

Estadística

Tema 4. Distribuciones comunes



María Dolores Frías Domínguez
Jesús Fernández Fernández
Carmen María Sordo

Departamento de Matemática Aplicada y
Ciencias de la Computación

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

TEMA 4: Distribuciones comunes

Introducción

Distribuciones discretas comunes

- Suceso de Bernoulli
- Múltiples sucesos de Bernoulli
 - Binomial $B(n,p)$, Geométrica $G(p)$, Binomial negativa $BN(r,p)$
- Muestreo sin reemplazamiento. Hipergeométrica $HG(N,D,n)$
- Sucesos de Poisson

Distribuciones continuas comunes

- Tiempo entre sucesos de Poisson. Exponencial y Gamma
- Distribución uniforme
- La distribución normal: aproximación de distribuciones discretas mediante la normal.

Un experimento aleatorio tiene asociada una distribución de probabilidad arbitraria.

Existen numerosos problemas reales con características similares que tienen asociados una misma distribución de probabilidad común a todos ellos (salvo quizá algún parámetro para adecuarla al problema concreto).

Cambio de notación:

- Tema 3: X
- A partir de ahora, algunas X tendrán nombre.
e.g: $B(n,p)$ $G(p)$

$$p_X(x) \longrightarrow p_{B(n,p)}(x) \equiv p_B(x; n, p)$$

Veremos una serie de distribuciones de probabilidad con nombre propio. Para cada una de ellas veremos:

- Motivación práctica / condiciones para su uso
- Valores posibles de la v.a. y de sus parámetros
- Función de probabilidad (discr.) o densidad (cont.)
- Función de distribución (si se puede escribir de forma sencilla)
- Valor esperado y varianza en función de los parámetros

Suceso de Bernoulli

Es el experimento aleatorio más sencillo en el que sólo son posibles dos resultados:

$x=1$ (éxito) $x=0$ (fracaso).

El éxito se obtiene con probabilidad p .

Ejemplo

Lanzar una moneda al aire y ver si sale cara (éxito). $p=0.5$

Experimentos con más valores posibles pueden reducirse al de Bernoulli: Lanzar un dado

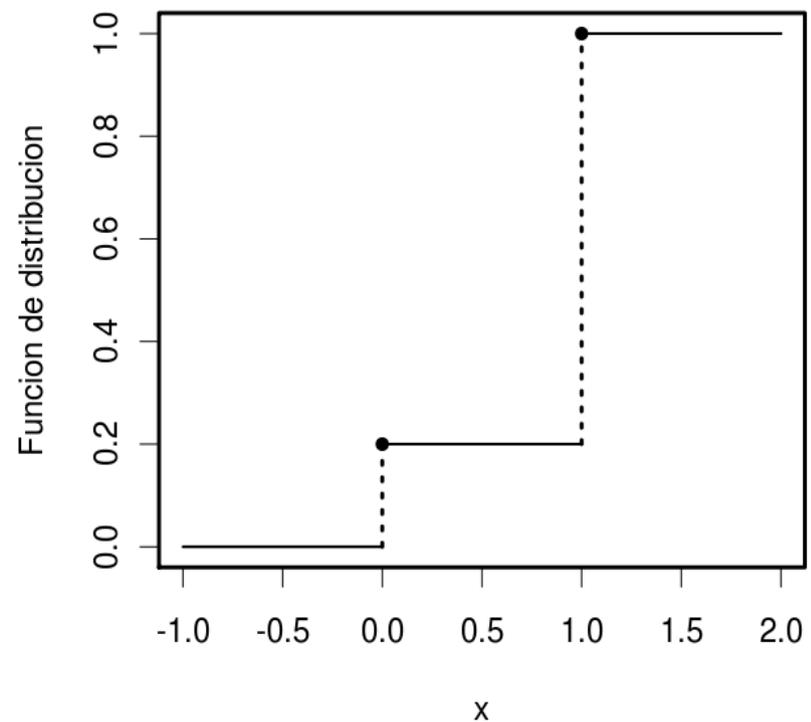
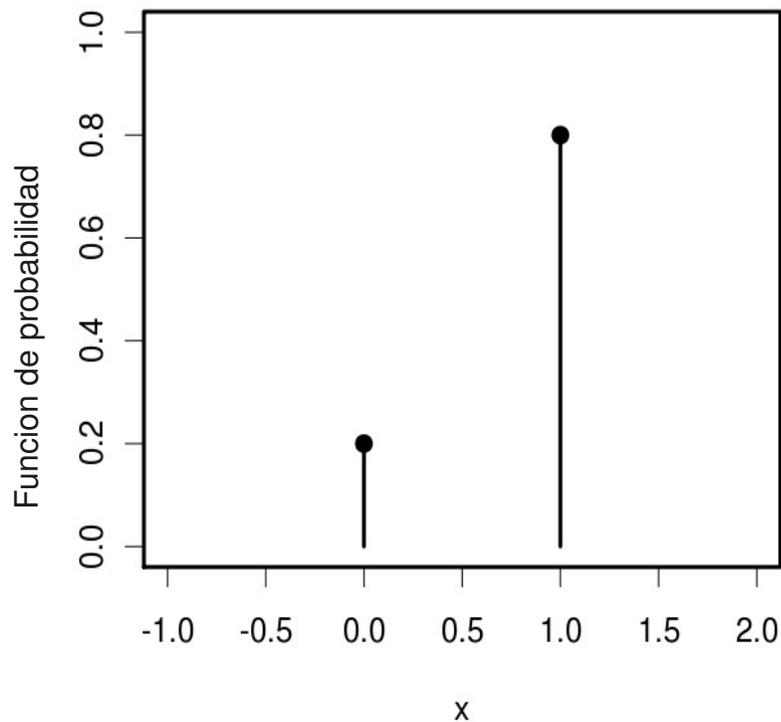
Obtener un 6 (éxito, $p=1/6$) o no (fracaso, $q = 1-p = 5/6$)

$$p_X(x) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases} = p^x (1-p)^{1-x}; \quad x = 0, 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\mu_X = p$$

$$\sigma_X^2 = p(1-p)$$



Binomial $B(n,p)$

Una variable aleatoria X se llama binomial si su valor es igual al número de éxitos que ocurren en n pruebas independientes de Bernoulli teniendo todas la misma probabilidad de éxito p .

- Sucesión de n intentos idénticos.
- En cada intento sólo son posibles dos resultados: éxito o fracaso.
- La probabilidad de éxito (p) es la misma en todos los intentos.
- Los intentos son independientes.

Ejemplo

El número de caras obtenido al lanzar una moneda al aire 20 veces es una variable Binomial de parámetros $B(20, 0.5)$

Una variable aleatoria X se llama binomial si su valor es igual al número de éxitos que ocurren en n pruebas independientes de Bernoulli teniendo todas la misma probabilidad de éxito p .

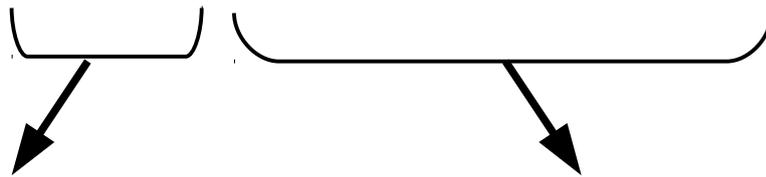
Propiedad reproductiva respecto al parámetro n :

Si $X \sim B(n_1, p)$ e $Y \sim B(n_2, p)$ son variables aleatorias independientes, entonces:

$$X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$$

- Función de probabilidad:

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \dots, n$$



Combinaciones
posibles con x éxitos

Probabilidad de obtener x éxitos

$n!$

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

En la calculadora:
nCr

choose (n, x)

Binomial $B(n,p)$

- Función de probabilidad:

R tip

`dbinom(x, n, p)`

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, \dots, n$$

- Función de distribución:

R tip

`pbinom(x, n, p)`

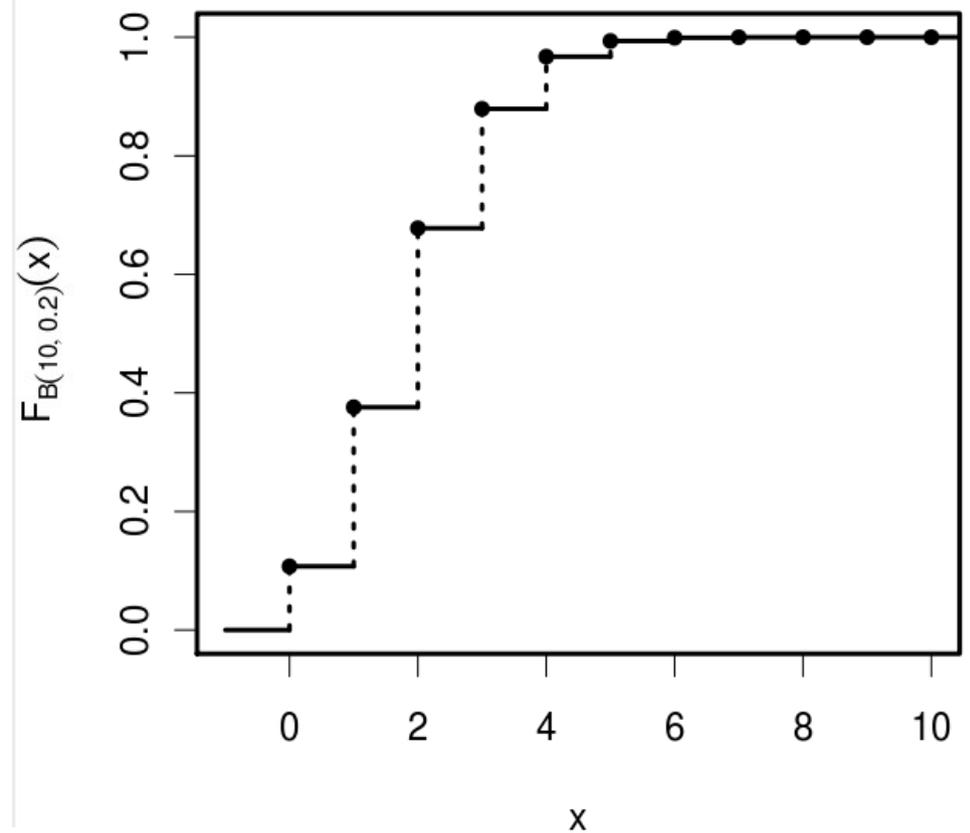
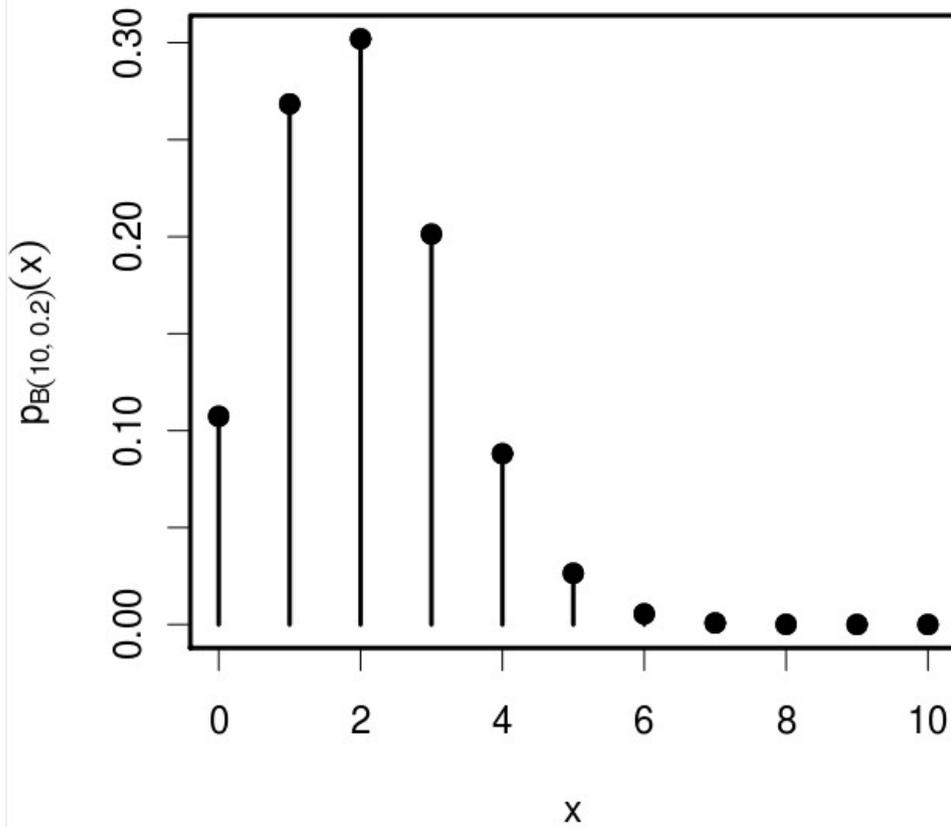
No tiene forma analítica sencilla

Valor esperado

$$\mu = np$$

Varianza

$$\sigma^2 = np(1 - p)$$



R tip

```
> n <- 10; p <- 0.2; x.i <- 0:10
> barplot(dbinom(x.i, n, p), names.arg=x.i)
> curve(pbinom(x, n, p), -1, 10, 1000, ylim=c(0, 1))
```

Geométrica $G(p)$ y Bin Neg $BN(r,p)$

Bajo las mismas condiciones de la distribución binomial (múltiples sucesos de Bernoulli independientes teniendo todos la misma probabilidad de éxito p), se definen las variables aleatorias

- $G(p)$ → **Geométrica o de Pascal**: cuenta el número de intentos hasta que se obtiene el primer éxito.

$$x = 1, 2, 3, \dots$$

- $BN(r, p)$ → **Binomial negativa**: cuenta el número de intentos hasta que se obtiene el r -ésimo éxito.

$$x = r, r+1, r+2, \dots$$

Geométrica $G(p)$ y Bin Neg $BN(r,p)$

Bajo las mismas condiciones de la distribución binomial (múltiples sucesos de Bernoulli independientes teniendo todos la misma probabilidad de éxito p), se definen las variables aleatorias.

- $G(p) \rightarrow$ **Geométrica o de Pascal**
- $BN(r, p) \rightarrow$ **Binomial negativa**

Ejemplo

El número de veces que tengo que lanzar una moneda al aire hasta que obtengo cara por primera vez es una variable aleatoria geométrica $G(0.5)$

El número de veces que tengo que lanzar un dado hasta que me sale un 6 por tercera vez es $BN(3, 1/6)$

Geométrica $G(p)$ y Bin Neg $BN(r,p)$

Variable geométrica:

$$p_{G(p)}(x) = p (1-p)^{x-1}; \quad x = 1, 2, \dots$$

$$\mu_{G(p)} = \frac{1}{p}$$

$$F_{G(p)}(x) = 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor}; \quad x \geq 1$$

$$\sigma_{G(p)}^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

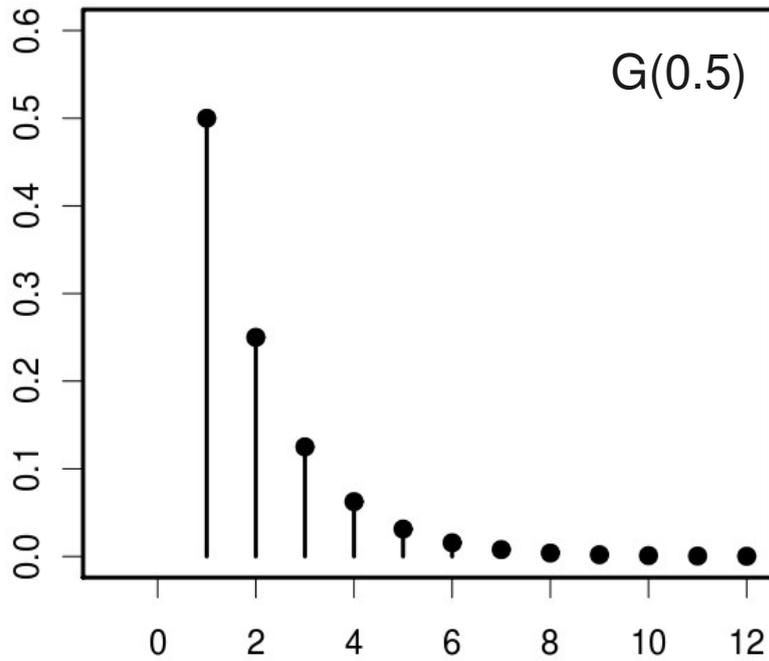
Variable binomial negativa:

$$p_{BN}(x; r, p) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}; \quad x = r, r+1, \dots$$

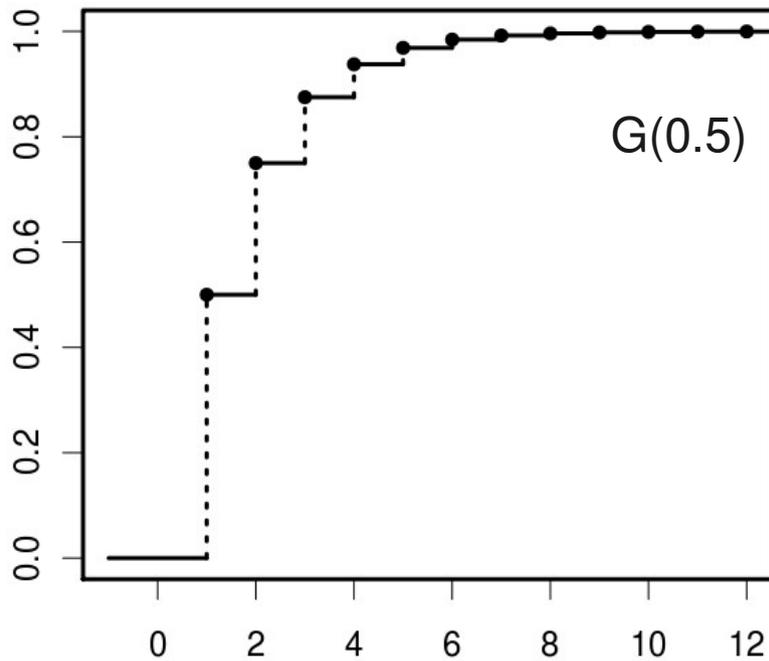
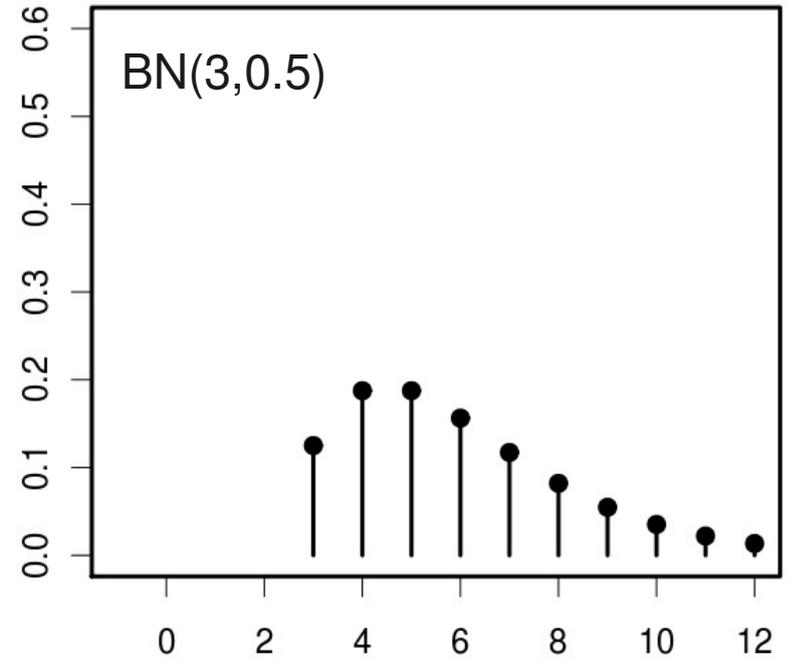
$F_{BN}(x; r, p)$ no tiene forma analítica sencilla

$$G(p) = BN(1, p) \quad \mu_{BN(r,p)} = \frac{r}{p} \quad \sigma_{BN(r,p)}^2 = r \frac{1-p}{p^2}$$

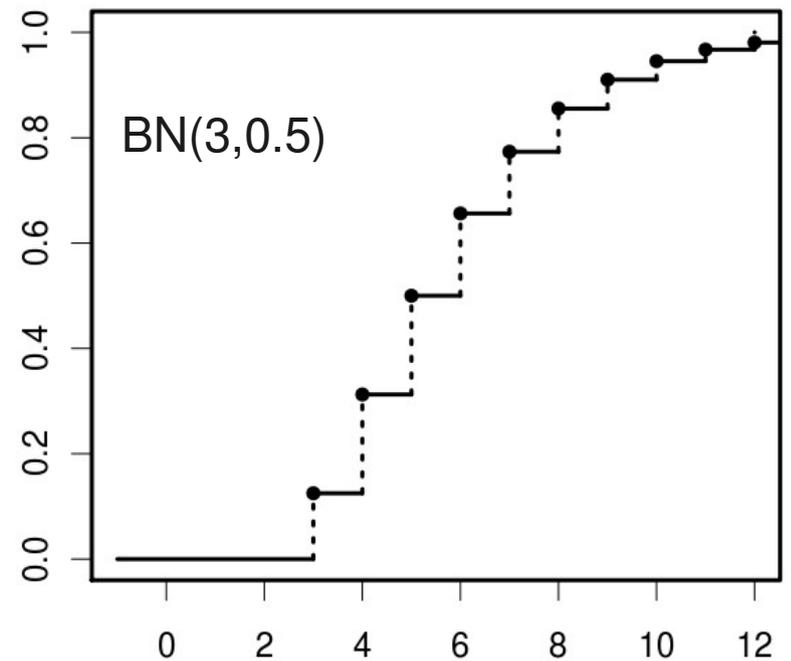
Geométrica $G(p)$ y Bin Neg $BN(r,p)$



$p_x(x)$



$F_x(x)$



Ejercicio

Como parte de un entrenamiento diario en el Real Madrid, cada delantero debe anotar 20 penaltis. Cristiano Ronaldo tiene una tasa de acierto en lanzamientos desde el punto de penalti del 90%. Para este jugador se pide:

- a) Función de probabilidad del número de lanzamientos que tiene que realizar hasta que termina esta parte del entrenamiento.
- b) Función de probabilidad del número de lanzamientos hasta que marca el primer penalti.
- c) Si cada lanzamiento le lleva 30 segundos, ¿Cuál es la función de probabilidad del tiempo que tarda en terminar esta parte del entrenamiento?

Dada una población finita de N elementos, en la que hay D elementos “especiales” (con alguna propiedad que los diferencia del resto), la variable hipergeométrica cuenta el **número de elementos especiales en una muestra sin reemplazamiento de tamaño n tomada de esa población.**

Ejemplo

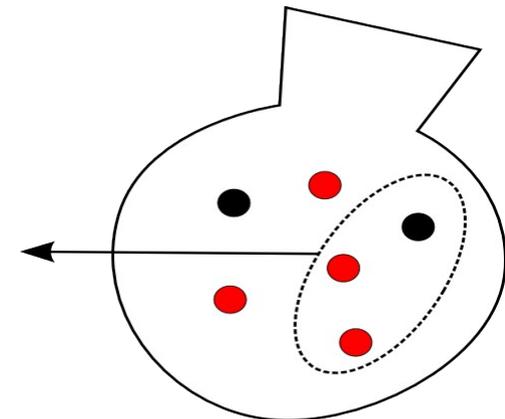
En el experimento de la derecha

$$N = 6$$

$$D = 4$$

$$n = 3$$

$$x = 2$$



$$p_X(x) = \frac{\binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} ; \quad \max(0, n - N + D) \leq x \leq \min(n, D)$$

Si llamamos $p=D/N$, el valor esperado y la varianza resultan:

$$\mu = np \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$$

$N \gg n$

$HG(N, D, n)$



$B(n, D/N)$

Ejercicio

Para las oposiciones de Justicia, los candidatos a oficiales deben estudiar 35 temas. El día del examen, se seleccionan de forma aleatoria 3 temas, de los cuales los candidatos deben desarrollar el que ellos elijan. Dado que disponen de esta última libertad, es práctica habitual no estudiar todos los temas, esperando que sea poco probable que de 3 temas al azar no salga ninguno de los que han decidido estudiar.

- a) Determinar la probabilidad de que no se haya estudiado ningún tema de los 3 que proponen si se han dejado sin estudiar 10 de los 35 temas.

Poisson, $Po(\lambda)$

Una variable aleatoria de Poisson cuenta el número de **ocurrencias de un suceso** (de Poisson) en un **cierto intervalo de tiempo o tramo del espacio**.

Ejemplo

X: “Número de camiones que pasan por un punto de una carretera en una hora”

Y: “Número de peticiones a un servidor web en un día”

Z: “Número de baches en cada kilómetro de una carretera”

$$X, Y, Z \sim Po$$

Un proceso de Poisson homogéneo debe satisfacer:

- El número de ocurrencias del suceso en dos periodos de tiempo (tramos del espacio) no solapados son variables aleatorias independientes.
- La probabilidad de ocurrencia de un número x de sucesos de Poisson en dos intervalos de la misma duración t (o longitud) es la misma.
- La probabilidad de que ocurra un único suceso en un intervalo pequeño Δt es proporcional al tamaño del intervalo:

$$P(X_{\Delta t} = 1) = \alpha \Delta t + O(\Delta t^2)$$

- La probabilidad de que ocurra más de un suceso en un intervalo pequeño Δt es despreciable frente a la anterior.

α es la **tasa de ocurrencia** (unidades: $[\text{tiempo}]^{-1}$ o $[\text{espacio}]^{-1}$)
 y $\lambda = \alpha t$ es el **número medio de ocurrencias** (adimensional)
 en un intervalo de tiempo t fijado en la definición de la v.a.

Poisson, $Po(\lambda)$

$$p_{Po(\lambda)}(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}; \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad \mu_{Po(\lambda)} = \lambda$$

$$F_{Po(\lambda)}(x) \text{ no tiene forma analítica sencilla} \quad \sigma_{Po(\lambda)}^2 = \lambda$$

Propiedad reproductiva respecto a su parámetro:

Si $X \sim Po(\lambda_1)$ e $Y \sim Po(\lambda_2)$ son v.a. independientes

$$X+Y \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$$

Aproximación binomial:

$$p < 0.1 \text{ y } np > 5$$

$$B(n, p) \xrightarrow{\hspace{10em}} Po(np)$$

Ejercicio

Un servidor web recibe un número de peticiones por segundo que sigue una ley de Poisson con parámetro 0.2. Determinar:

- a) La probabilidad de que se reciban dos peticiones en un segundo.
- b) La probabilidad de que se reciban un máximo de 3 peticiones en un segundo.
- c) La probabilidad de que el servidor se colapse si no puede atender más de 4 peticiones por segundo.
- d) La probabilidad de que se reciban 20 peticiones en un minuto.

TEMA 3 . Distribuciones comunes

Introducción

Distribuciones discretas comunes

- Suceso de Bernoulli
- Múltiples sucesos de Bernoulli
 - Binomial $B(n,p)$, Geométrica $G(p)$, Binomial negativa $BN(r,p)$
- Muestreo sin reemplazamiento. Hipergeométrica $HG(N,D,n)$
- Sucesos de Poisson

Distribuciones continuas comunes

- Tiempo entre sucesos de Poisson. Exponencial y Gamma
- Distribución uniforme
- La distribución normal: aproximación de distribuciones discretas mediante la normal.

Exponencial, $Ex(\alpha)$

Cuando se cumplen las hipótesis de un proceso de Poisson homogéneo, se puede definir una variable aleatoria continua T que **representa el tiempo que transcurre entre dos sucesos de Poisson.**

Probabilidad de que esta variable exceda un tiempo t

Probabilidad de que no suceda ningún suceso de Poisson en el tiempo $(0, t)$

=

$$P(T > t) = 1 - F_T(t) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^0}{0!}$$

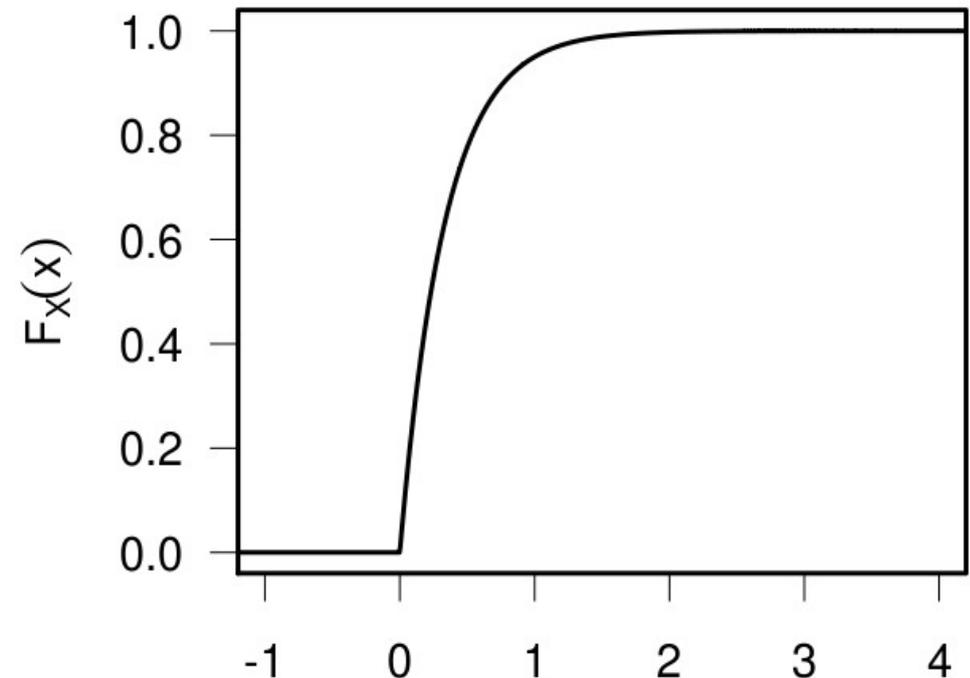
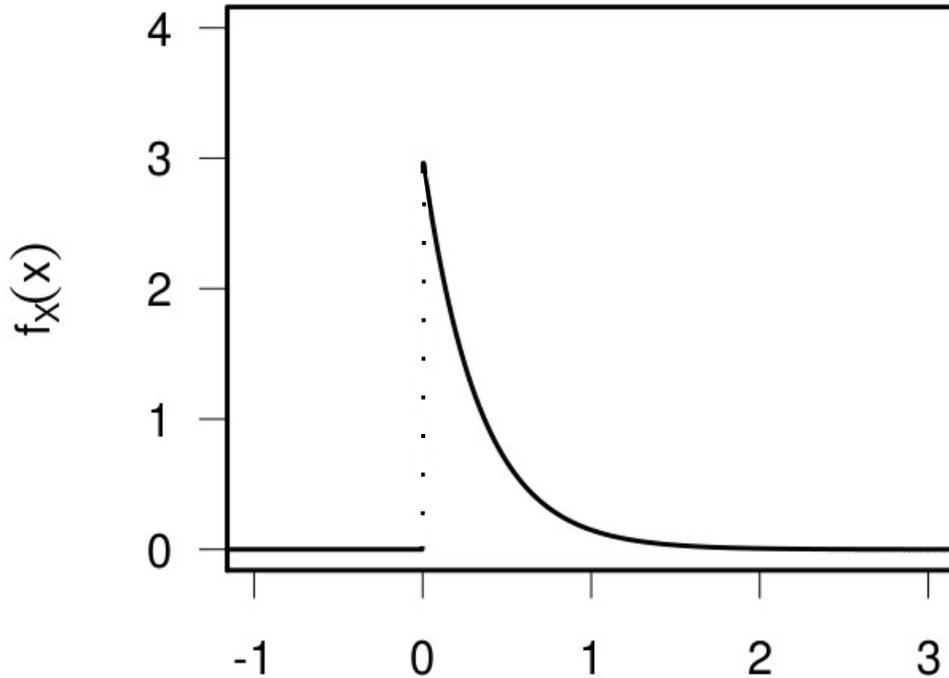
$$F_T(t) = 1 - e^{-\alpha t} \quad ; \quad t \geq 0$$

α (tasa de ocurrencia de sucesos) tiene dimensiones $[\text{tiempo}]^{-1}$

Derivando la función de distribución obtenemos la función de densidad:

$$f_T(t) = \alpha e^{-\alpha t}; \quad t \geq 0$$

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \quad \sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$



Gamma, $Ga(k, \alpha)$

Una variable aleatoria positiva T tiene distribución de probabilidad Gamma si su función de densidad es de la forma:

$$f_T(t) = \frac{\alpha^k t^{k-1} e^{-\alpha t}}{\Gamma(k)}, \quad t > 0.$$

$$\alpha > 0 \quad k > 0$$

Función Gamma de Euler:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Si k es entero, sirve para modelizar el tiempo que transcurre hasta el k -ésimo suceso de Poisson homogéneo. En tal caso se conoce como distribución de Erlang y $\Gamma(k) = (k-1)!$

$$Ga(1, \alpha) = Ex(\alpha)$$

Gamma, $Ga(k, \alpha)$

La media y la varianza son:

$$\mu = \frac{k}{\alpha} \qquad \sigma^2 = \frac{k}{\alpha^2}$$

La distribución Gamma es **reproductiva** respecto al parámetro k :

$$X \sim Ga(k_1, \alpha) \quad Y \sim Ga(k_2, \alpha) \quad X \text{ e } Y \text{ independientes}$$

$$X + Y \sim Ga(k_1 + k_2, \alpha)$$

Ejercicio

Jaime acaba de comprarse un cronómetro y ha bajado a probarlo a la calle, donde sabe que los coches pasan siguiendo una ley de Poisson de media 10 coches/hora. Se sienta en la acera y mide los tiempos entre el paso de los coches.

- a) Determinar la función de densidad del tiempo que transcurre entre que pasa un coche y el siguiente.
- b) Determinar la función de densidad del tiempo que tiene que esperar hasta que llega el quinto coche.

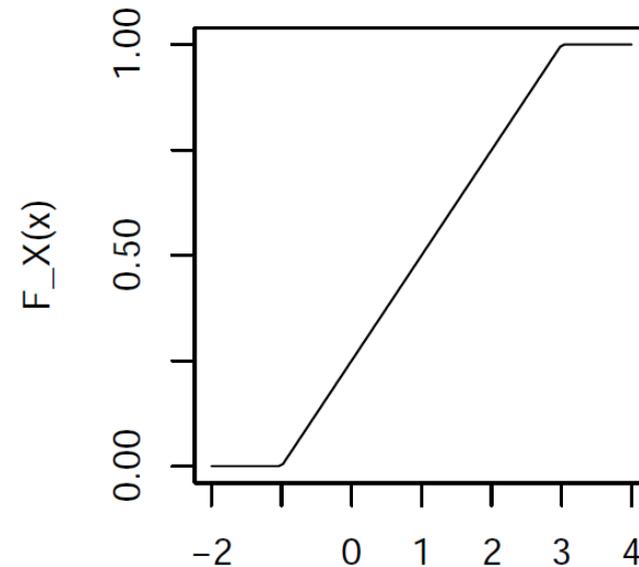
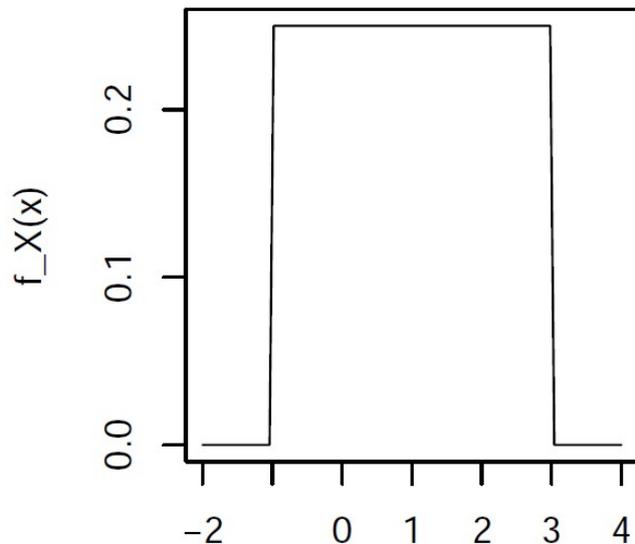
Uniforme, U(a,b)

Recibe su nombre por la uniformidad con la que reparte la probabilidad en el intervalo (a, b).

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Es (posiblemente) la distribución más importante:

- Multitud de fenómenos se comportan según esta distribución: distribución de pesos, alturas, coeficientes de inteligencia, errores en la medida, ... (Teorema del límite central)
- Además, se utiliza para aproximar otras distribuciones.

Depende de dos parámetros, valor medio de la distribución (centro de la curva) y la desviación standard (dispersión respecto de la media).

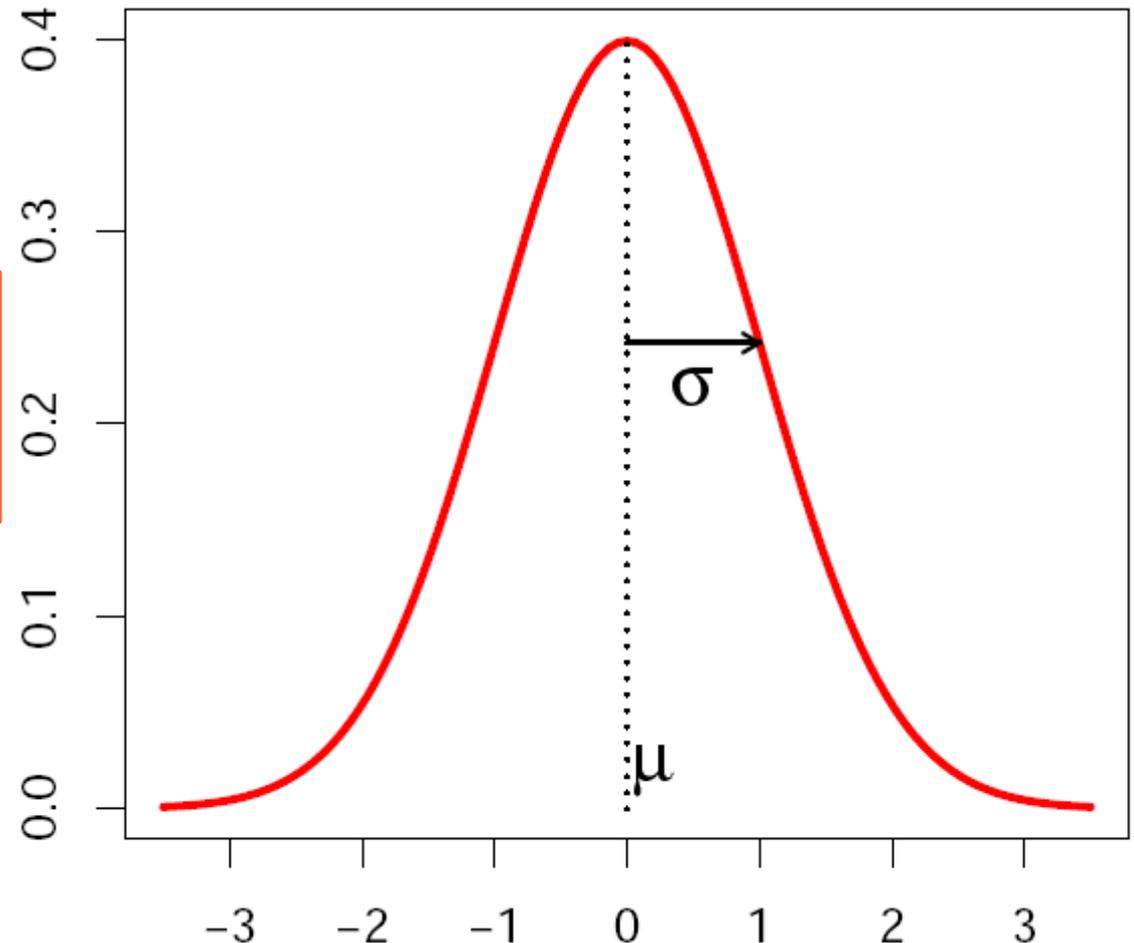
$$E[X] = \mu$$

$$\text{Var}[X] = \sigma^2$$

R tip

```
xmin <- -4
xmax <- 4
curve(dnorm(x, 0, 1), xmin, xmax)
```

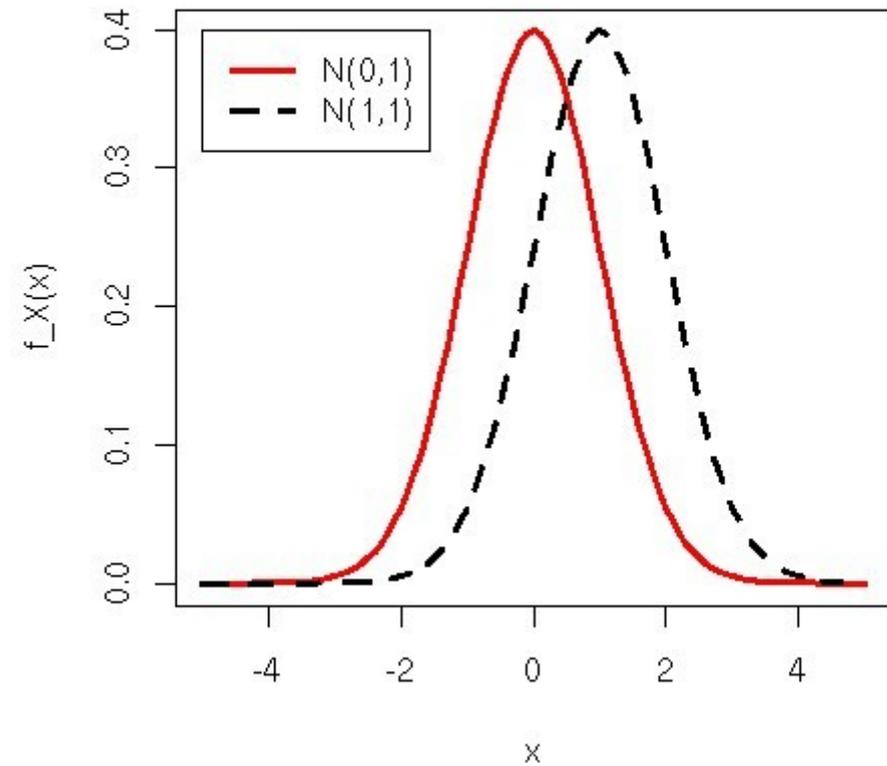
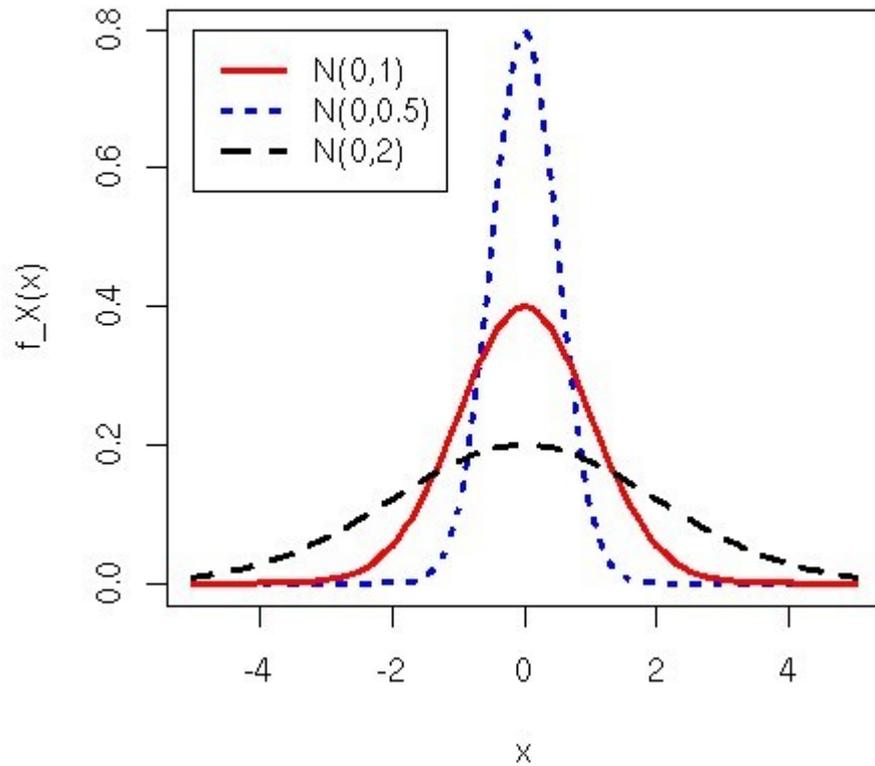
La curva de densidad es **simétrica**, **unimodal** y con forma de campana. La media la moda y la mediana coinciden.



Función de densidad:

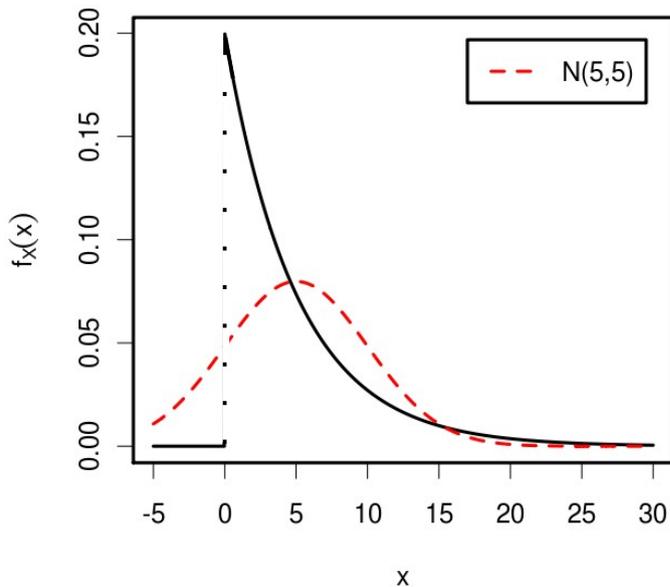
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

R tip
`dnorm(x, mean=0, sd=0.5)`

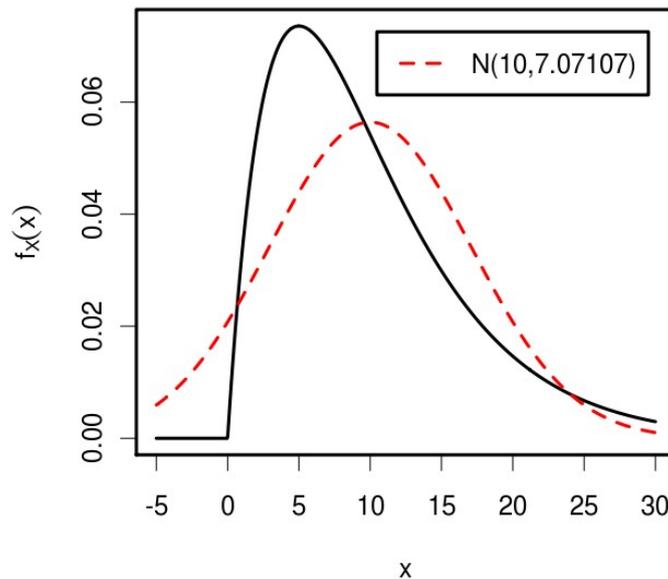


- La suma de n variables aleatorias, (casi) independientemente de su distribución, sigue una distribución Normal cuando $n \rightarrow \infty$

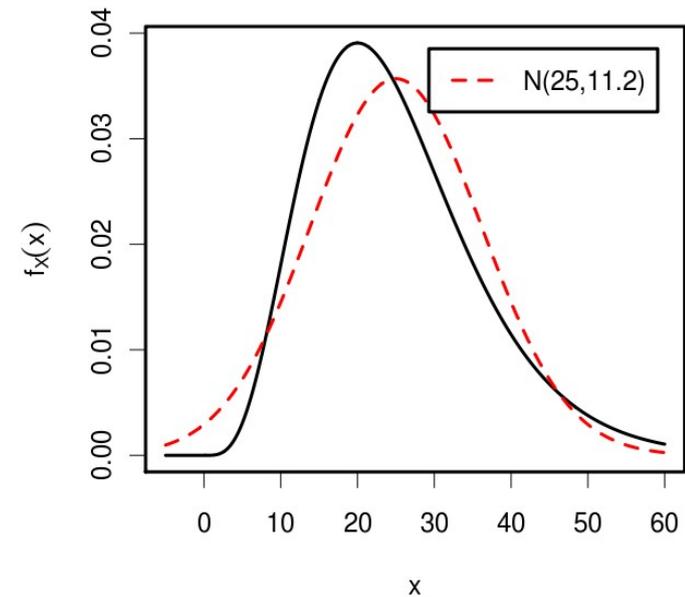
Suma de 1 v.a. $Ex(0.2)$



Suma de 2 v.a. $Ex(0.2)$



Suma de 5 v.a. $Ex(0.2)$

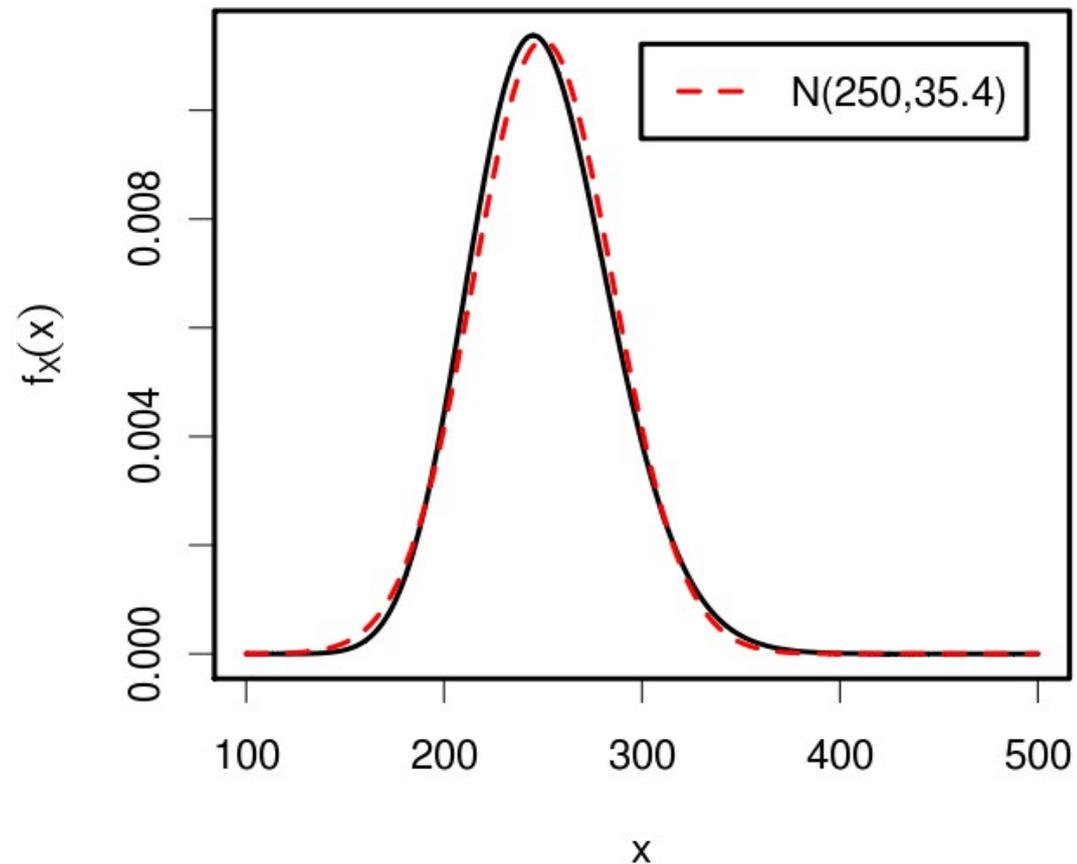


- La suma de n variables aleatorias, (casi) independientemente de su distribución, sigue una distribución Normal cuando $n \rightarrow \infty$

Suma de 50 v.a. $Ex(0.2)$

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$



Normal o gaussiana, $N(\mu, \sigma^2)$

- La v.a. Normal es **reproductiva** respecto de sus dos parámetros:

Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ son variables aleatorias independientes, entonces:

$$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

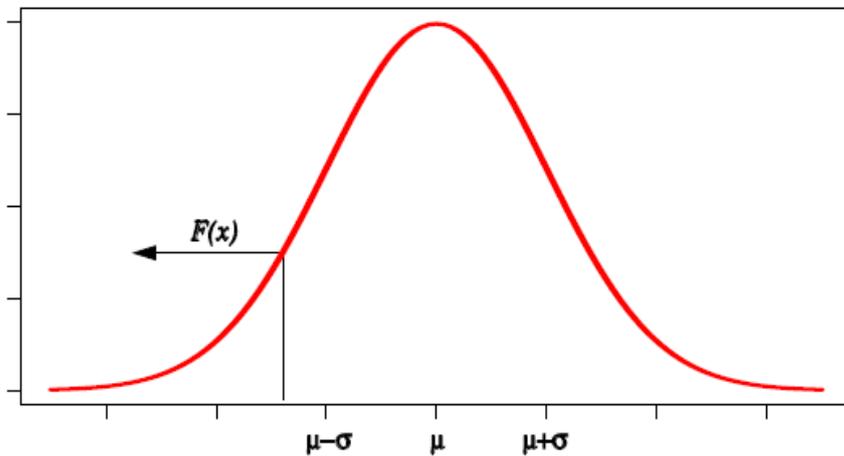
- Lamentablemente, la función de distribución normal no tiene una expresión analítica y hay que recurrir a tablas o a un ordenador para su cálculo.

R tip

```
pnorm(x, mean=0, sd=0.5)
```

Normal o gaussiana, $N(\mu, \sigma^2)$

Las tablas de la función de distribución normal listan únicamente la distribución normal tipificada $N(0,1)$

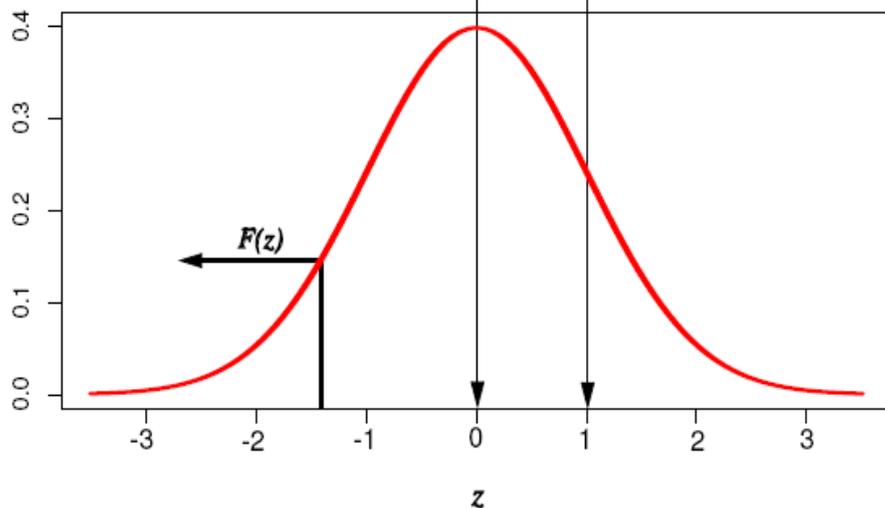


$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Para buscar en la tabla procederemos a tipificar nuestra v.a:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$Z \sim N(0, 1)$$

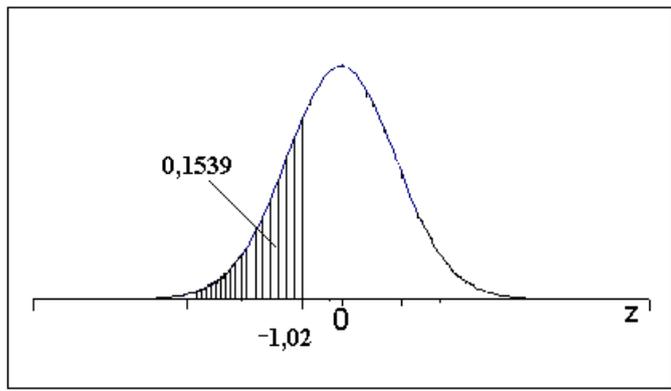


x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9942	0.9943	0.9944	0.9945	0.9946	0.9947	0.9948
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963

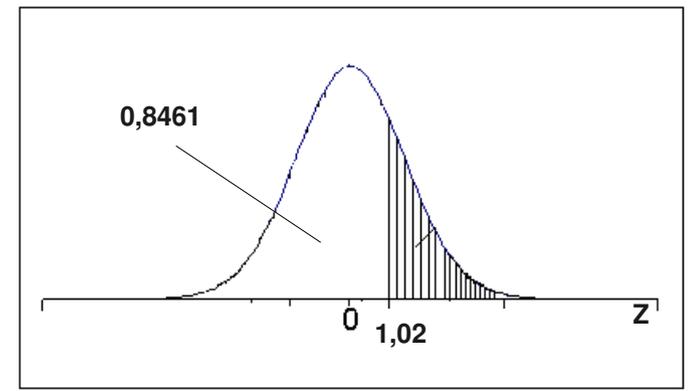
Tabla 4.1: Tabla de la función de distribución normal tipificada: $F_{N(0,1)}(x)$. Para obtener las probabilidades para $x < 0$ se puede utilizar la relación de simetría $F_{N(0,1)}(-a) = 1 - F_{N(0,1)}(a)$. Los subíndices indican el número de repeticiones de un dígito. Por ejemplo, $F_{N(0,1)}(3.61) = 0.9_3847 = 0.999847$.

Normal o gaussiana, $N(\mu, \sigma^2)$

¿ $P(Z < -1.02)$?



$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

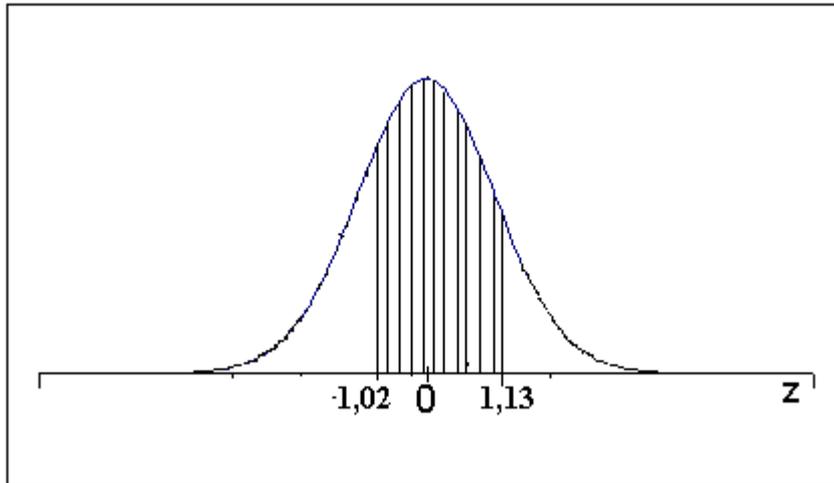


x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964

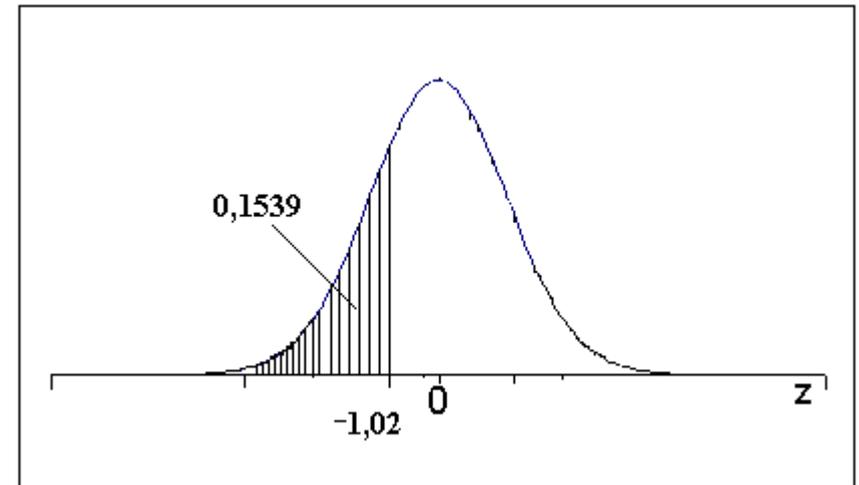
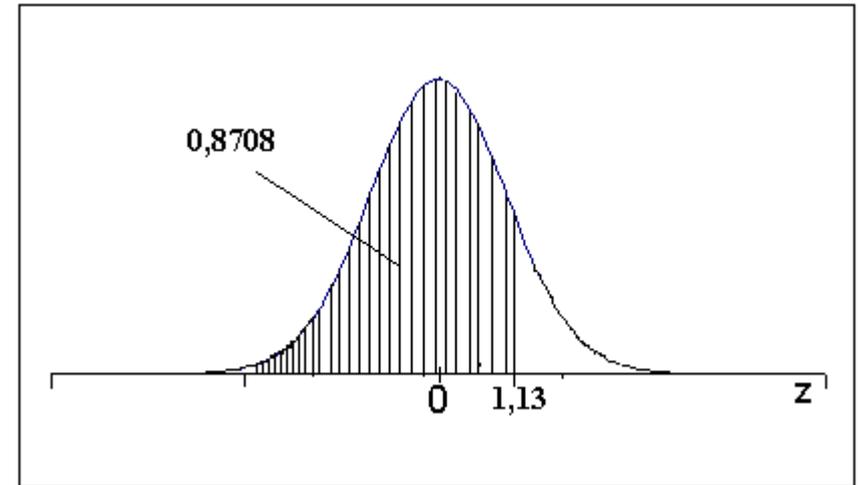
Notación habitual:

$$\Phi(x) \equiv F_{N(0,1)}(x)$$

$$P(X < -1.02) = 1 - P(X < 1.02) = 1 - \Phi(1.02) = 1 - 0.8461 = 0.1539$$



$$\begin{aligned}
 P(-1,02 < Z < 1,13) &= \\
 &= P(Z < 1,13) - P(Z < -1,02) = \\
 &= 0,8708 - 0,1539 = 0,7169
 \end{aligned}$$



Ejercicio

Según los patrones de crecimiento de la Organización Mundial de la Salud¹, la altura de los niños de 3 años se distribuye según una distribución normal de media 96,10 cm y desviación estandar 3,76 cm Se pide:

- a) Encontrar la probabilidad de que un niño de 3 años mida más de 1 metro.
- b) Encontrar la probabilidad de que un niño de 3 años mida entre 90 y 100 cm.

Si una variable $X \sim \mathbf{B}(n,p)$, tiene parámetro n grande y np y $n(1-p)$ están próximos a 0, la función de distribución $B(n,p)$ puede aproximarse por una normal: $N(np, np(1-p))$

Es decir:

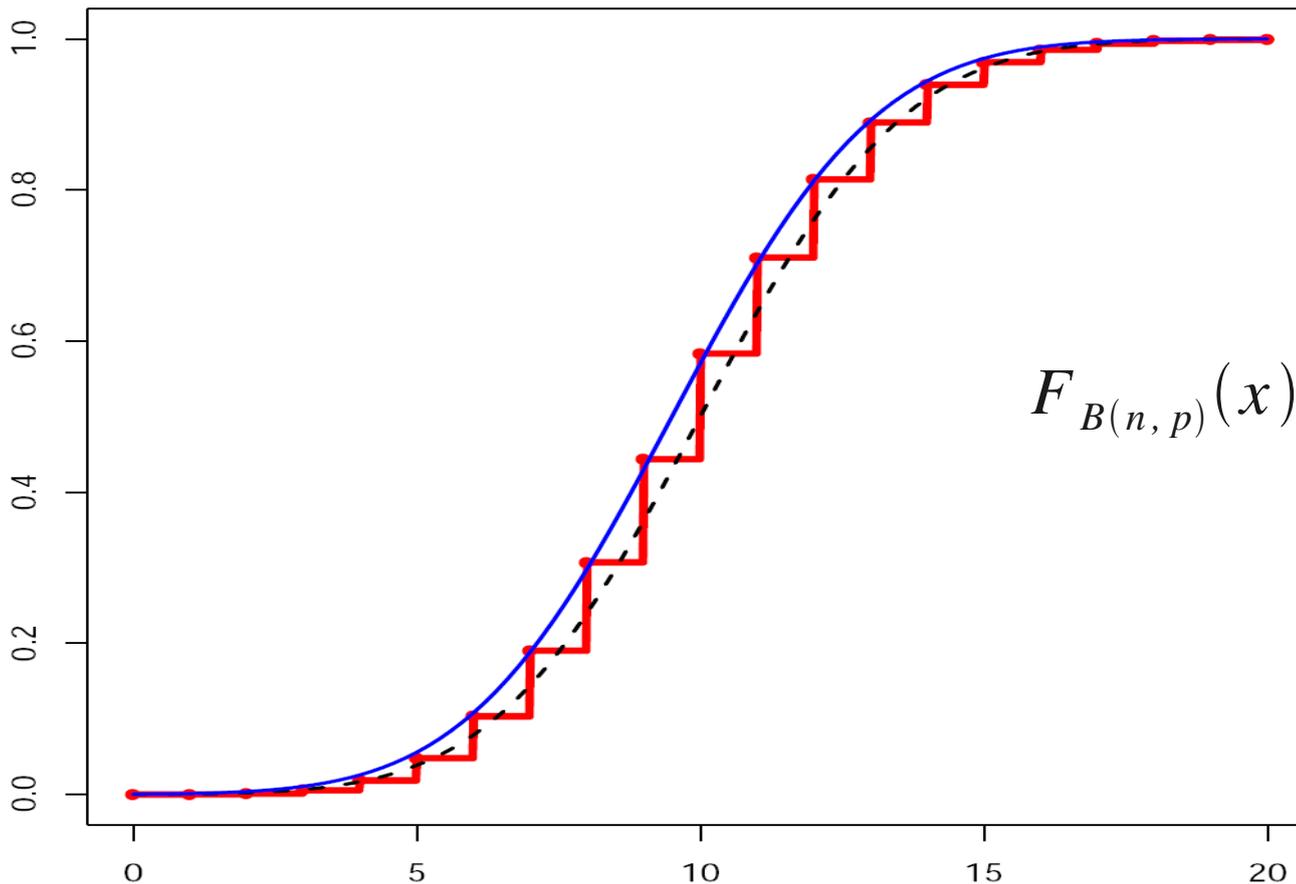
$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1)$$

Esta aproximación es tanto mejor cuanto mayor es n .

En la práctica se conviene que una distribución binomial puede aproximarse por la Normal cuando

$$np > 5 \quad \text{y} \quad n(1-p) > 5$$

Esta aproximación se mejora con la llamada **corrección por continuidad**:



$$F_{B(n,p)}(x) \approx F_{N(0,1)}\left(\frac{x - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Ejercicio

El 20% de los chips fabricados en una planta son defectuosos. Cuales son las probabilidades de que en un lote de 100 chips aleatoriamente seleccionados

- a) más de 15 sean defectuosos.
- b) entre 10 y 15 sean defectuosos

Cuando en una distribución **Po(λ)**, λ tiende a infinito, la función de distribución Po(λ) puede aproximarse por una **N(λ, λ)**

Es decir:

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0, 1)$$

En la práctica se conviene que una distribución de Poisson puede aproximarse por la Normal cuando $\lambda > 5$

Esta aproximación se mejora con la llamada **corrección por continuidad**:

$$Z = \frac{X - \lambda + 0.5}{\sqrt{\lambda}}$$