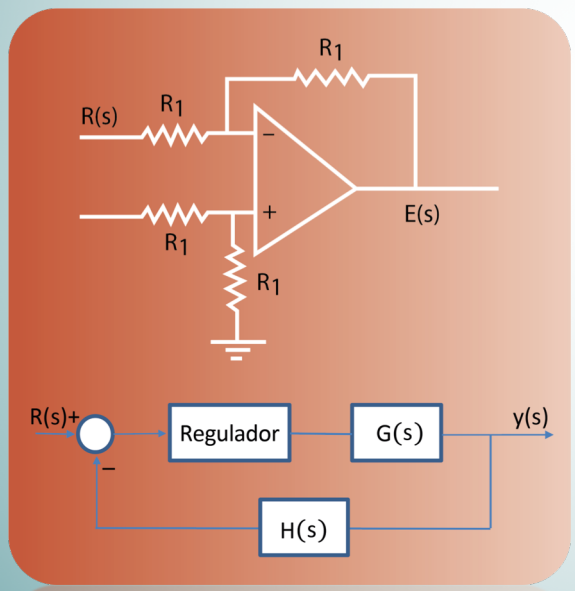
Electrónica Básica, Control e Instrumentación

Bloque II. Sistemas de Control

Tema 2. Análisis temporal



Sandra Robla Gómez

Elena Hoyos Villanueva

José Ángel Miguel Díaz

DPTO. DE TECNOLOGÍA ELECTRÓNICA E INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

Este tema se publica bajo Licencia:

Creative Commons BY-NC-SA 4.0

TEMA 2

ANÁLISIS TEMPORAL

1. Introducción
2. Respuesta transitoria de sistemas de primer orden
3. Respuesta transitoria de sistemas de segundo orden
4. Características de la respuesta transitoria
5. Respuesta transitoria en sistemas de orden superior
6. Estabilidad

1.INTRODUCCIÓN

TIPO DE UN SISTEMA

La fdt de un sistema en **cadena abierta** puede ponerse como:

$$G(s) = \frac{K(1+T_1S)(1+T_2S)\cdots(1+T_mS)}{Sj(1+T_aS)(1+T_bS)\cdots(1+T_nS)}$$

K: Ganancia de cadena directa

T: Constantes del sistema

El tipo de sistema lo determina el polo en el origen.

ORDEN DE UN SISTEMA

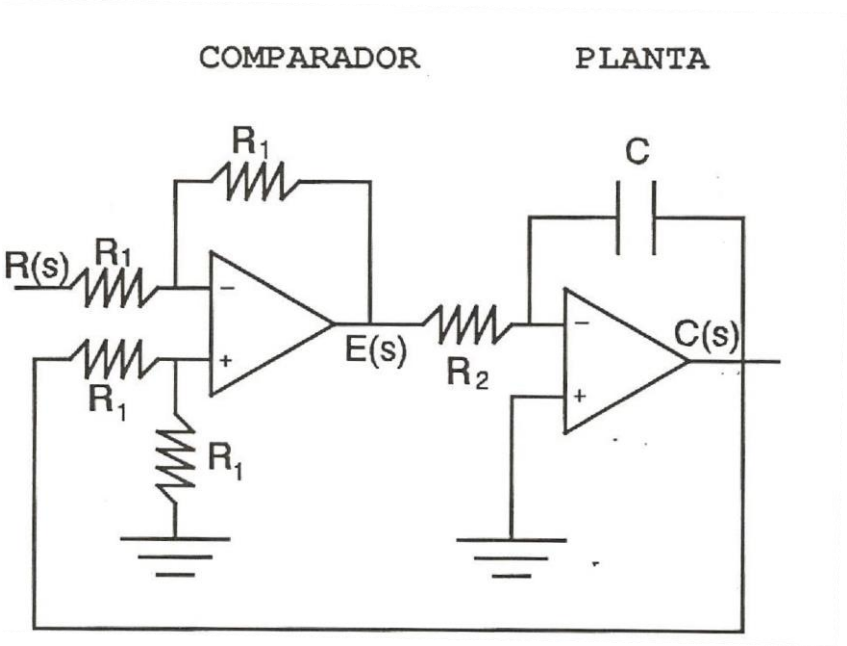
El polinomio característico es el denominador del sistema en lazo cerrado:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Orden de un sistema = Grado del polinomio característico=número de polos del sistema

2. RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

El siguiente circuito representa un sistema de control de primer orden en lazo cerrado.



2. RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Comparador: $E(s) = -R(s) + C(s) = -[R(s) - C(s)]$

Respuesta: $C(s) = -E(s)\dfrac{1}{sCR_2} = \dfrac{-E(s)}{Ts}$

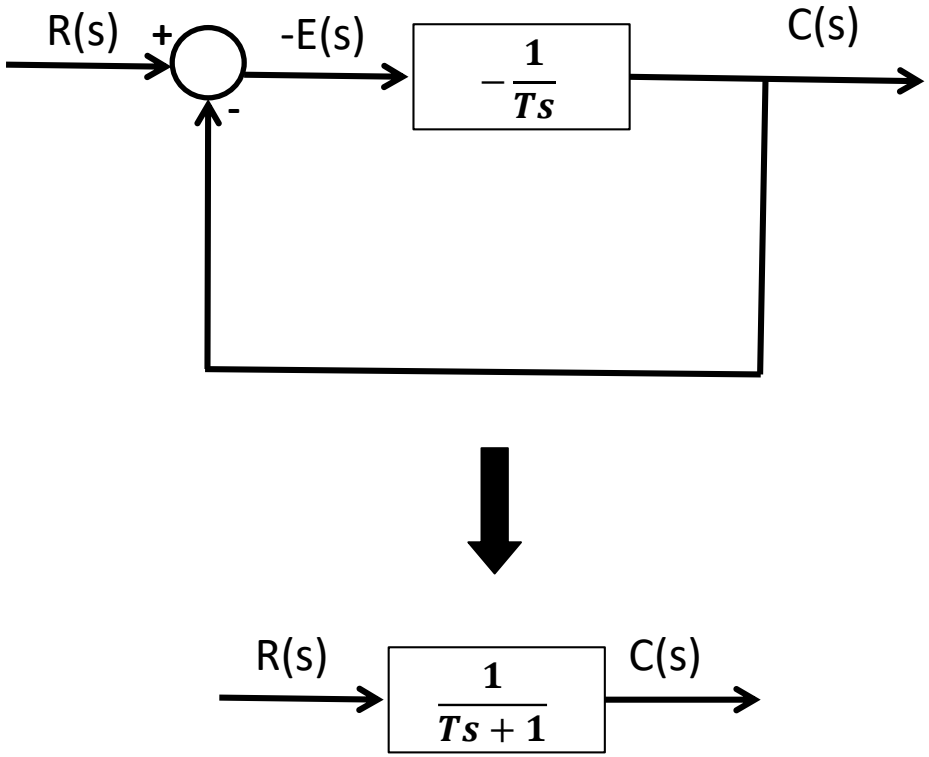
fdt de lazo cerrado :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

y es coincidente con un circuito R-C, filtro de paso bajo de primer orden:

2. RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

El siguiente circuito representa un sistema de control de primer orden en lazo cerrado.

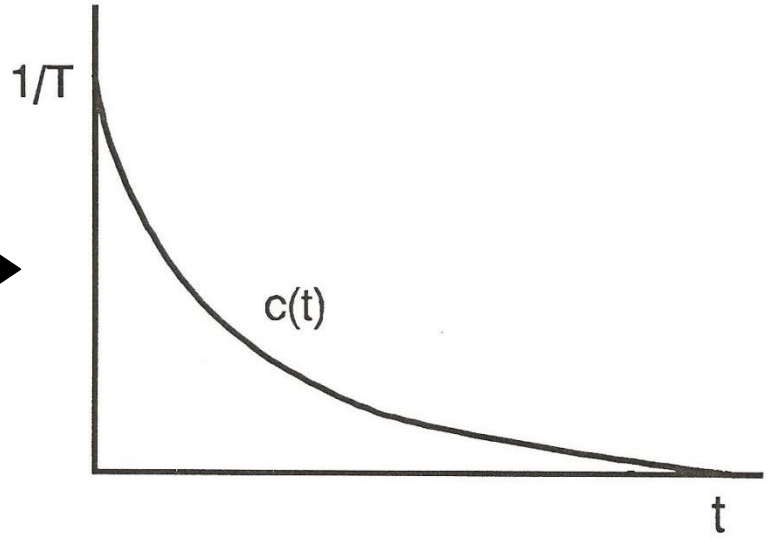


2.1 RESPUESTA DE UN SIST. 1er ORDEN AL IMPULSO UNITARIO

Entrada del sistema: impulso unitario: $r(t) = \delta(t) \quad \gg \quad R(s) = 1$

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} = \frac{T^{-1}}{s+T^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}} \qquad (t \geq 0)$$

$$\begin{cases} t = 0 \quad \gg \quad c(t) = \dfrac{1}{T} \\ t = \infty \quad \gg \quad c(t) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$



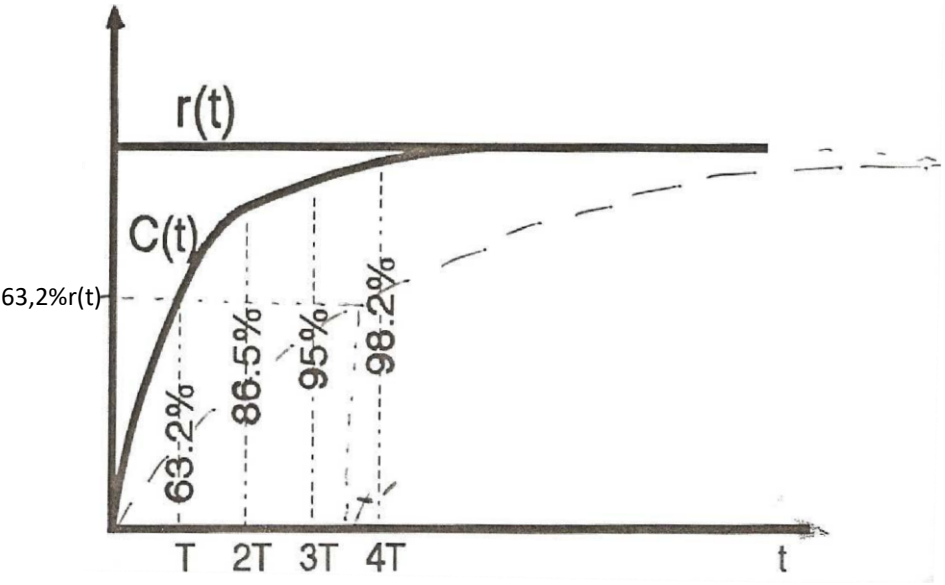
2.2 RESPUESTA DE UN SIST. 1er ORDEN AL ESCALÓN UNITARIO

$$r(t) = u(t); \qquad R(s) = {}^{1}/_{s} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{Ts+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = sC(s)\Big|_{s=0} = 1 \\ B = (Ts+1)C(s)\Big|_{s=-T^{-1}} = -T \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + {}^{1}/_{T}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad (t \geq 0)}$$



$Valor\ inicial: t = 0 \quad \gg \quad c(t) = 0$

$Valor\ final: t = \infty \quad \gg \quad c(t) = 1$

$Para\ t = T: \quad c(t) = 1 - e^{-1} = 0{,}632$

LA PENDIENTE EN EL ORIGEN:

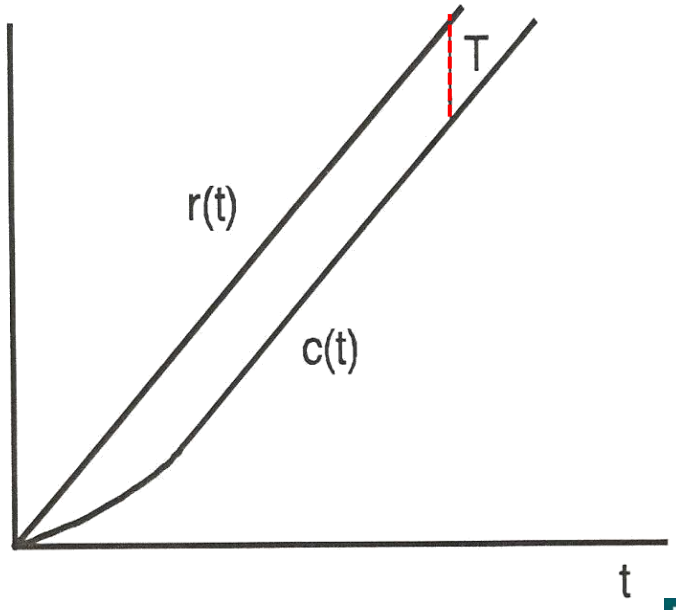
$$c'(t) = T^{-1}e^{-t/T} = T^{-1} \quad (t \geq 0)$$

2.3 RESPUESTA DE UN SIST. 1er ORDEN A LA RAMPA UNITARIA

Entrada del sistema rampa unitaria: $r(t) = t\,u(t) \quad \gg \quad R(s) = {}^{1}/_{s^2}$

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1}\,\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+T^{-1}}$$

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$



COMPARANDO LAS TRES RESPUESTAS:

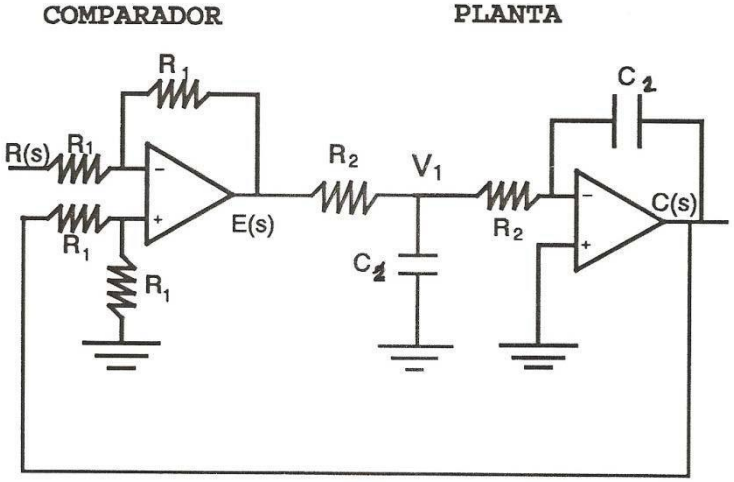
$$r(t) = t\,u(t) \qquad c(t) = t - T + Te^{-t/T}$$

$$r(t) = u(t) \qquad c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

$$r(t) = \delta(t) \qquad c(t) = \frac{1}{T}e^{-t/T}$$

3. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

El siguiente circuito representa un sistema de control de segundo orden en lazo cerrado.



$$E(s) = -[R(s) - C(s)]$$

$$C(s) = -\frac{V_1(s)}{sC_2R_2}$$

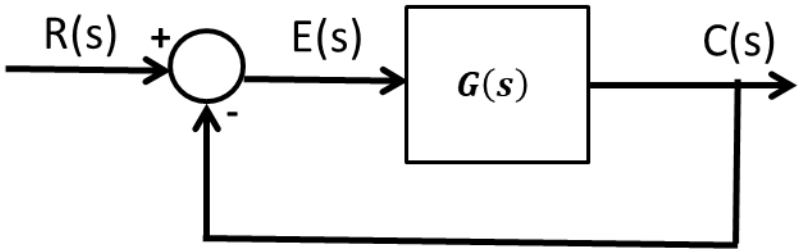
$$\frac{E(s) - V_1(s)}{R_2} = \frac{V_1(s)}{(sC_1)^{-1}} + \frac{V_1(s)}{R_2}$$

$$V_1(s) = \frac{E(s)}{2 + sC_1R_2}$$

$$C(s) = \frac{E(s)}{sC_2R_2(2 + sC_1R_2)}$$

$$C(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{-1/(C_1C_2R_2^2)}{s(s + 2(C_1R_2)^{-1})}$$

$$C(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{-1/(C_1 C_2 R_2^2)}{s(s + 2(C_1 R_2)^{-1})}$$

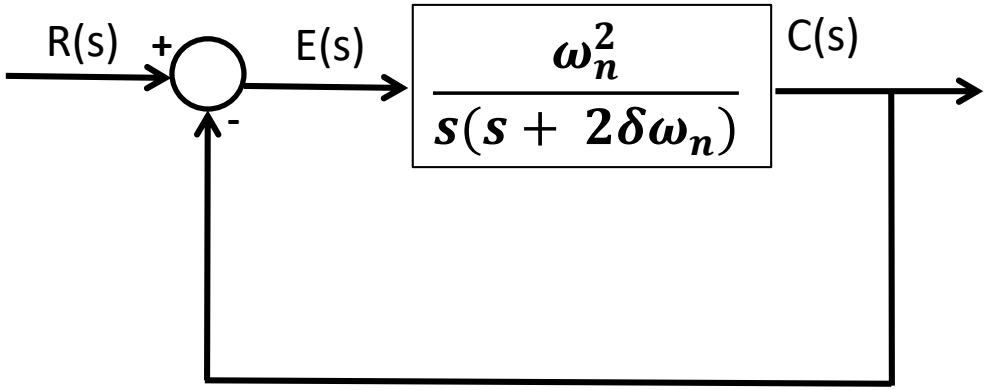


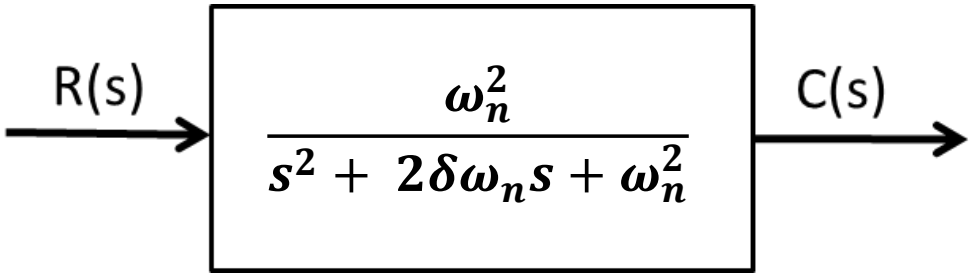
$$M(s) = \frac{(C_1 C_2 R_2^2)^{-1}}{s^2 + 2(C_1 R_2)^{-1} s + (C_1 C_2 R_2^2)^{-1}}$$

- **FRECUENCIA NATURAL NO AMORTIGUADA** $\longrightarrow$ $\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_2^2}}$

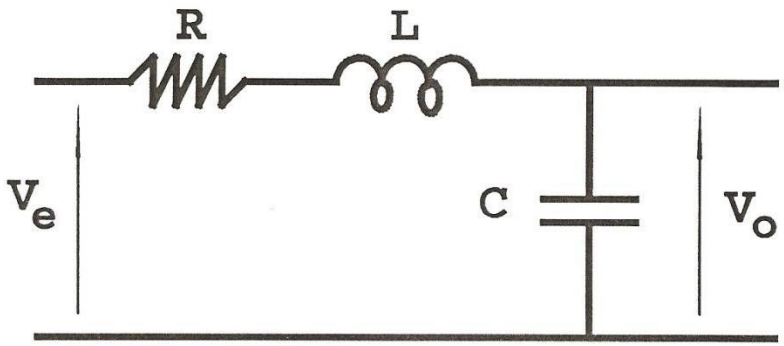
- **COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO** $\longrightarrow$ $\delta = \dfrac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{C_1}}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$


R(s)
+
-
E(s)
$\frac{\omega_n^2}{s(s+2\delta\omega_n)}$
C(s)


R(s)
$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$
C(s)

Ejemplo:



$$\frac{V_0(s)}{V_e(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde:

$$w_n = \left(\sqrt{LC}\right)^{-1}$$

$$\partial = \mathrm{R}\sqrt{C}/2\sqrt{L}$$

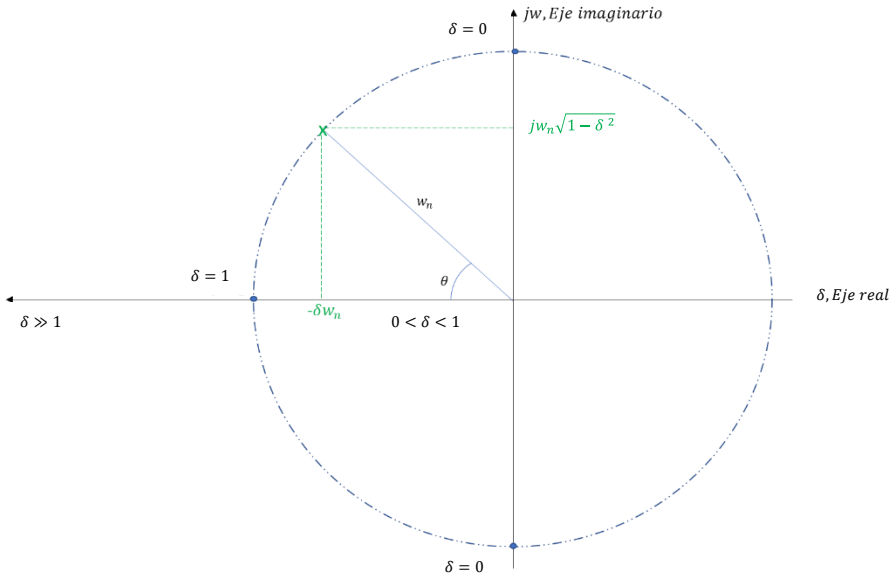
3.1 RESPUESTA DE UN SIST. 2º ORDEN AL ESCALÓN UNITARIO

Las raíces del denominador de la fdt en lazo cerrado son:

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$S_{1,2} = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2 - 1}$$

Representación de ω_n y δ en el plano real-imaginario.



En función de los valores de **δ** cambiará la **localización de los polos** del sistema, y por lo tanto el **comportamiento de la respuesta temporal** del sistema.

SISTEMA SUBAMORTIGUADO

$0 < \delta < 1$: $S_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$

POLOS EN EL SEMIPLANO IZDO.

SISTEMA OSCILANTE

$\delta = 0$: $S_{1,2} = \pm j\omega_n$

POLOS EN EL EJE IMAGINARIO.

SISTEMA CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO

$\delta = 1$: $S_{1,2} = -\omega_n$

POLO DOBLE EN EL EJE REAL.

SISTEMA SOBREAMORTIGUADO

$\delta > 1$: $S_{1,2} = -\delta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\delta^2-1}$

POLOS EN EL EJE REAL.

3.1.1 RESPUESTA TEMPORAL SI 0<δ<1, SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS

$$R(s) = \mathcal{L}[u(t)] = {}^{1}/_{s}$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \left\{ \begin{array}{c} A = 1; \\ B = -1; \\ C = -2\delta\omega_n \end{array} \right\}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{\delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

LLamando:

- **FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA** ➡ $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \delta^2}$

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \delta\omega_n + j\omega_d)(s + \delta\omega_n - j\omega_d) =$$

$$(s + \delta\omega_n)^2 + w_d^2$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \delta\omega_n}{(s + \delta\omega_n)^2 + w_d^2} - \frac{\delta\omega_n}{(s + \delta\omega_n)^2 + w_d^2}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\delta\omega_n t}cos\omega_d t - \frac{\delta\omega_n}{\omega_d}e^{-\delta\omega_n t}sen\omega_d t =$$

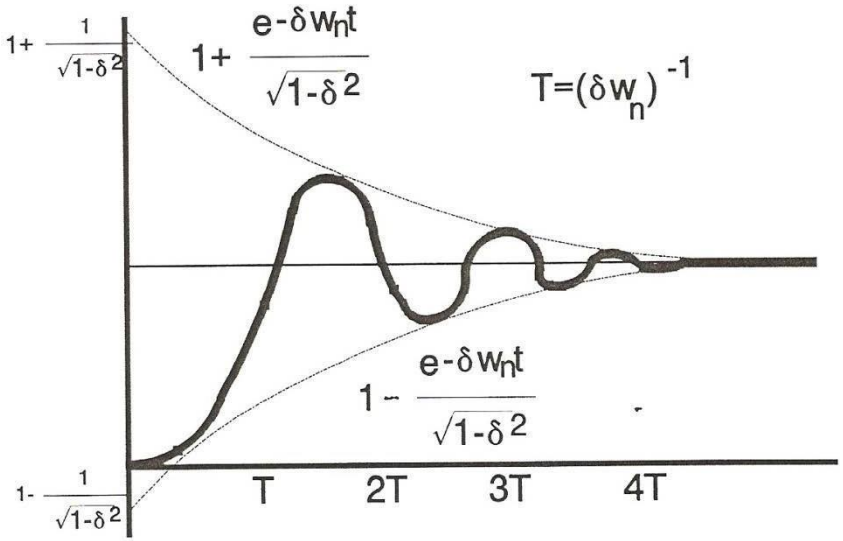
$$1 - e^{-\delta\omega_n t}\left(cos\omega_d t - \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}sen\omega_d t\right) \qquad t \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{c} sen\theta = \dfrac{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}{\omega_n} = \sqrt{1-\delta^2} \\ \\ cos\theta = \dfrac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \delta \end{array} \right\}$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}(\underbrace{\sqrt{1-\delta^2}}_{sen\theta}cos\omega_d t + \underbrace{\delta}_{cos\theta}sen\omega_d t)$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}(sen\theta\cos\omega_d t + cos\theta sen\omega_d t)$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} sen(\omega_d t + \theta) \qquad t \geq 0$$



Señal de error:

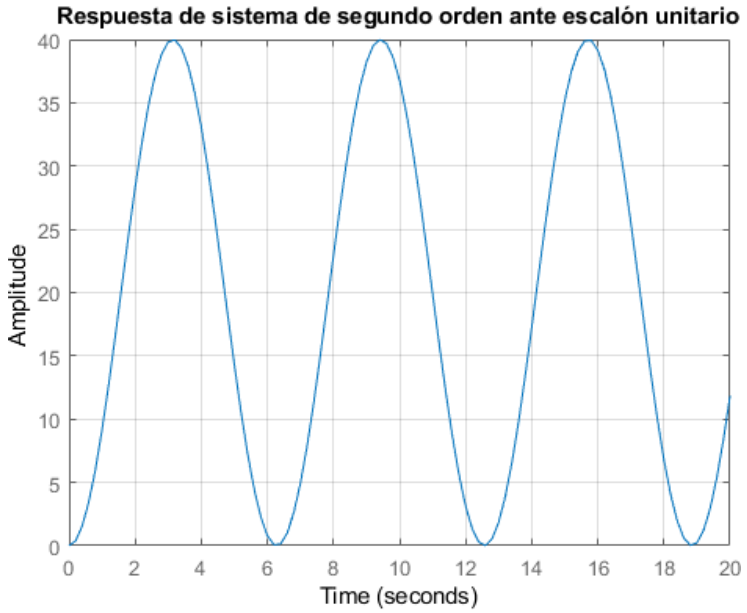
$$e(t) = r(t) - c(t) = \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}} sen(\omega_d t + \theta) \qquad t \geq 0$$

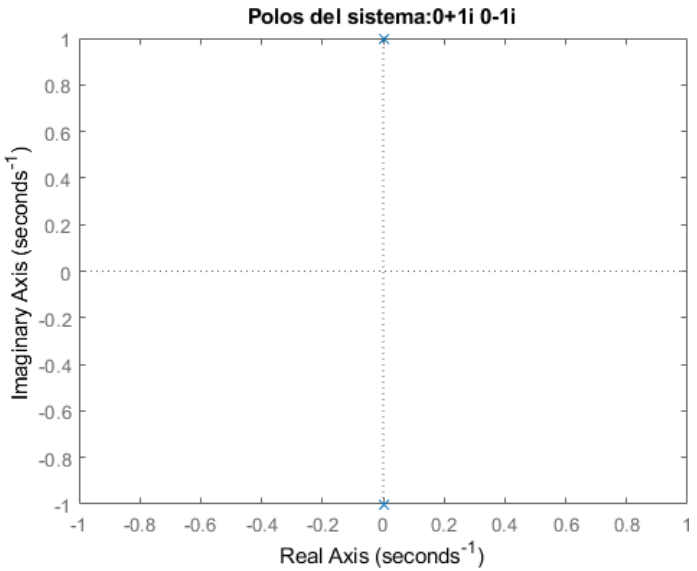
3.1.2 RESPUESTA TEMPORL SI δ=0, NO HAY AMORTIGUAMIENTO

Es un caso particular de los sistemas subamortiguados.

$$c(t) = 1 - cos\omega_n t \qquad (t \geq 0)$$

La respuesta presenta una oscilación permanente en la que $w_n$es la frecuencia de oscilación.





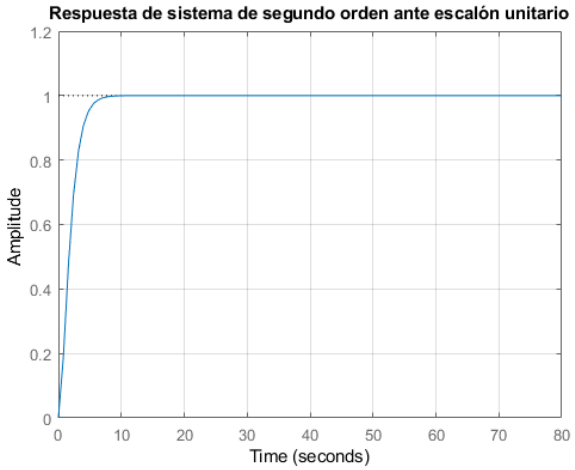
3.1.3 REPUESTA TEMPORAL SI δ=1, AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO

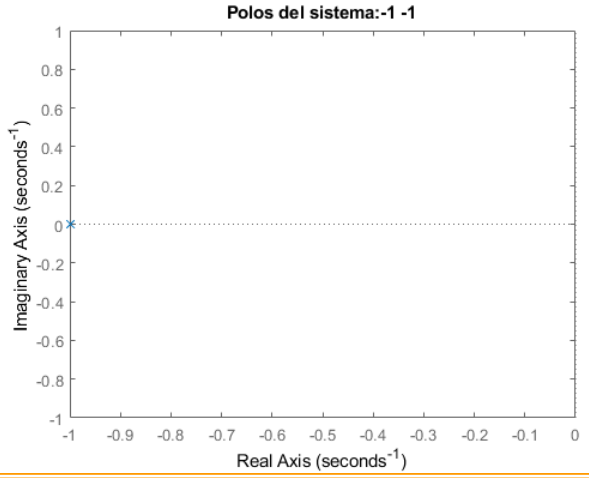
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2} - \frac{1}{s+\omega_n}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t) \qquad t \geq 0$$

$$e(t) = r(t) - c(t) = e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)$$





3.1.4 REPUESTA TEMPORAL SI δ>1, SOBREAMORTIGUADO

Las raíces son: $S_1 = -\delta w_n + w_n\sqrt{\delta^2 - 1}$ $S_2 = -\delta w_n - w_n\sqrt{\delta^2 - 1}$

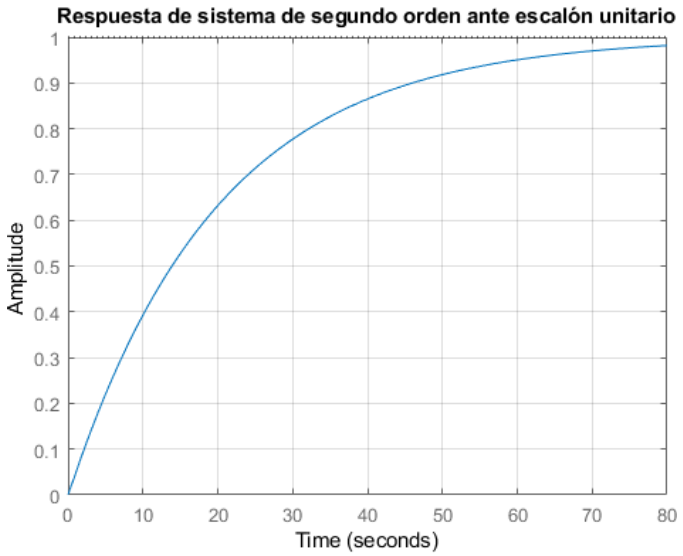
Respuesta:

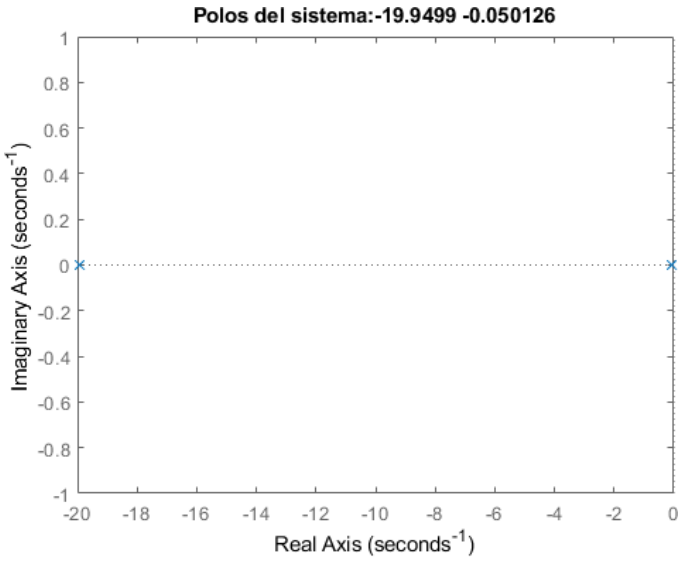
$$c(t) = 1 - \frac{w_n}{2\sqrt{\delta^2-1}}\frac{e^{S2t}}{S_2} - \frac{e^{S1t}}{S_1}$$

Cuando $\delta \gg 1$, una de las raíces S_2 es mucho mayor en valor absoluto que la otra raíz S_1, $|S_2| >> |S_1|$, por lo tanto, uno de los exponentes de la respuesta decrece de manera más brusca que el otro y se puede despreciar, quedando una respuesta aproximada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s_1}{s + s_1} \rightarrow C(s) = \frac{s_1}{s(s + s_1)}$$

$$c(t) = 1 - e^{S_1 t} \ (t \geq 0)$$





EJEMPLO:

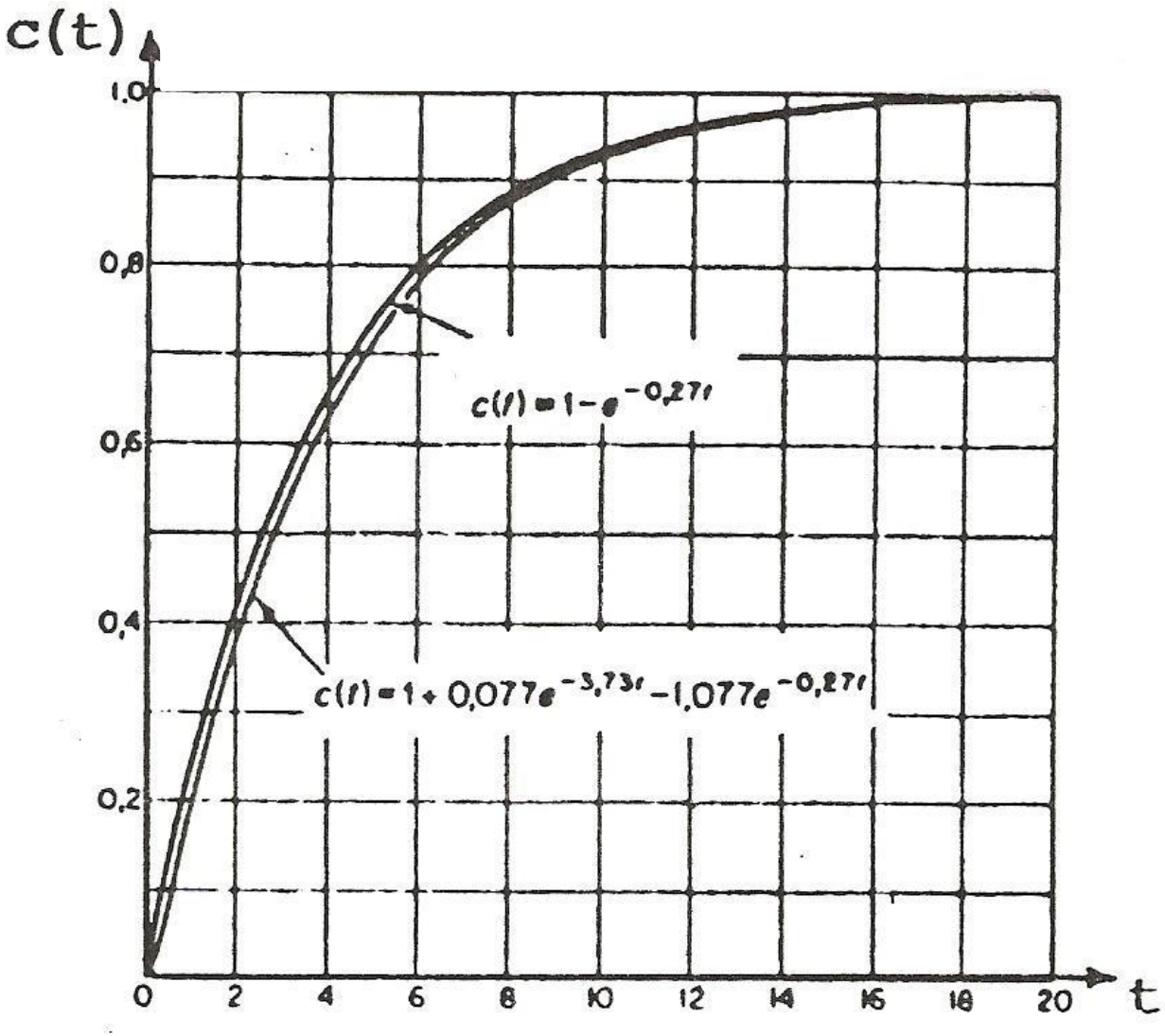
$\delta = 2$
$\omega_n = 1$ → $s1 = -0,27$, $s2 = -3,73$

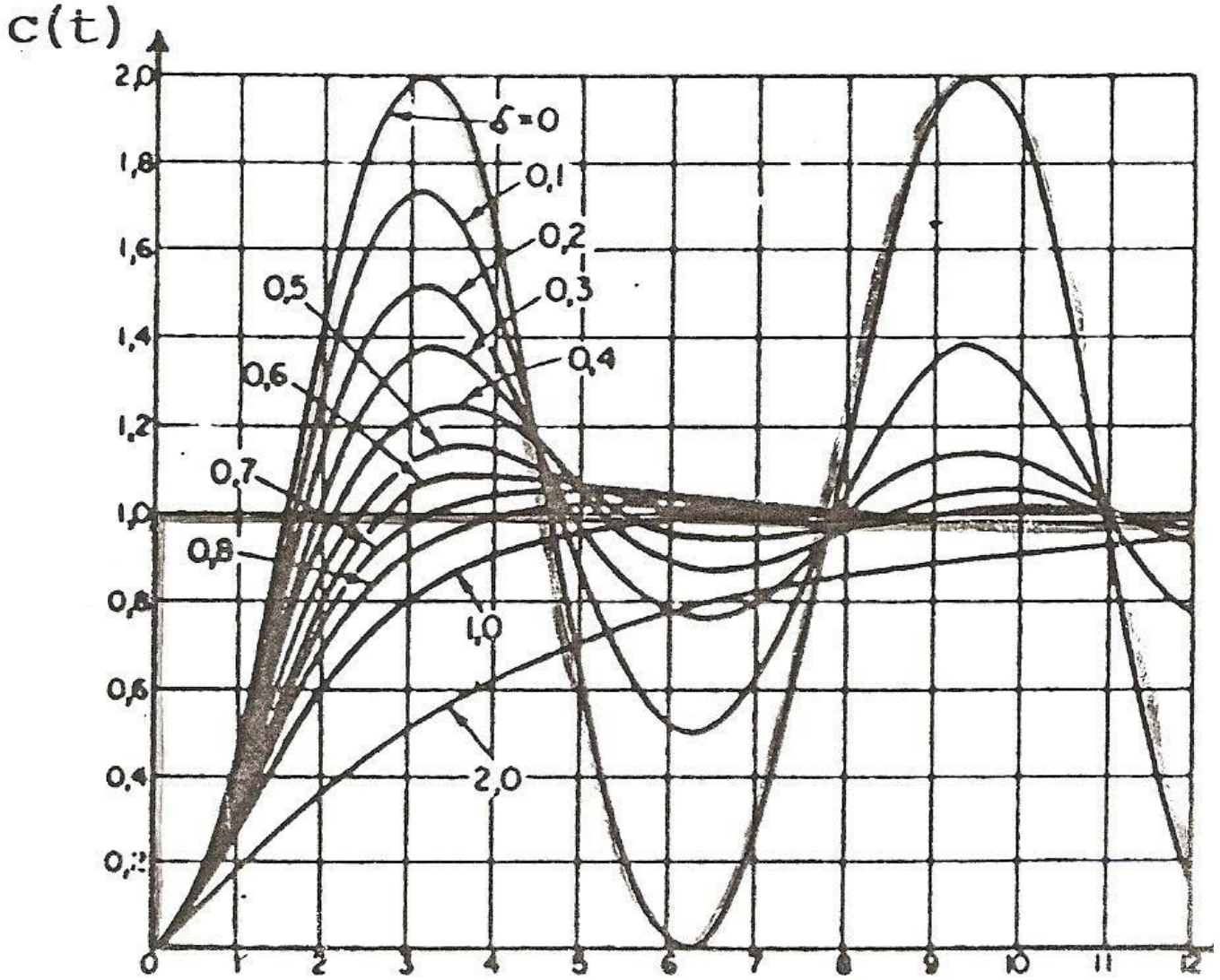
•Respuesta exacta:

$$c(t) = 1 + 0,77e^{-3,73t} - 1,077e^{-0,27t} \qquad (t \geq 0)$$

•Respuesta aproximada:

$$c(t) = 1 - e^{-0,27t} \qquad (t \geq 0)$$


c(t)
1.0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
t
c(t) = 1 − e^−0,27t
c(t) = 1 + 0,077e^−3,73t − 1,077e^−0,27t

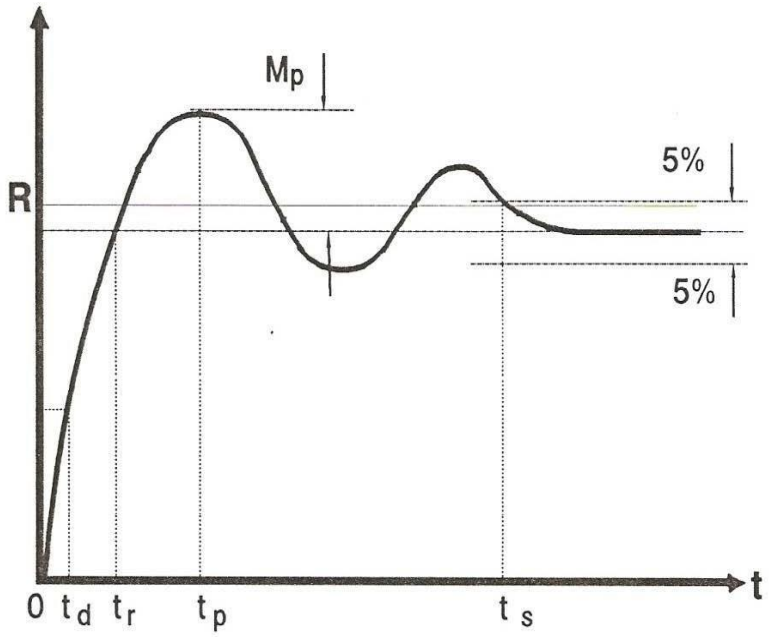

c(t)
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
δ=0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
1,0
2,0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

4. CARACTERÍSTICAS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

Las características de trabajo deseadas de un sistema se pueden establecer a través de términos en el dominio del tiempo.

Para ello, se suele emplear una entrada escalón.

Como condición inicial estándar se establece que al inicio el sistema está en reposo.



- **TIEMPO DE CRECIMIENTO, t_r:**

Tiempo requerido para que el sistema crezca:

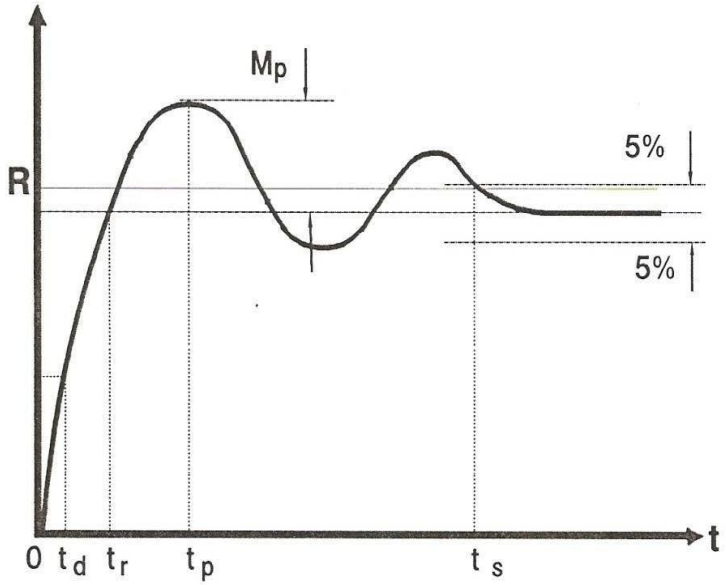
- del 10 al 90 % del valor final. SIST. SOBREAMORTIGUADOS
- del 0 al 100 % del valor final. SIST. SUBAMORTIGUADOS.

$$c(t_r) = 1 = 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t_r}}{\sqrt{1-\delta^2}} sen(\omega_d t_r + \theta)$$

$$sen(\omega_d t_r + \theta) = 0$$

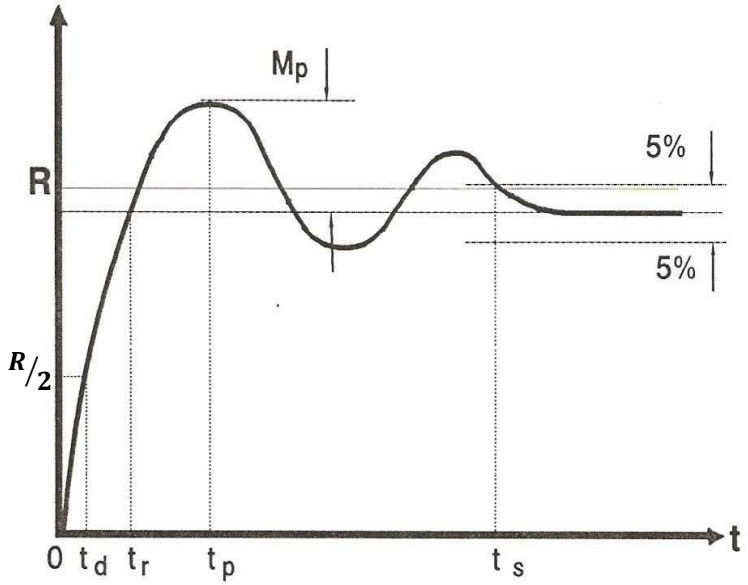
$$\omega_d t_r + \theta = n\pi \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}}$$



- **TIEMPO DE RETARDO, td:**

Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez la mitad del valor final.



- **TIEMPO DE PICO, tp:**

Tiempo transcurrido hasta que la respuesta alcanza el primer pico del sobreimpulso

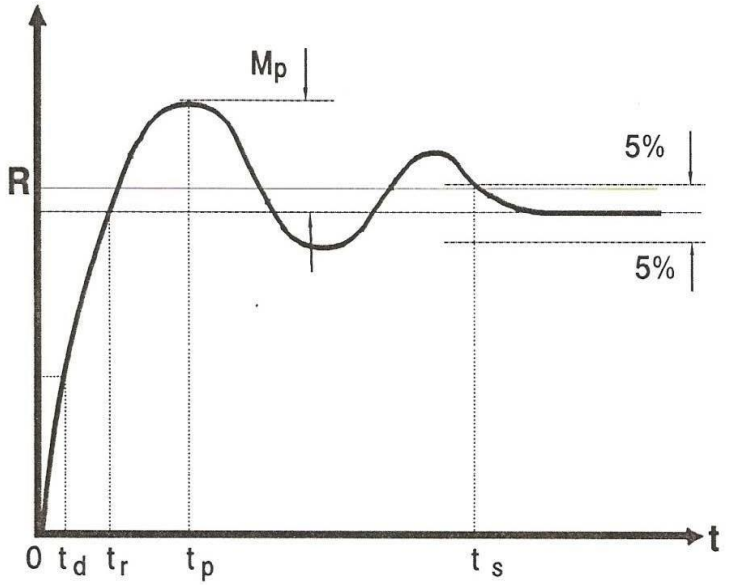
$$\left[\frac{dc(t)}{dt}\right]_{t=t_p} = 0$$

$$\frac{\delta\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t_p} \operatorname{sen}(\omega_d t_p + \theta) - \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n t_p} \cos(\omega_d t_p + \theta) = 0$$

$$\operatorname{tg}(\omega_d t_p + \theta) = \frac{\omega_d}{\delta\omega_n} = tg\theta$$

$$\omega_d t_p = \pi$$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$$



- **MÁXIMO SOBREIMPULSO, Mp:**

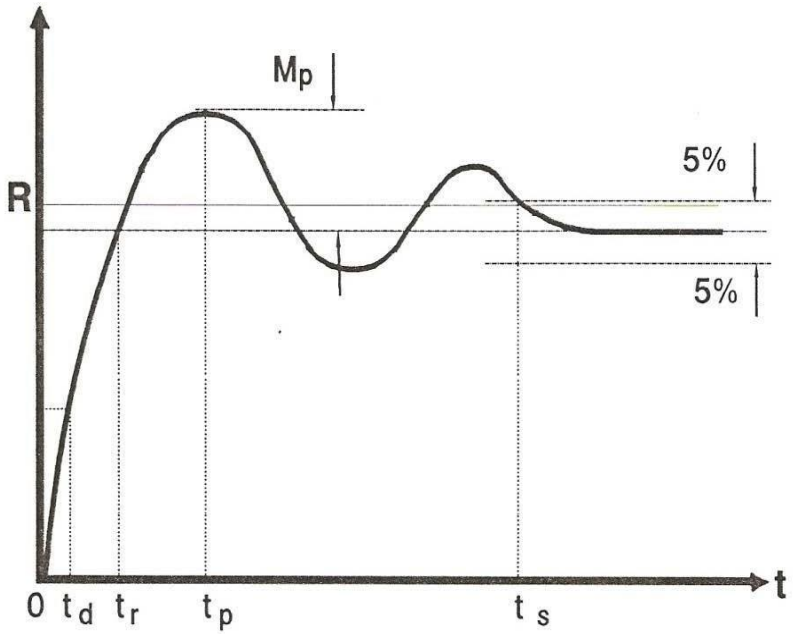
Valor máximo de la curva de respuesta medido desde el valor final

$$M_p = c(t_p) - 1 = -\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\omega_n \frac{\pi}{\omega_d}} \operatorname{sen}(\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} + \theta) = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} e^{-\delta\pi/\sqrt{1-\delta^2}} sen(\theta)$$

$$sen\theta = \sqrt{1-\delta^2}$$

$$M_p = e^{-\delta\pi/\sqrt{1-\delta^2}}$$

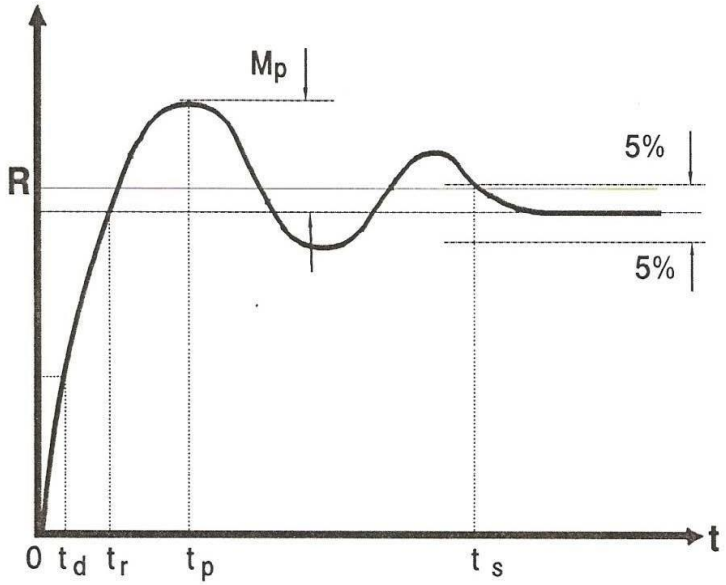
$$M_p(\%) = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} .100$$



- **TIEMPO DE ESTABLECIMIENTO *ts***

Tiempo que precisa la curva de la respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de un cierto rango de su valor final (5% o 2%).

Para el método del 5%, la respuesta entra en ese rango transcurridas π constantes de tiempo.



$$t_s = \frac{\pi}{\delta \omega_n}$$

5.RESPUESTA TRANSITORIA EN SISTEMAS DE ORDEN SUPERIOR

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)} = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

Si $\frac{C(s)}{R(s)}$ es función racional de s, entonces, sus polos y ceros deben de ser número reales o, pares complejos conjugados

Respuesta ante una entrada escalón:

$$C(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s\prod_{j=1}^{q}(s+\sigma_j)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\delta_k\omega_k s+\omega_k^2)}$$

Donde:

- δ_j son los "q" polos reales
- $(s^2+2\delta_k\omega_k s+\omega^2)$ son los 2r polos complejos conjugados, siendo $q+2r=\pi$

La respuesta está formada por un cierto número de funciones de primer orden y segundo orden.

$$C(s)\left[\frac{A}{s}+\sum_{j=1}^{q}\frac{B_j}{s+\sigma_j}+\sum_{k=1}^{r}\frac{C_k(s+\delta_k\omega_k)+D_k\omega_k\sqrt{1-\delta_k^2}}{(s^2+2\delta_k\omega_k s+\omega_k^2}\right]$$

$$c(t)=A+\sum_{j=1}^{q}B_j e^{-\sigma_j t}+\sum_{k=1}^{r}e^{-\delta_k\omega_k t}\left(C_k cos\omega_k\sqrt{1-\delta_k^2}t+D_k sen\omega_k\sqrt{1-\delta_k^2}t\right) \qquad (t\geq 0)$$

6. ESTABILIDAD

- ESTABILIDAD ABSOLUTA
- ESTABILIDAD RELATIVA

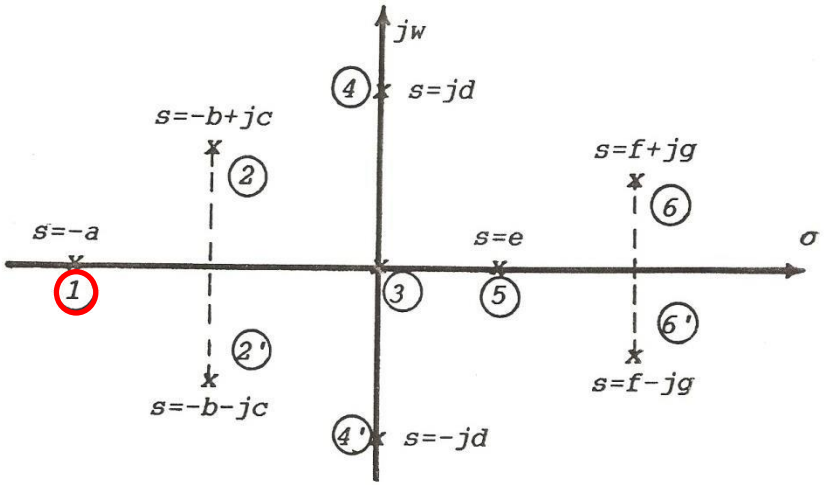
Un sistema es estable si:

- Ante una perturbación de entrada, la salida se anula al ser $t \to \infty$
- Ante una entrada acotada, la salida también es acotada.

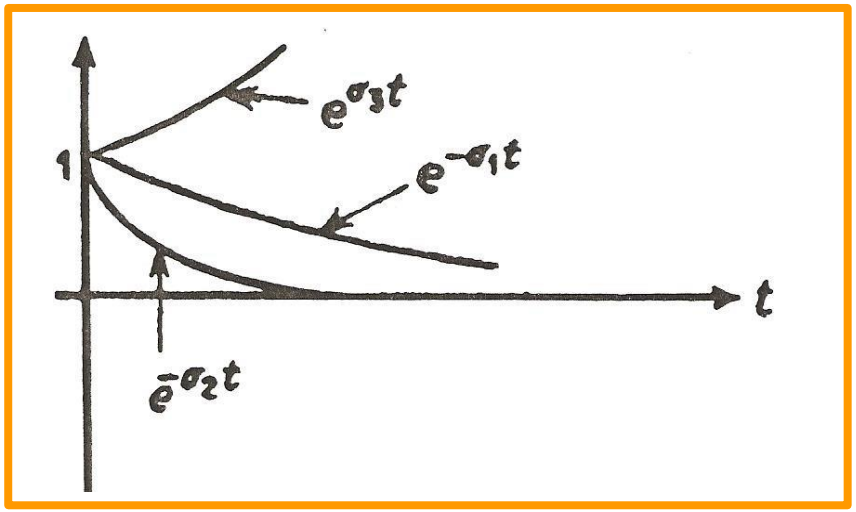
$$|r(t)| \leq N \leq \infty \quad t \geq t_0 \quad \Rightarrow \quad |c(t)| \leq M \leq \infty \quad t \geq t_0$$

- Para un sistema definido por su función de transferencia su respuesta al impulso g(t) debe ser:

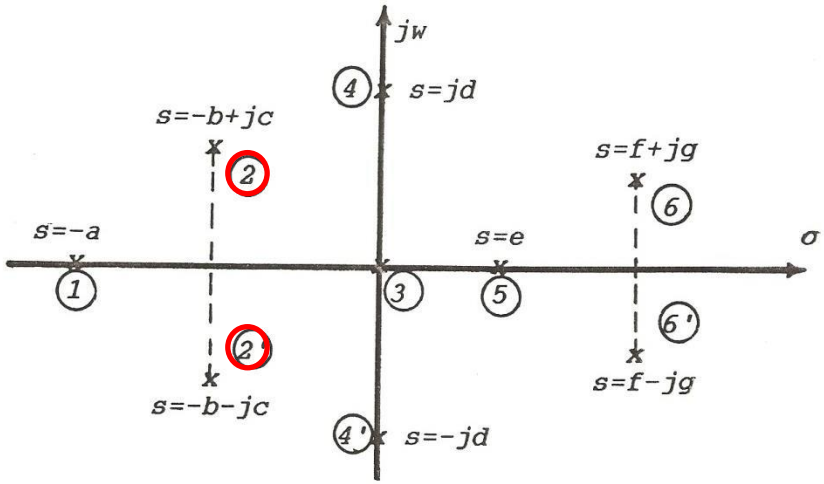
$$\int_0^\infty g(t)dt$$ Existe y es finita.



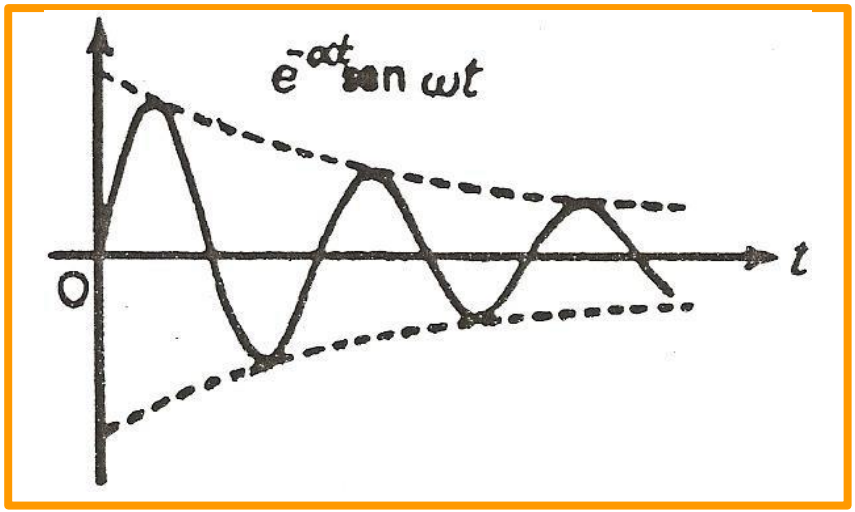
Ante entrada escalón unitario



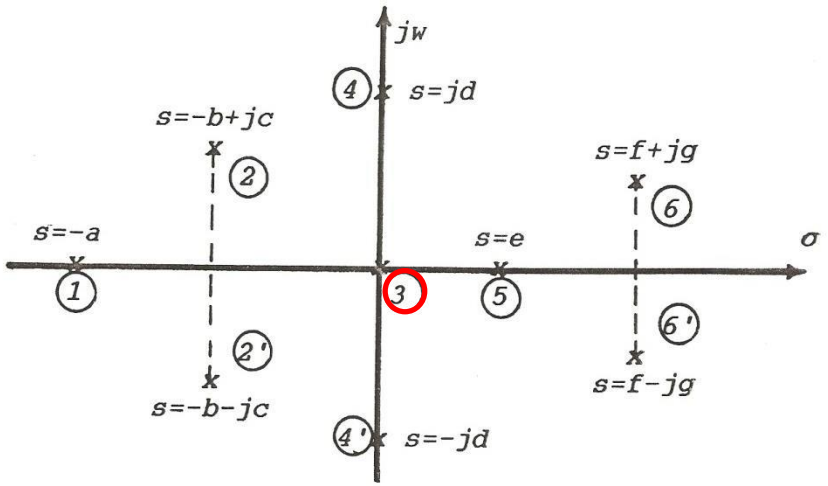
POSICIÓN DEL POLO	FORMA DE LA RESPUESTA	CARACTERÍSTICAS
1	Ae^{-at}	Amortiguamiento exponencial



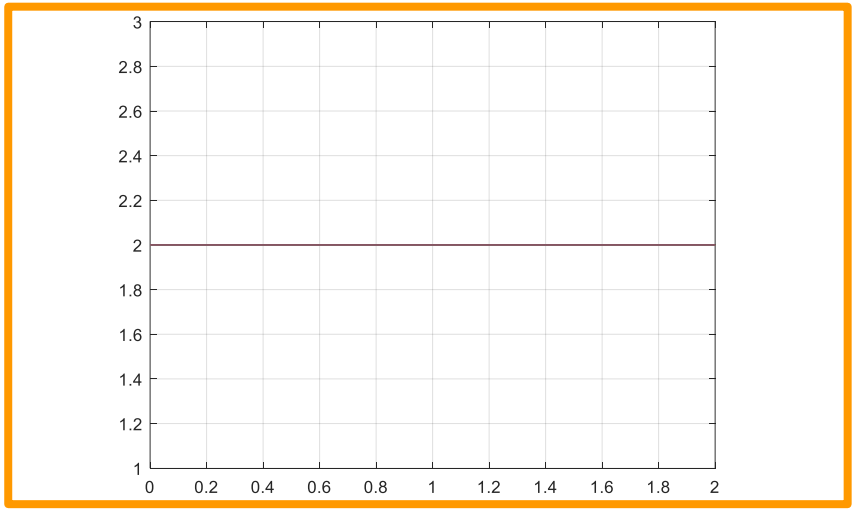
Ante entrada escalón unitario



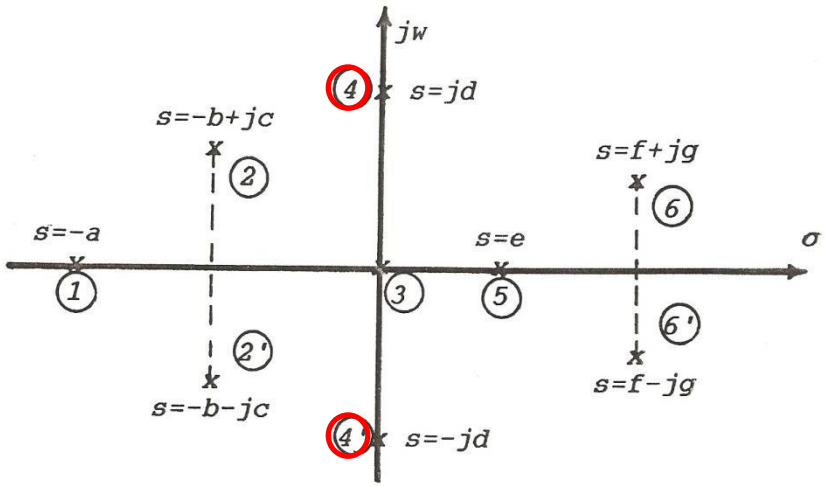
POSICIÓN DEL POLO	FORMA DE LA RESPUESTA	CARACTERÍSTICAS
2-2'	$Ae^{-bt}\,sen\,(ct+\phi)$	Sinusoide amortiguada exponencialmente



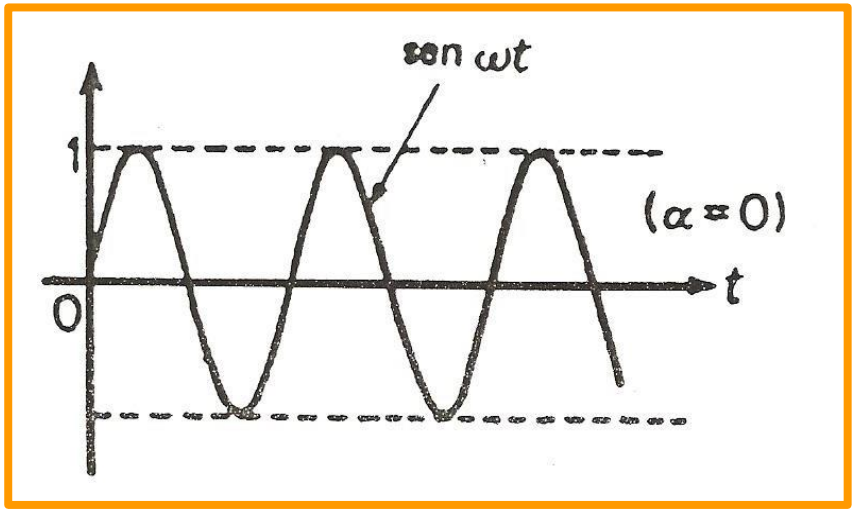
Ante entrada escalón unitario



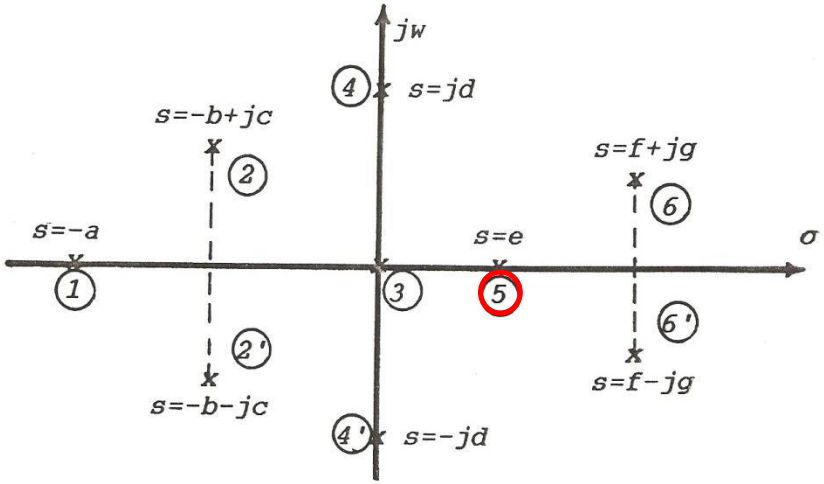
POSICIÓN DEL POLO	FORMA DE LA RESPUESTA	CARACTERÍSTICAS
3	A	Constante



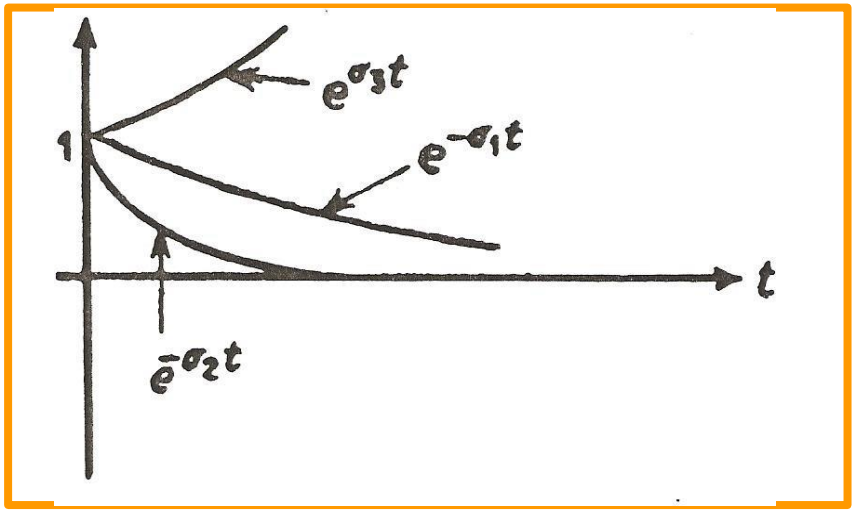
Ante entrada escalón unitario



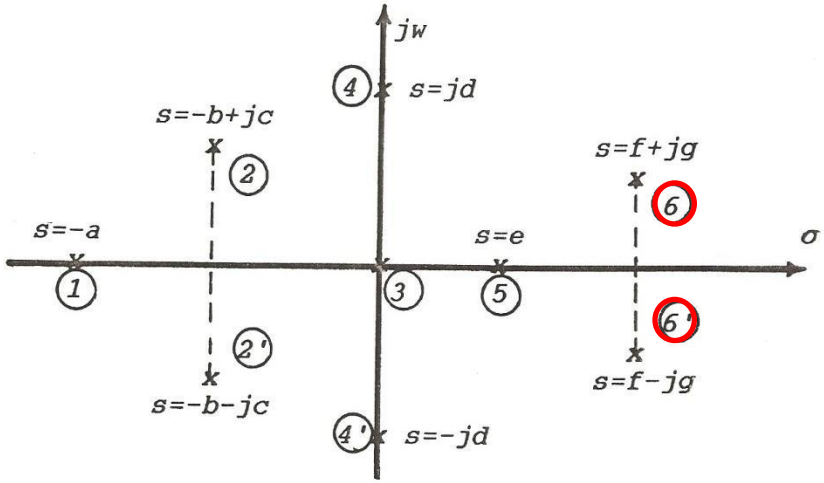
POSICIÓN DEL POLO	FORMA DE LA RESPUESTA	CARACTERÍSTICAS
4-4’	$Ae^{ft}\,sen\,(gt+\phi)$	Sinusoide de amplitud constante. Oscilador

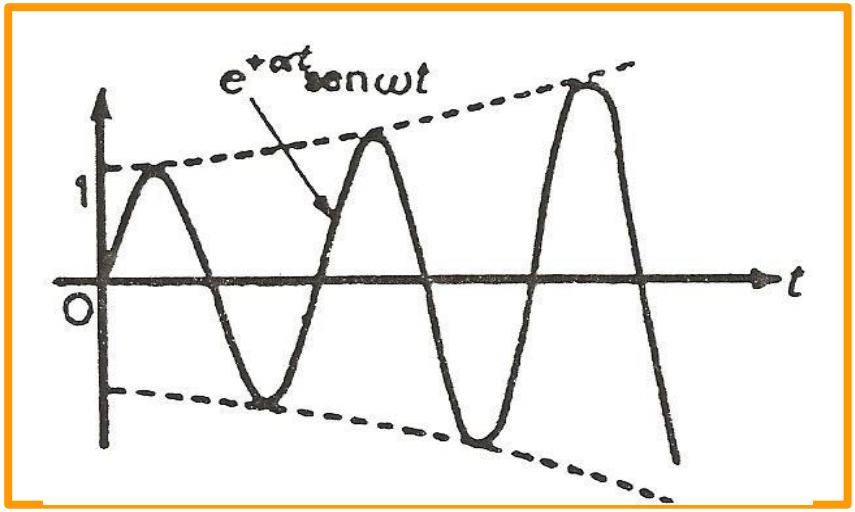


Ante entrada escalón unitario



POSICIÓN DEL POLO	FORMA DE LA RESPUESTA	CARACTERÍSTICAS
5	Ae^{et}	Incremento exponencial





POSICIÓN DEL POLO	FORMA DE LA RESPUESTA	CARACTERÍSTICAS
6	$Ae^{ft}sen(gt+\emptyset)$	Sinusoide con incremento exponencial

Ecuación característica:

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + ... + a_n = 0$$

- Coeficientes del mismo signo.
- Ningún coeficiente sea nulo.
- $D_1>0$, $D_2>0$, $D_3>0$, … , $D_n>0$

- **Determinantes de Hurwitz**:

$$D_1 = |a_0|$$

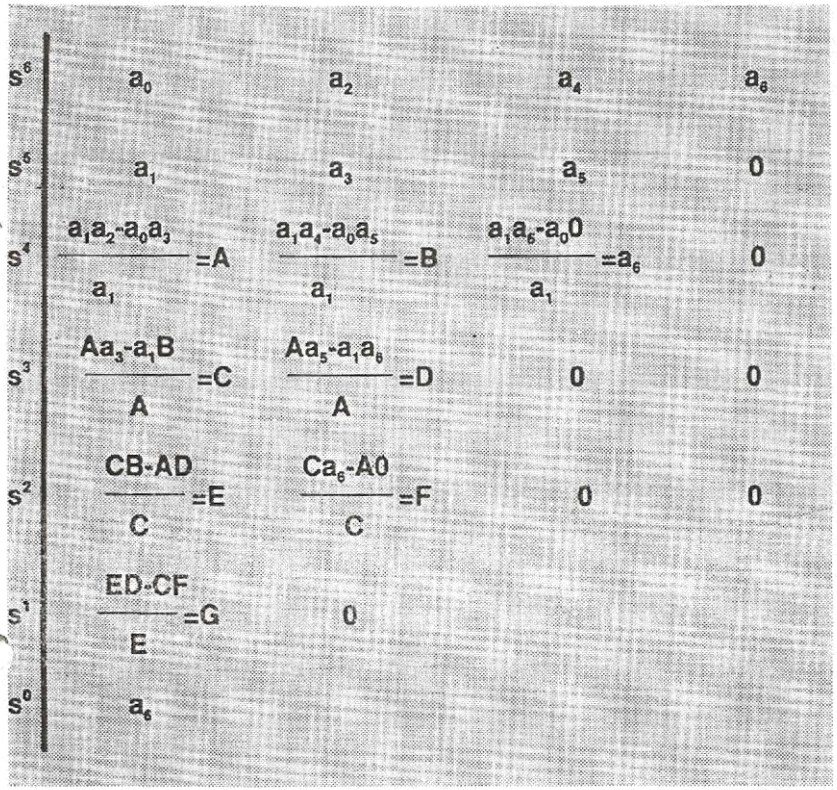
$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

TABLA DE ROUTH

$$F(s) = a_0 s^6 + a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s + a_6$$



- Raíces en el semiplano izquierdo: todos los elementos de la primera columna delmismo signo.
- El numero de cambios de signo indica el numero de raíces con parte real positiva.

Ejemplo:

$$F(s) = s^5 + s^4 + 10s^3 + 72s^2 + 152s + 240$$

Tabla de Routh:

s^5	1	10	152
s^4	1	72	240
s^3	-62	-88	
s^2	70,6	240	
s^1	122,6		
s^0	240		

•Como hay dos cambios de signo, F(s) tiene dos raíces en el semiplano positivo.

PROPIEDADES:

1. Los coeficientes de una fila pueden multiplicarse o dividirse entre un numero positivo.

Ejemplo: $F(s) = s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 9s^3 + 5s^2 + 12s + 20$

s^6	1	2	5	20
s^5	3	9	12	
	1	3	4	(al dividir por 3)
s^4	-1	1	20	
s^3	4	24		
	1	6		(al dividir por 4)
s^2	7	20		
s^1	22/7			
s^0	20			

✓Hay dos cambios se signo: **Inestable**

2. Coeficiente cero en la primera columna

$$F(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 15 = 0$$

s^5	1	2	3
s^4	1	2	15
s^3	0	-12	
s^2			

Haciendo: $s = \frac{1}{x}$ ➡ $(1/x)^5 + (1/x)^4 + 2(1/x)^3 + 2(1/x)^2 + 3(1/x)^1 + 15 = 0$

$$15x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

x^5	15	2	1
x^4	3	2	1
x^3	-8	-4	
x^2	0,5	1	
x^1	12		
x^0	1		

3. Fila de ceros:

$$F(s) = s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18 = 0$$

s^4	1	11	18
s^3	2	18	0
	1	9	(al dividir por 2)
s^2	2	18	
	1	9	(al dividir por 2)
s^1	0	0	

- Formar la ecuación auxiliar con los coeficientes de la fila anterior

$$s^2 + 9 = 0$$

- Derivar la ecuación auxiliar

$$2s + 0$$

- Completar la tabla

s^1	2	0
s^0	9	