Estadística

Tema 2. Modelos de regresión

María Dolores Frías Domínguez
Jesús Fernández Fernández
Carmen María Sordo

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

TEMA 2: Modelos de regresión

Datos bidimensionales

- Gráficos, estadísticos bidimensionales

Método de mínimos cuadrados

- Regresión lineal simple
- Regresión lineal múltiple
- Regresión no lineal
- Idoneidad del modelo
- Medidas de la calidad del ajuste

Datos bidimensionales

Los métodos vistos hasta ahora solo permiten trabajar con datos unidimensionales.
Si se analizan las variables por separado se pierde información sobre la distribución de frecuencias conjunta.

Las **variables bidimensionales** surgen cuando se estudian dos características asociadas a la observación de un fenómeno

En concreto, resultan de tomar una muestra de tamaño *n* de una variable aleatoria bidimensional (X,Y)

$$\{(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)\}$$

Ejemplo

Peso y altura de una muestra de personas

Altura (cm)	160	165	168	170	171	175	175	180	180	182
Peso (kg)	55	58	58	61	67	62	66	74	79	79

Datos bidimensionales

La relación entre dos variables (X, Y) se puede estudiar mediante tablas.

Distribución de frecuencias conjunta y marginales de la altura y el peso de 200 personas.

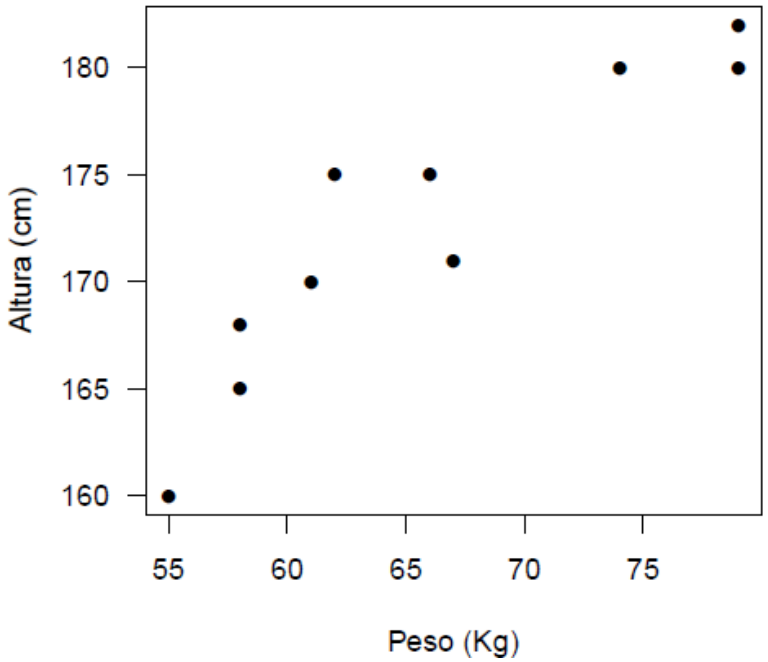
	ALTURA					
PESO	**155-160**	**160-165**	**165-170**	**170-175**	**175-180**	**TOTAL**
50-60	**2**	**11**	**2**	**0**	**0**	15
60-70	**3**	**43**	**95**	**24**	**1**	166
70-80	**0**	**0**	**5**	**12**	**2**	19
TOTAL	5	54	102	36	3	**200**

También se puede expresar la tabla en función de las frecuencias relativas, sin más que dividir entre n.

Diagrama de dispersión

La forma más sencilla de representar gráficamente datos bidimensionales es mediante los diagramas de dispersión, que representa los pares de datos de la muestra sobre unos ejes cartesianos.

Ejemplo

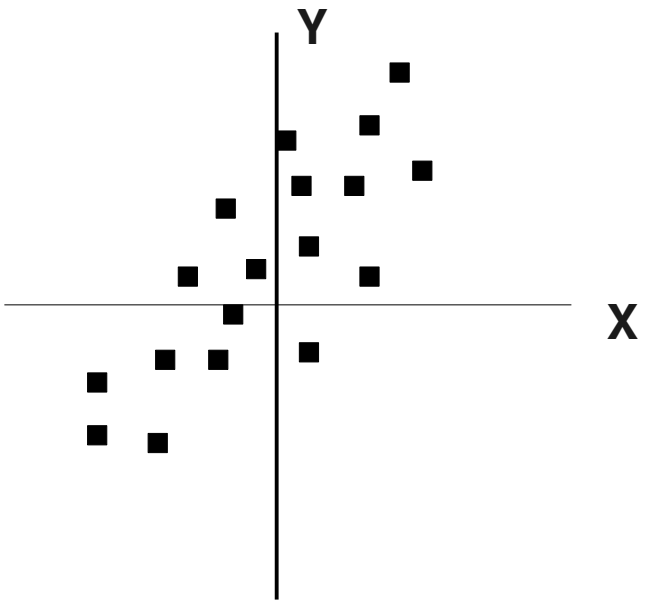


Se observa que cuando la altura aumenta el peso aumenta.

Existe una relación lineal directa entre las variables.

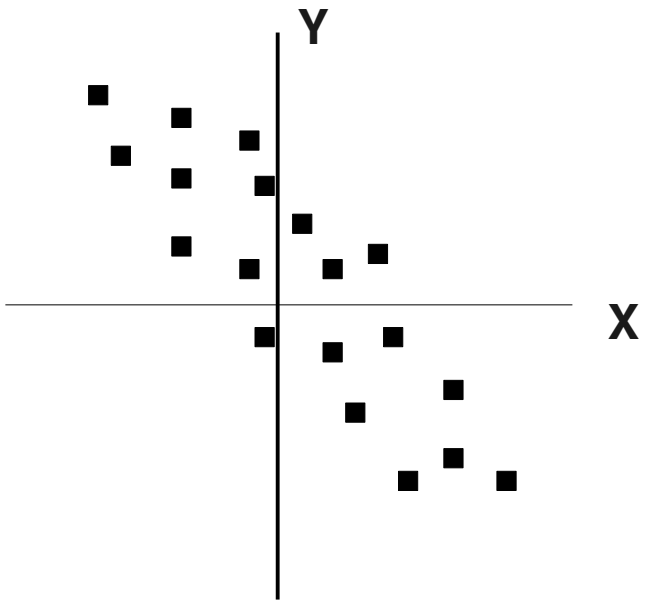
Diagrama de dispersión

La forma más sencilla de representar gráficamente datos bidimensionales es mediante los diagramas de dispersión,que representa los pares de datos de la muestra sobre unos ejes cartesianos.



Cuando X crece Y crece: relación lineal directa.

Casi todos los puntos pertenecen al primer y tercer cuadrante



Cuando X crece Y decrece: relación lineal inversa.

Casi todos los puntos pertenecen al segundo y cuarto cuadrante.

Correlación lineal

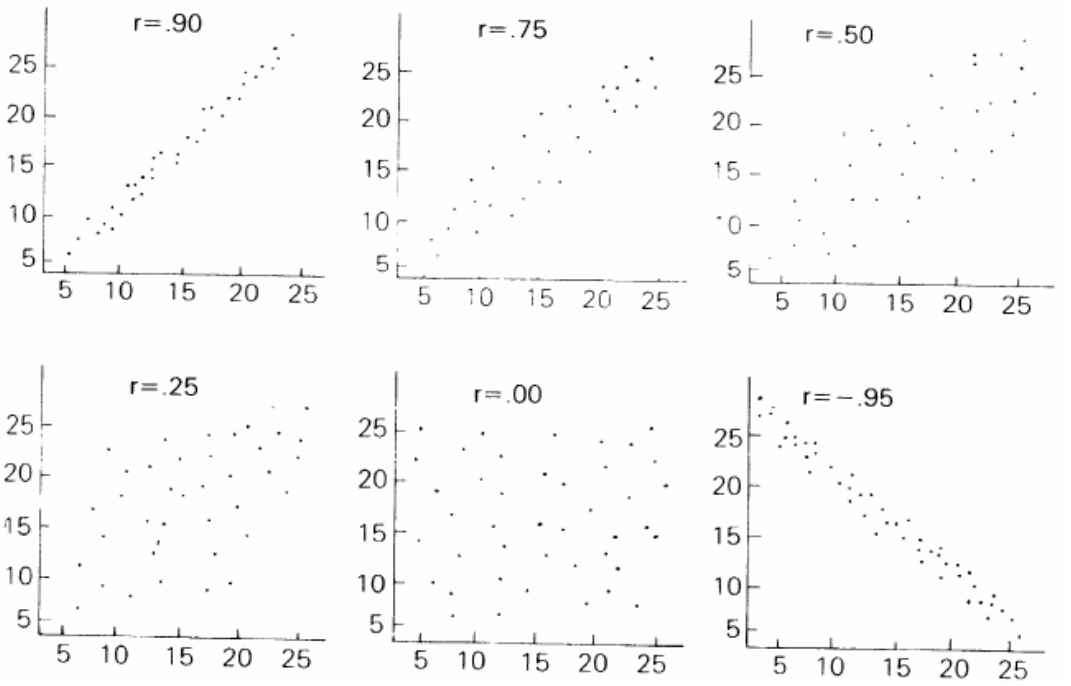
Es posible estimar la relación lineal entre los datos tomados de dos variables mediante el coeficiente de correlación:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{S_n(x)S_n(y)} = \frac{S_n(x,y)}{S_n(x)S_n(y)}$$

donde $S_n(x,y)$ es la covarianza muestral.

Toma valores entre 1 (dependencia directa) y -1 (dependencia inversa).

Si se acerca a 0 la dependencia lineal es débil.



María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

Ejercicio

En una ciudad se quiere hacer un estudio sobre la utilización de una determinada línea urbana de autobús. Para ello se midieron en una misma parada 31 valores de intervalos de tiempo, en minutos, que transcurren entre las sucesivas llegadas de autobuses de dicha línea (X) y el número de viajeros que suben a él (Y), resultando los siguientes valores:

$$\Sigma_i\, x_i = 290 \qquad \Sigma_i\, x_i^2 = 2848 \qquad \Sigma_i\, x_i y_i = 2995$$

$$\Sigma_i\, y_i = 315 \qquad \Sigma_i\, y_i^2 = 3981$$

c) Estudie la relación entre X e Y mediante el coeficiente de correlación.

Regresión

En la práctica surge con frecuencia la necesidad de tener que relacionar un conjunto de variables a través de una ecuación (ej, el peso de unas personas con su altura).

La **regresión** es una técnica estadística que permite construir modelos que representan la dependencia entre variables o hacer predicciones de una variable Y en función de las observaciones de otras (X_1, ..., X_p).

$$y = f(x_1, \cdots, x_p) + \epsilon$$

Y es la variable respuesta o dependiente

X_1, ..., X_p son las variables predictoras, dependientes o covariables

ϵ es el término de error que se supone con media cero y varianza constante.

Regresión

Las ecuaciones más comunes que se utilizan para expresar estas relaciones son:

Lineal

$$Y = a + bX + \epsilon$$

Cuadrática

$$Y = a + bX + cX^2 + \epsilon$$

Polinómica

$$Y = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p + \epsilon$$

Logarítmica

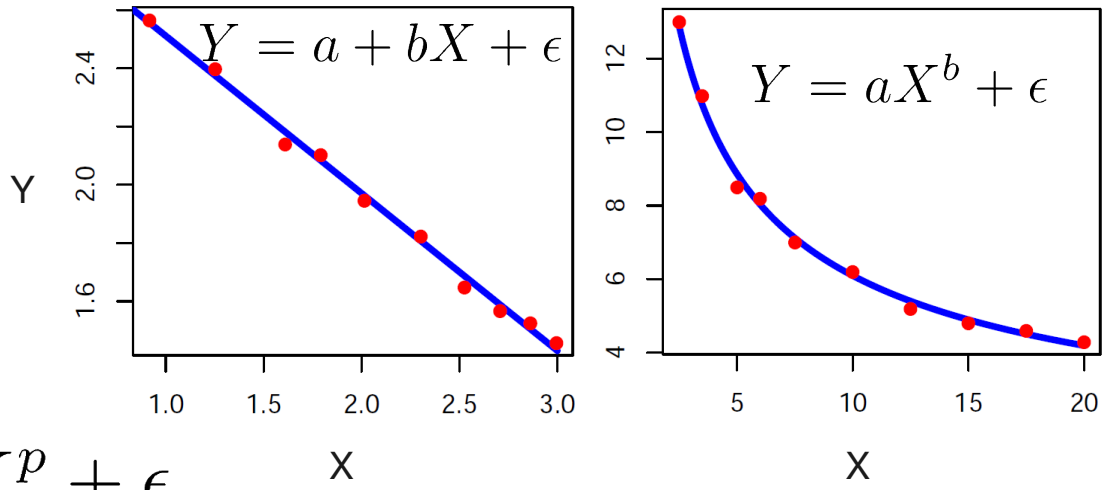
$$Y = a + b\, lnX + \epsilon$$

Exponencial

$$Y = a\, e^{bX} + \epsilon$$

Potencial

$$Y = aX^b + \epsilon$$



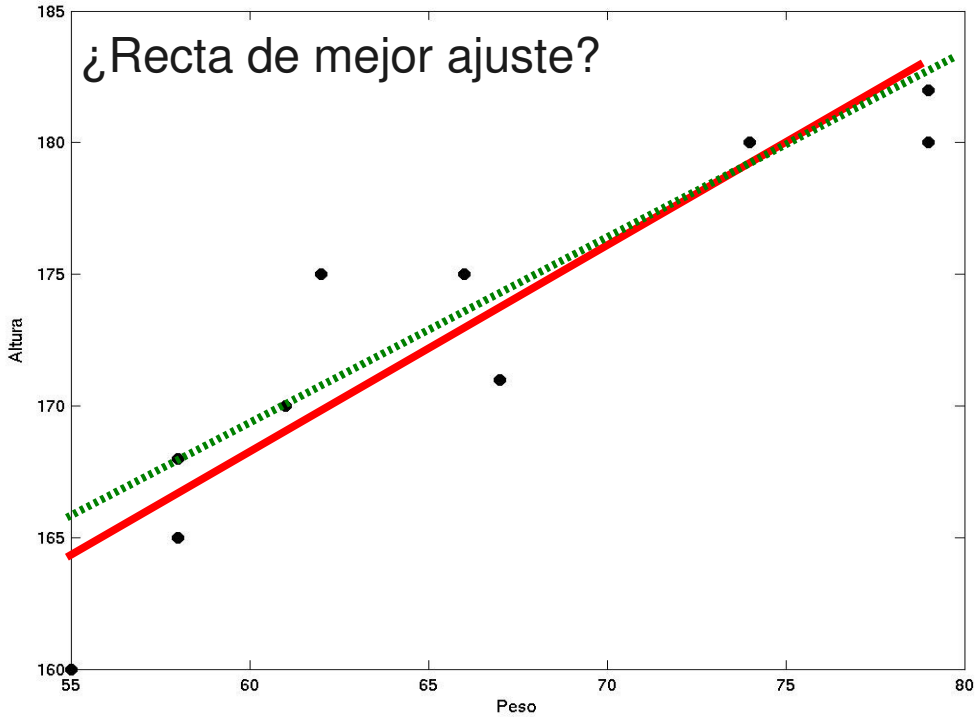
El diagrama de dispersión puede servir de gran ayuda a la hora de determinar la relación entre las variables.

Nos centraremos en los modelos de regresión lineales (en los parámetros).

Regresión lineal

Una vez seleccionado el modelo (lineal en nuestro caso) a ajustar a partir de las observaciones de una muestra se está interesado en estimar los parámetros de dicho modelo (β_i).

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p + \epsilon$$



Uno de los métodos más comunes es el de mínimos cuadrados que consiste en ajustar los parámetros del modelo de manera que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima.

Regresión lineal simple por mín. c.

En el caso más sencillo, regresión lineal simple, la ecuación

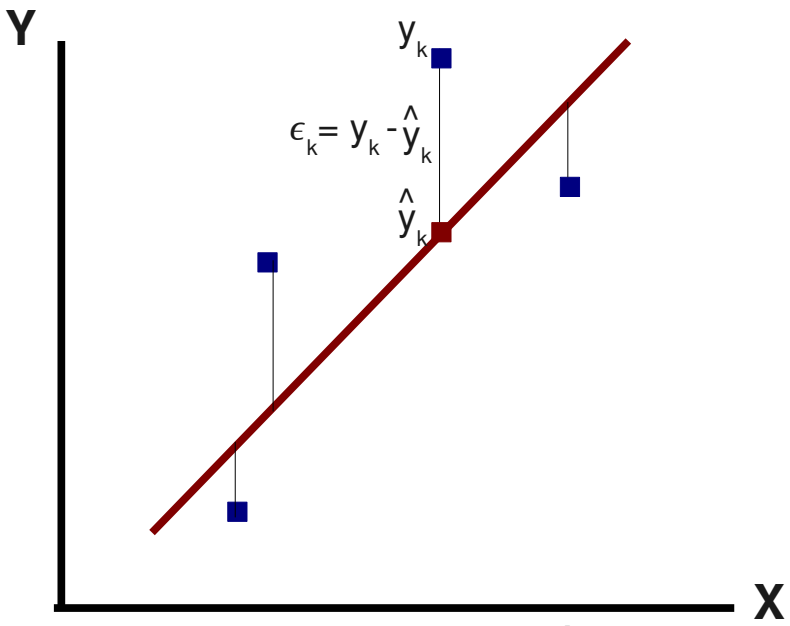
$$\hat{y} = a + bx$$

nos da una estimación de y, siendo el error que se comete,

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k$$

En este caso a y b se eligen de manera que,

$$E^2 = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \widehat{y}_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k - a - bx_k)^2$$



sea mínimo $\rightarrow$ $\dfrac{\partial E^2}{\partial a} = \dfrac{\partial E^2}{\partial b} = 0$

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n} - b\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

$$b = \frac{n\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k - \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} y_k}{n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} = \frac{S_n(x,y)}{S_n^2(x)}$$

Ejercicio

En una ciudad se quiere hacer un estudio sobre la utilización de una determinada línea urbana de autobús. Para ello se midieron en una misma parada 31 valores de intervalos de tiempo, en minutos, que transcurren entre las sucesivas llegadas de autobuses de dicha línea (X) y el número de viajeros que suben a él (Y), resultando los siguientes valores:

$$\Sigma_i\, x_i = 290 \qquad \Sigma_i\, x_i^2 = 2848 \qquad \Sigma_i\, x_i y_i = 2995$$

$$\Sigma_i\, y_i = 315 \qquad \Sigma_i\, y_i^2 = 3981$$

d) Calcule la recta de regresión lineal del número de viajeros respecto al tiempo.

e) Estime, con la recta hallada, el número de viajeros que suben al autobús cuando el intervalo de tiempo entre autobuses es de 5 minutos.

Regresión lineal

Esta formulación se extiende al caso de la regresión lineal múltiple $$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p + \epsilon$$

en la que se observa una muestra (y_k, x_{1k},...,x_{pk}) con k=1,...,n y se está interesado en estimar los parámetros del modelo.

Ej, estudios sobre el efecto de diversas condiciones climáticas (temperatura, humedad, radiación...) sobre la resistencia de un metal a la corrosión.

El modelo lineal se puede expresar en forma matricial de la forma:

$$Y = X\beta + \epsilon$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{p1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \cdots & x_{pn} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

n x 1 | n x (p+1) | (p+1) x 1 | n x 1

Regresión lineal

Aplicando el método de mínimos cuadrados para obtener los parámetros del modelo debemos minimizar:

$$E^2 = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} [y_k - (\beta_0 + \beta_1 x_{1k} + \cdots + \beta_p x_{pk})]^2 = \epsilon^T \epsilon$$

$$\begin{aligned} \epsilon^T \epsilon &= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \\ &= Y^T Y - \beta^T X^T Y - Y^T X \beta + \beta^T X^T X \beta \\ &= Y^T Y - 2\beta^T X^T Y + \beta^T X^T X \beta \end{aligned}$$

derivando con respecto a β e igualando la expresión resultante a cero se obtienen las ecuaciones normales:

$$(X^T X)\beta = X^T Y$$

que se reducirían a las ecuaciones normales obtenidas antes para el caso de la regresión lineal simple.

Ejemplo

Utilice la regresión lineal múltiple para ajustar los siguientes datos:

y	x_1	x_2
5	0	0
10	2	1
9	2.5	2
0	1	3
3	4	6
27	7	2

Modelo: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \epsilon$

RSS:

$$E^2 = \sum_{k=1}^{n} \epsilon^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \beta_0 - \beta_1 x_{1k} - \beta_2 x_{2k})^2$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{k=1}^{n} (y_k - \beta_0 - \beta_1 x_{1k} - \beta_2 x_{2k}) = 0$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{k=1}^{n} x_{1k} (y_k - \beta_0 - \beta_1 x_{1k} - \beta_2 x_{2k}) = 0$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial \beta_2} = -2 \sum_{k=1}^{n} x_{2k} (y_k - \beta_0 - \beta_1 x_{1k} - \beta_2 x_{2k}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_{1k} & \sum x_{2k} \\ \sum x_{1k} & \sum x_{1k}^2 & \sum x_{1k} x_{2k} \\ \sum x_{2k} & \sum x_{1k} x_{2k} & \sum x_{2k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_k \\ \sum x_{1k} y_k \\ \sum x_{2k} y_k \end{pmatrix}$$

Ejemplo

y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
5	0	0	0	0	0	0	0
10	2	1	4	1	2	20	10
9	2.5	2	6.25	4	5	22.5	18
0	1	3	1	9	3	0	0
3	4	6	16	36	24	12	18
27	7	2	49	4	14	189	54
54	16.5	14	76.25	54	48	243.5	100

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2.5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_{1k} & \sum x_{2k} \\ \sum x_{1k} & \sum x_{1k}^2 & \sum x_{1k}x_{2k} \\ \sum x_{2k} & \sum x_{1k}x_{2k} & \sum x_{2k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_k \\ \sum x_{1k}y_k \\ \sum x_{2k}y_k \end{pmatrix}$$

Ejemplo

y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
5	0	0	0	0	0	0	0
10	2	1	4	1	2	20	10
9	2.5	2	6.25	4	5	22.5	18
0	1	3	1	9	3	0	0
3	4	6	16	36	24	12	18
27	7	2	49	4	14	189	54
54	16.5	14	76.25	54	48	243.5	100

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2.5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 9 \\ 0 \\ 3 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$X^TX\beta = X^TY \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\beta_0 = 5 \quad \beta_1 = 4 \quad \beta_2 = -3$$

Ejercicio

En un estudio se han recogido los siguientes valores de los ingresos totales de 40 familias frente a los gastos fijos por mes en euros:

Gastos \ Ingresos	300-600	600-840	840-1100	1100-1350	1350-1700
35-70	2				
70-110	1	3	5		
110-150			8	10	
150-180				6	2
180-300					3

Calcular:

a) la recta de regresión mínimo cuadrática de los gastos fijos sobre los ingresos.

b) el coeficiente de correlación lineal.

c) con la recta calculada estime, los gastos fijos de una familia cuyos ingresos son de 200 euros.

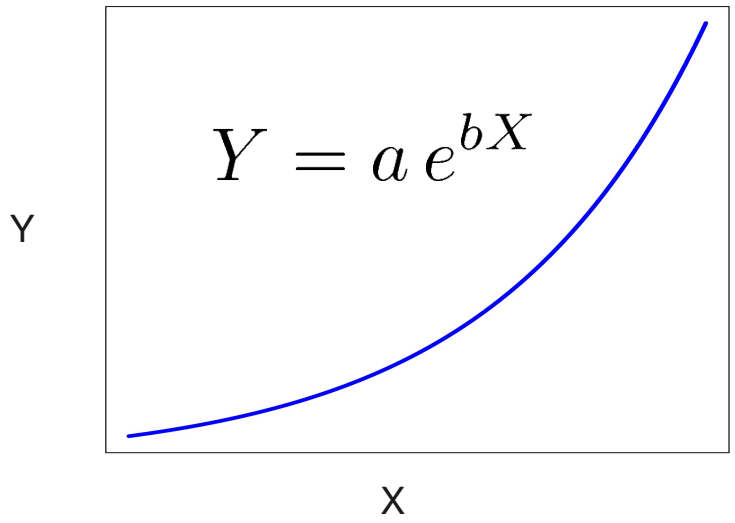
Modelos no lineales

El método de mínimos cuadrados permite obtener la mejor recta de ajuste a los datos en el caso de la regresión lineal.

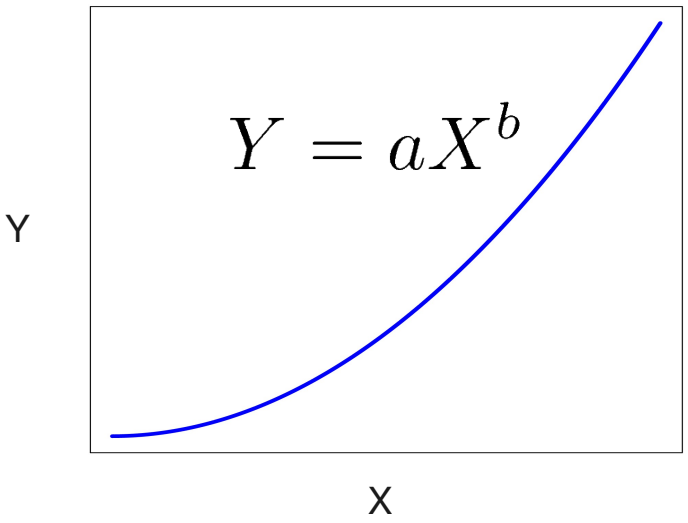
Sin embargo, no siempre existe una relación lineal entre la variable dependiente e independiente y muchos modelos no son lineales en los parámetros, impidiendo el uso del método de mínimos cuadrados..

En algunos casos es posible aplicar transformaciones para expresar los datos en una forma compatible con la regresión lineal. Este es el caso del modelo exponencial y de potencias.

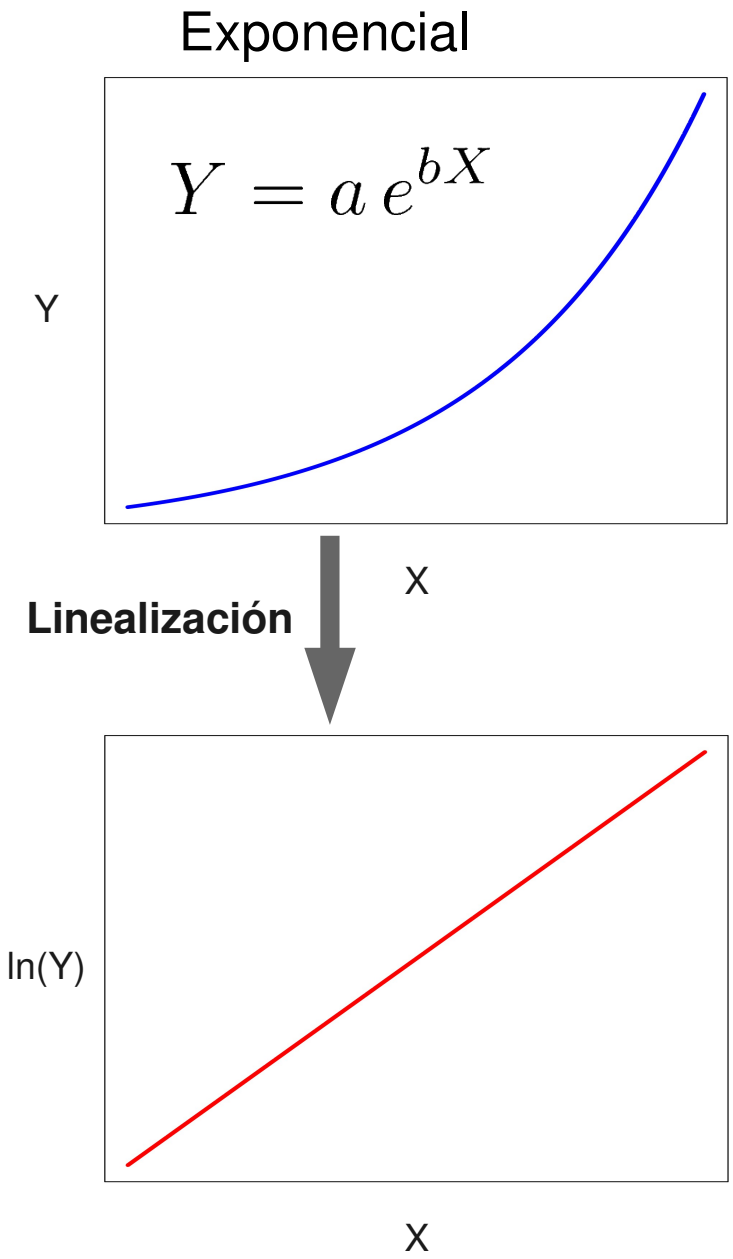
Exponencial



Potencial



Modelos no lineales



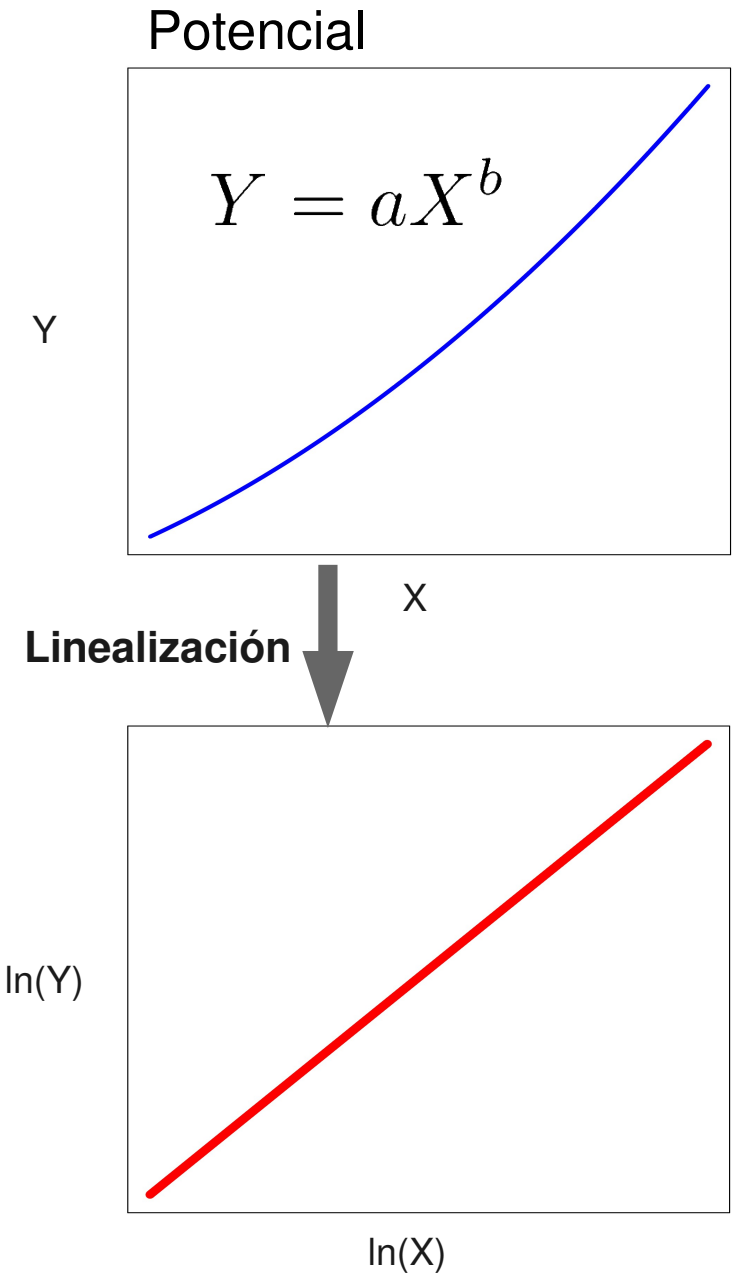
El modelo exponencial se linealiza al aplicar el logaritmo natural:

$$\begin{aligned} ln(Y) &= ln(a\,e^{bX}) \\ &= ln(a) + ln(e^{bX}) \\ &= ln(a) + bX \end{aligned}$$

donde si representamos el ln(Y) frente a X obtendremos una recta con pendiente b y corte con el eje de ordenadas ln(a).

María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

Modelos no lineales



El modelo potencial se linealiza al aplicar el logaritmo natural:

$$\begin{aligned} ln(Y) &= ln(a\,X^b) \\ &= ln(a) + ln(X^b) \\ &= ln(a) + b\;ln(X) \end{aligned}$$

donde si representamos el ln(Y) frente a ln(X) obtendremos una recta con pendiente b y corte con el eje de ordenadas ln(a).

Modelos no lineales

Ejemplo

Ajuste los datos siguientes con el modelo de potencias y aplique una transformación logarítmica para estimar los parámetros de dicho modelo. Use la ecuación resultante para hacer el pronóstico para x=9

x	2.5	3.5	5	6	7.5	10	12.5	15	17.5	20
y	13	11	8.5	8.2	7	6.2	5.2	4.8	4.6	4.3

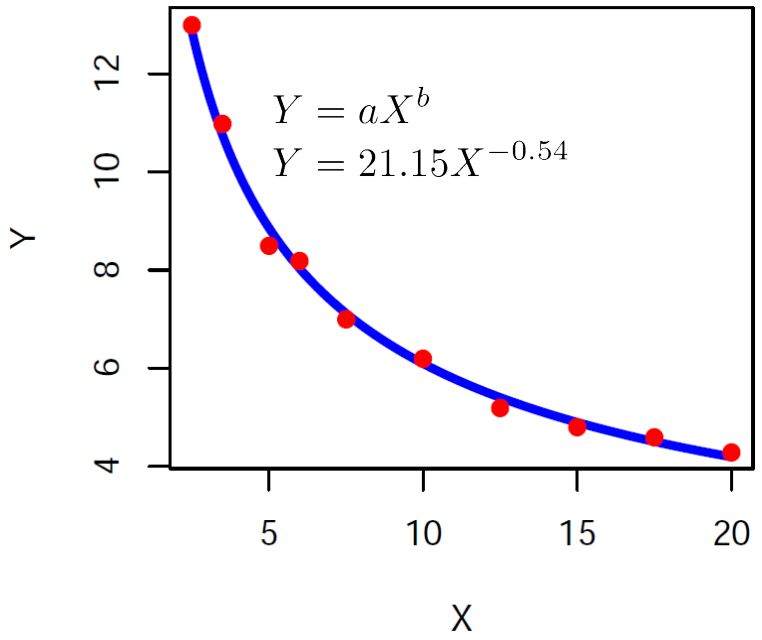
Modelos no lineales

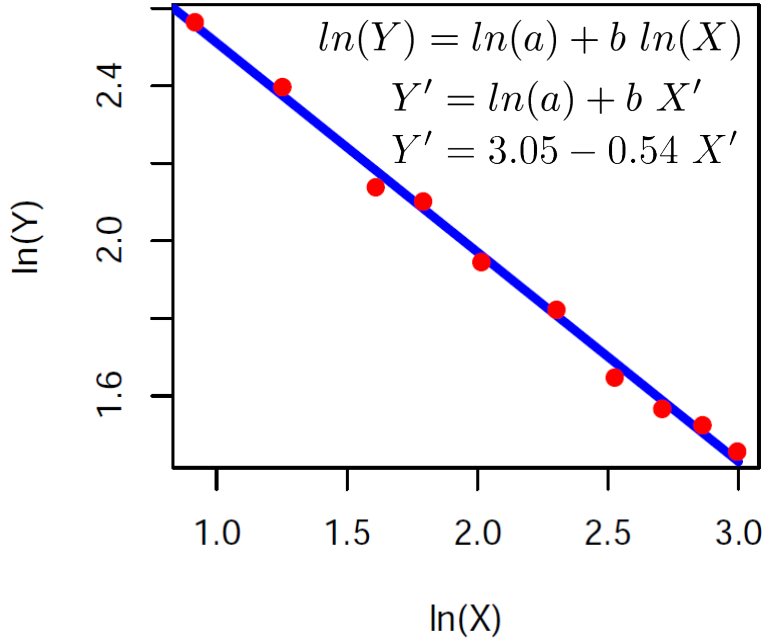
Ejemplo

Ajuste los datos siguientes con el modelo de potencias y aplique una transformación logarítmica para estimar los parámetros de dicho modelo. Use la ecuación resultante para hacer el pronóstico para x=9

x	2.5	3.5	5	6	7.5	10	12.5	15	17.5	20
y	13	11	8.5	8.2	7	6.2	5.2	4.8	4.6	4.3

ln(x)	ln(y)
0.92	2.56
1.25	2.40
1.61	2.14
1.79	2.10
2.01	1.95
2.30	1.82
2.53	1.65
2.71	1.57
2.86	1.53
3.00	1.46





$$ln(a) = \overline{y'} - b\overline{x'} = 3.05 \longrightarrow a = e^{1.33} = 21.15$$

$$b = \frac{\overline{x'y'} - \bar{x}'\bar{y}'}{S_n^2(x')} = -0.54$$

Para x=9:

$$y = 21.15 \cdot 9^{-0.54} = 6.46$$

María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

Modelos no lineales

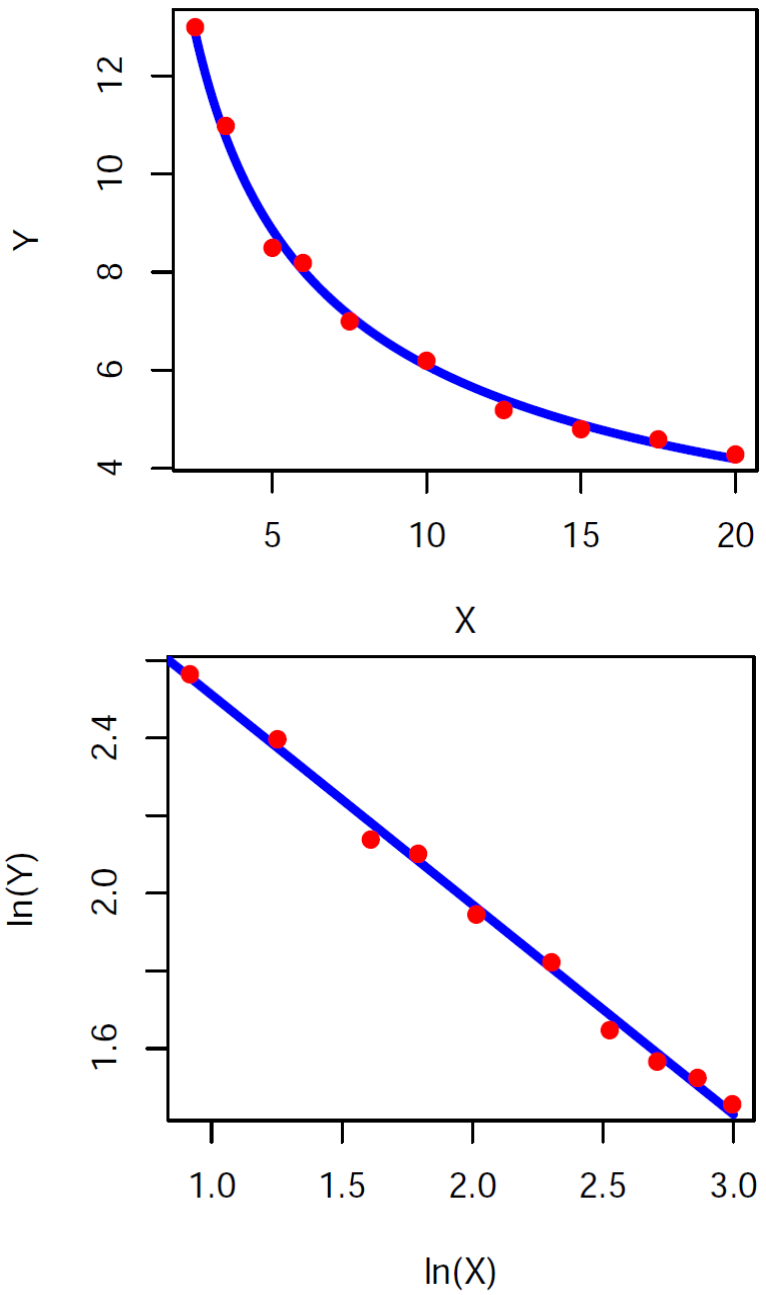
R tip

```
# Definición de variables
v1 <- c(2.5, 3.5, 5, 6, 7.5, 10, 12.5, 15, 17.5, 20)
v2 <- c(13, 11, 8.5, 8.2, 7, 6.2, 5.2, 4.8, 4.6, 4.3)
x <- log(v1)
y <- log(v2)

# Calculo regresión lineal
fit <- lm(y~x)
a <- fit$coeff[1]
b <- fit$coeff[2]

# Funcion potencial y recta
fx <- function(x,a,b) exp(a) * x^b
fxrecta <- function(x,a,b) a+b*x

# Plots
pdf("figura.pdf", width=7, height=3)
  par(mfrow=c(1,2), mar=c(4,4,1,1))
  plot(v1,v2, xlab="v1", ylab="v2", type="n")
    curve(fx(x,a,b), col="blue",lwd=4,add=TRUE)
    points(v1,v2, pch=19, col="red")
  plot(x,y, xlab="log(v1)", ylab="log(v2)", type="n")
    curve(fxrecta(x,a,b), col="blue",lwd=4,add=TRUE)
    points(x,y , pch=19, col="red")
dev.off()
```



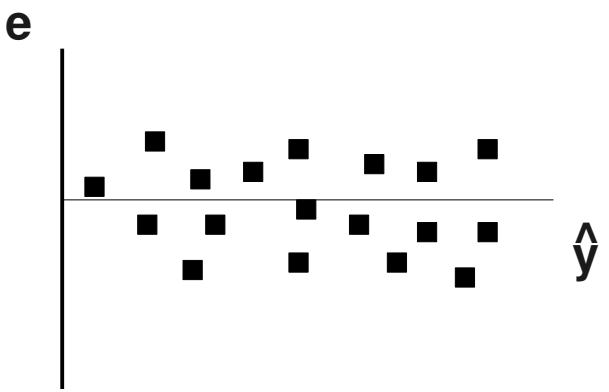
María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

Medidas de la idoneidad del modelo

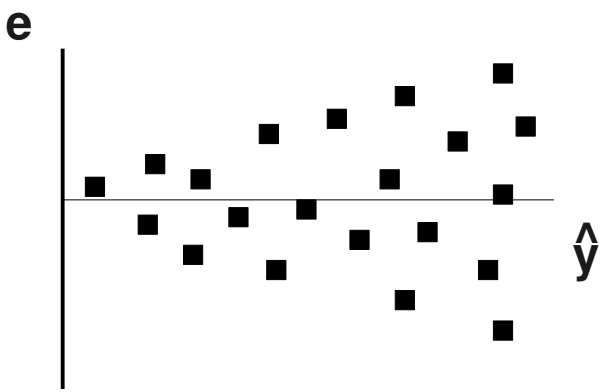
Toda la información sobre la falta de ajuste del modelo está contenida en los residuos.

Un diagrama de los residuos frente a los valores predichos nos sirve para detectar posibles desviaciones de las hipótesis de partida: valor medio cero y varianza constante.

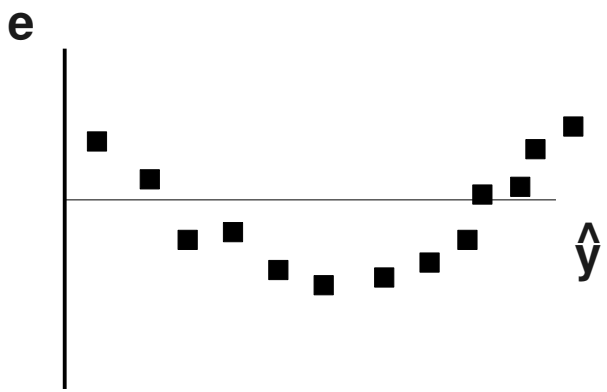
Errores típicos cuando el modelo no es el adecuado:



Caso ideal: media cero y varianza constante



Varianza no constante



Dependencia sistemática

También se recomienda pintar los residuos frente a la variable independiente para detectar posibles tendencias.

Medidas de la calidad de ajuste

Es posible cuantificar la bondad del ajuste realizado en la regresión lineal simple al aplicar el método de mínimos cuadrados mediante las siguientes magnitudes:

Error estandar de la estimación, S_e: $$S_e = \sqrt{\frac{E^2}{n-2}}$$

Cuantifica la dispersión de los datos alrededor de la línea de regresión.

Se divide entre n-2 ya que se usaron dos datos estimados (β_0 y β_1) para calcular E^2.

Coeficiente de correlación, r: $$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{S_n(x)S_n(y)} = \frac{S_n(x,y)}{S_n(x)S_n(y)}$$

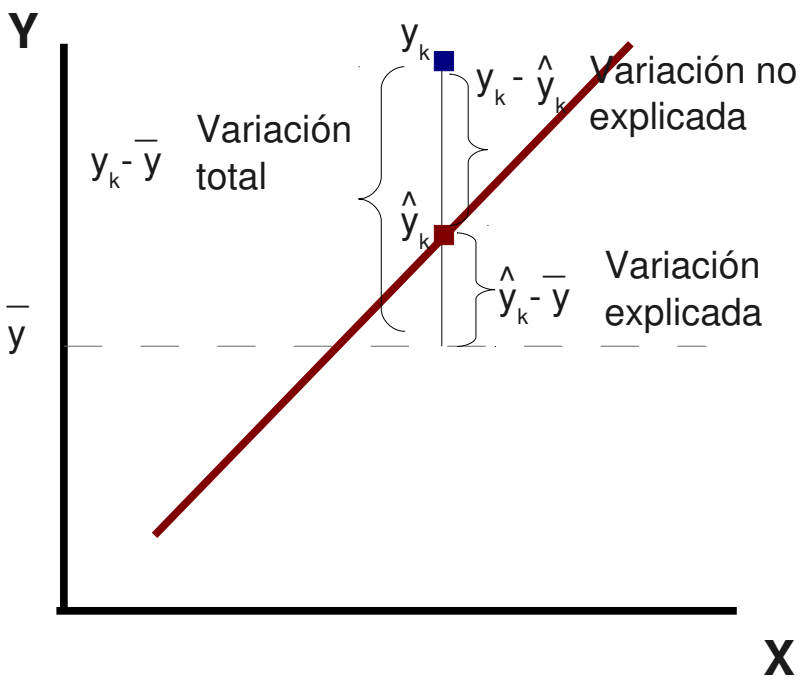
Cuantifica la relación lineal entre dos variables.

Medidas de la calidad de ajuste

Es posible cuantificar la bondad del ajuste realizado en la regresión lineal simple al aplicar el método de mínimos cuadrados mediante las siguientes magnitudes:

Coeficiente de determinación, r^2:

Medida de la bondad del ajuste lineal. Indica la fracción de variación explicada por la recta de regresión respecto a la variación total.



$$r^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\hat{y}_k - \overline{y})^2}{\sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y})^2} = \frac{S^2_{\hat{y}}}{S^2_y} = \frac{S^2_y - \frac{E^2}{n}}{S^2_y}$$

Toma valores entre 0 y 1.

Cuanto más próximo a 1 mejor será el ajuste lineal y cuanto más proximo a 0 peor.

Coincide con el cuadrado del coeficiente de correlación.

Ejercicio

Un ciclista se desplaza en línea recta con un movimiento uniforme para el cual según las leyes de la mecánica su posición x en un instante t vendrá dada por la ecuación $x = x_0 + vt$ donde x_0 es la posición inicial y v la velocidad.
Se han tomado los siguientes valores de su posición x en metros y el tiempo t en segundos:

x (metros)	14	26.2	37.7	51	61.8	76	84.2
t (segundos)	2	4	6	8	10	12	14

A partir de estos datos estimar:

a) el coeficiente de correlación

b) los valores de la posición inicial y la velocidad del ciclista por medio de una regresión lineal.

c) el espacio recorrido por el ciclista transcurridos 9 segundos.

d) el error estandar de la estimación y la fracción de varianza explicada por el modelo.