de sumas parciales no es convergente.

(c) La sucesión b_n es una sucesión acotada.

(2) Determinar el carácter de las siguientes series y calcular el valor de su suma cuando sea posible.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{2n-1}}{9^{n-3}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{3n+2}{n+1}\right)$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cos(n\pi)}$

(3) Calcular el dominio de la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n(n+1) \cdot 3^n}$ siendo $x \in \mathbb{R}$ y obtener también el valor de $f(4)$.

Puntuación:

3

(1) Dadas las curvas $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2$, una recta tangente a ambas curvas tiene por ecuación:

__A) $y = x + \frac{1}{2}$ __ B) $y = -2x$

__C) $y = 2x$ __ D) Ninguna de las anteriores.

(2) Sea y una función implícita de x, definida por la ecuación $x^2 y - e^{2x} = \operatorname{sen} y$, entonces la derivada de y respecto de x es:

__A) $y' = \dfrac{2(xy - e^{2x})}{\cos y - x^2}$ __ B) $y' = \dfrac{2(xy - e^{2x})}{\cos y + x^2}$

__C) $y' = \dfrac{2(xy + e^{2x})}{\cos y - x^2}$ __ D) Ninguna de las anteriores.

(3) Dada la función $f(x) = x \log(1-x)$, se pide:

a) Calcular el polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x)$ en el punto 0 y escribir la expresión del resto enésimo de Lagrange.

b) Calcular el error que se comete al aproximar por la recta tangente el valor de $f(0.1) = \dfrac{\log 0.9}{10}$

Puntuación:

4

(1) Dada la función $f(x,y)=\sqrt{x}+\log\left(y-x^2\right)$, se pide

(a) obtener y representar su dominio

(b) calcular, mediante una aproximación lineal, el valor de $f(1.1,2.2)$.

(2) Sabiendo que:

- $f(x,y)$ es una función diferenciable en el punto $P(a,b)$
- La recta de ecuación $3x-y=0$ es perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por P
- La máxima pendiente de la superficie S de ecuación $z=f(x,y)$ en $(a,b,f(a,b))$ es $\sqrt{5}$

se pide hallar el gradiente de f en $P(a,b)$ sabiendo que su primera componente es positiva.

Puntuación:

5

Sean $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, probar que:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

Comprobar el resultado anterior para el caso en el que $f(x,y)=arctg\left(\frac{x}{y}\right)$.

Puntuación:

6

(1) ¿Tiene la función $si(x)=\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ algún tipo de simetría? ¿En qué puntos se obtienen los extremos relativos de $si(x)$?

(2) Integrando respecto a la variable y, calcular el área de la región encerrada por las curvas: $y^2+x-3=0$, $x-y-1=0$.

Puntuación: