Estadística

Tema 8. Programación lineal y métodos de optimización

María Dolores Frías Domínguez
Jesús Fernández Fernández
Carmen María Sordo

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Esta unidad está basada en material elaborado por Ángel Cobo Ortega, Universidad de Cantabria

TEMA8: Programación lineal y métodos de optimización

Introducción a la optimización

Problemas de optimización

El vector gradiente. Análisis geométrico.

Programación lineal

- Características
- Resolución geométrica
- Resolución mediante software especializado: LINGO

Este material está basado en material elaborado
por Ángel Cobo Ortega, Universidad de Cantabria

Objetivos del tema

- Reconocer la importancia de la optimización en los distintos campos de la ingeniería.
- Identificar las componentes principales de un problema de optimización.
- Analizar el caso particular de la programación lineal.
- Saber utilizar software de apoyo a la toma de decisiones.

Optimización en la ingeniería

Ingeniería:

- Crear sistemas de ingeniería competitivos no sólo en términos de funcionamiento sino también en términos de productividad, servicio, ciclo de vida,...

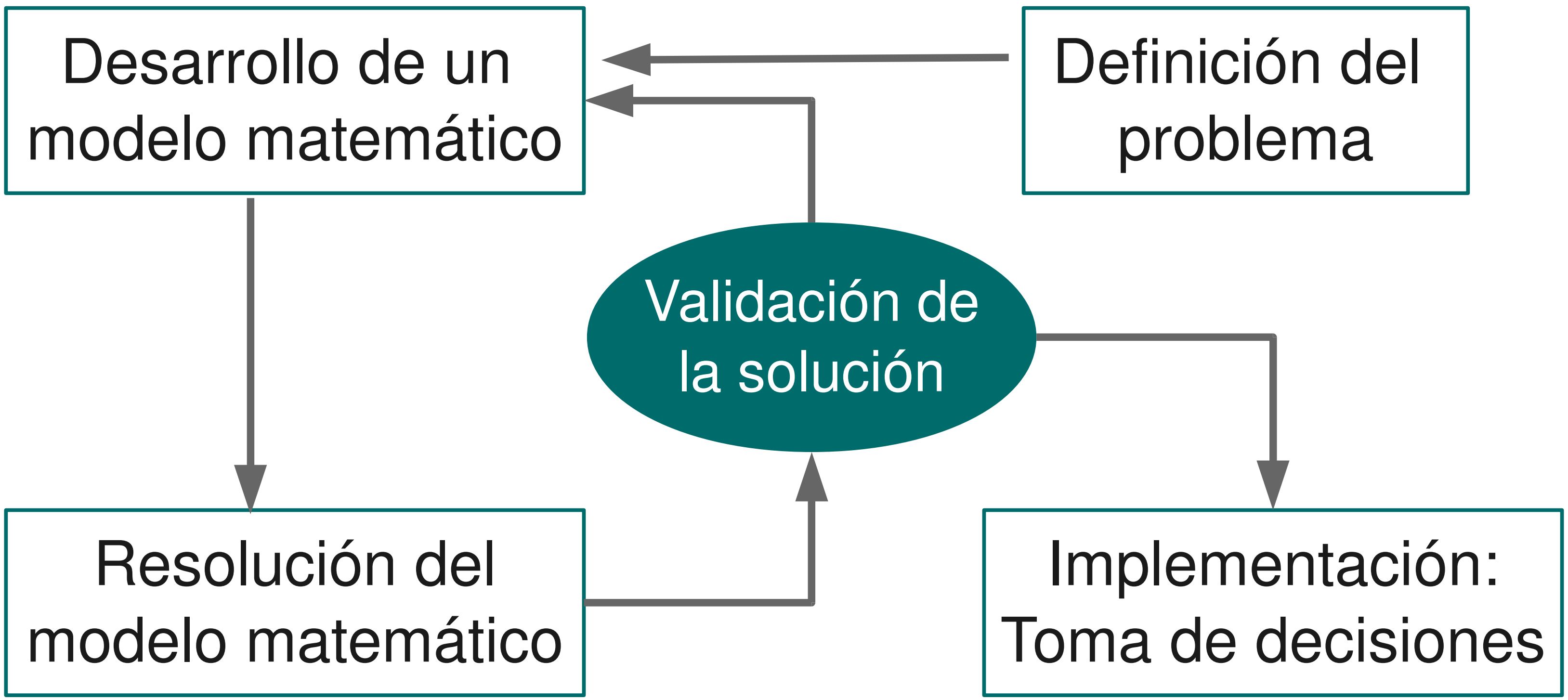
Necesidades:

- Uso de metodologías de diseño rigurosas y de carácter cuantitativo que puedan complementar a la intuición y la faceta creativa no cuantitativa del proceso de diseño.

OPTIMIZACIÓN: Búsqueda de la “mejor” solución a un problema dado.

- Minimización y maximización
- Ejemplos: Problemas de localización, asignación, confección de calendarios, rutas de vehículos,…

Metodología



- **Algoritmos exactos:** producen la solución exacta del problema
- **Algoritmos aproximados:** producen la solución aproximadad del problema mediante algún proceso iterativo.
- **Heurísticas:** obtienen “buenas” soluciones en tiempos razonables.

Problemas de optimización

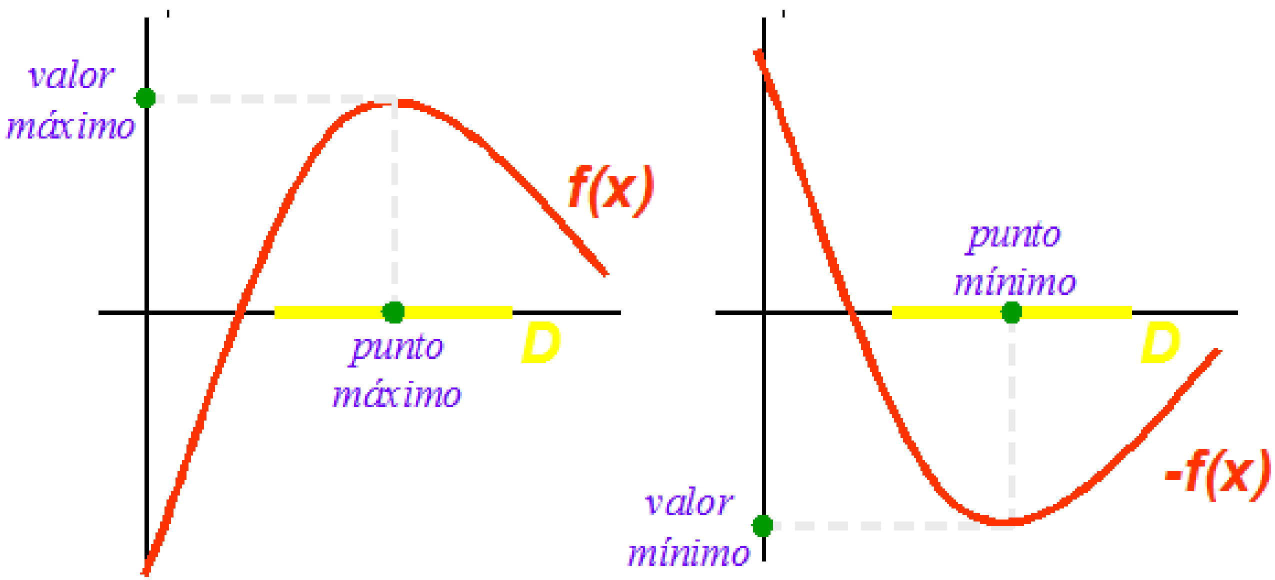
$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in D \end{cases} \qquad \begin{cases} \max f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

Programas matemáticos

Minimizar costes, tiempo de producción, riesgo de la inversión, plazo de entrega,...

Maximizar los beneficios, nivel de ventas, satisfacción del cliente, resistencia de los materiales,...

Ambos problemas son en el fondo equivalentes: Max f(x) = Min (-f(x))



El punto en el que una función alcanza su máximo es el mismo en el que su función opuesta alcanza el mínimo, siendo los valores óptimos respectivos opuestos.

María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

Elementos de todo problema optimización

La programación matemática consiste por tanto en el cálculo de máximos y mínimos de funciones de varias variables sometidas a un conjunto de restricciones.

$$\begin{cases} \operatorname{opt} f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

- Variables de decisión $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - Variables reales, enteras, binarias o booleanas
- Función objetivo $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Región factible o espacio de soluciones factibles delimitado por las restricciones: D conjunto en R^n

Restricciones

- Las restricciones delimitan la región factible.
  - Escasez de recursos, limitaciones tecnológicas, restricciones de diseño
- Tipos de restricciones
  - Problemas no restringidos
  - Restricciones de igualdad
    - $h(x) = 0$
    - Lagrange
  - Restricciones de desigualdad
    - $g(x) \leq 0$
    - $a_i \leq x_i \leq b_i$
    - Karush – Kuhn – Tucker
  - Programación lineal

Optimización clásica

Programación matemática

Restricciones

Ejemplo

Una refinería obtiene combustible empleando tres procesos de producción diferentes. En cada uno de ellos se precisa utilizar tres máquinas. Según el proceso productivo elegido, para obtener un barril de combustible es necesario usar cada una de las máquinas las horas siguientes:

	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3
Máquina 1	2	1	3
Máquina 2	3	1	3
Máquina 3	1	4	2

Cada máquina está disponible 30, 35 y 45 horas respectivamente. El beneficio por barril de combustible obtenido con el proceso 1 es de 25 unidades monetarias; con el proceso 2, de 18 unidades monetarias y de 20 unidades monetarias si se emplea el proceso 3.

Restricciones

Ejemplo

Una refinería obtiene combustible empleando tres procesos de producción diferentes. En cada uno de ellos se precisa utilizar tres máquinas. Según el proceso productivo elegido, para obtener un barril de combustible es necesario usar cada una de las máquinas las horas siguientes:

p_i: número de barriles producidos en el proceso i

$$\begin{cases} \max\ 25\,p_1 + 18\,p_2 + 20\,p_3 \\ 2\,p_1 + p_2 + 3\,p_3 \leq 30 \\ 3\,p_1 + p_2 + 3\,p_3 \leq 35 \\ p_1 + 4\,p_2 + 2\,p_3 \leq 45 \\ p_1 \geq 0 \\ p_2 \geq 0 \\ p_3 \geq 0 \end{cases}$$

Técnicas clásicas de optimización

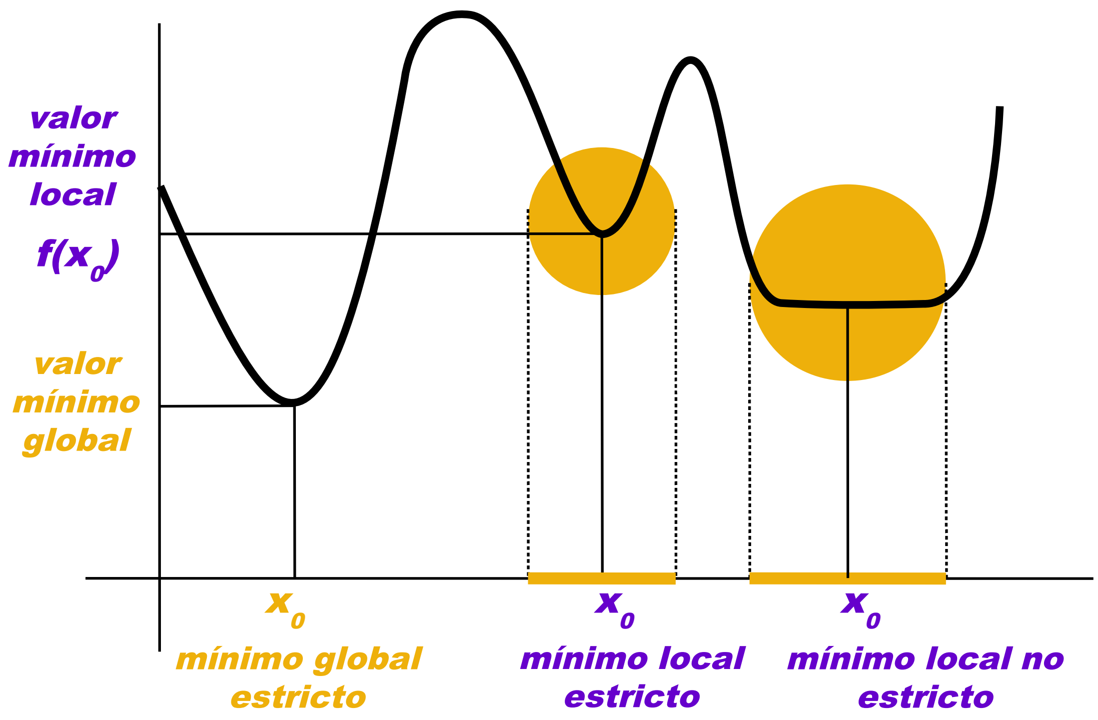
Análisis de condiciones de optimalidad:

- Condiciones necesarias: Permiten seleccionar los posibles máximos y mínimos, (pueden existir puntos que las verifican sin ser máximos o mínimos).
- Condiciones suficientes: Permiten asegurar con total certeza que se ha encontrado un extremo.

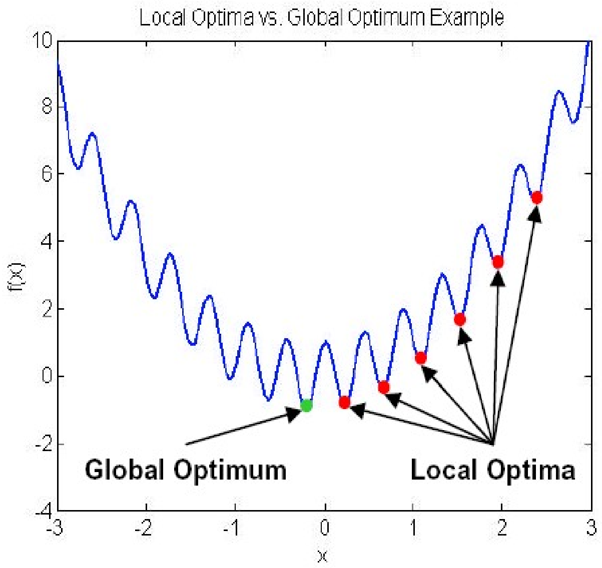
La mayoría de las técnicas están basadas en el cálculo diferencial:

- No aplicables a muchos tipos de problemas
- Dificultad de obtención de soluciones exactas en muchos casos → Métodos numéricos
- Problemática de los óptimos locales

El problema de los óptimos locales



- Local Optima vs. the Global Optimum
- Example
  - f(x) = cos(14.5x – 0.3) + (x + 0.2)x
  - Min[f(x)]



Es preferible un óptimo global a uno local, pero desgraciadamente, la mayoría de las técnicas de optimización localizan óptimos locales y tienen dificultades para reconocer la globalidad.

Cond. de optimalidad con f. diferenciables

Condiciones necesarias:

- Problemas sin restricciones:
  - Todo óptimo tiene asociado un vector gradiente nulo

$$\nabla f(\vec{x}) = 0$$

- Problemas restringidos: $\begin{cases} \text{opt } f(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) = 0 \end{cases}$

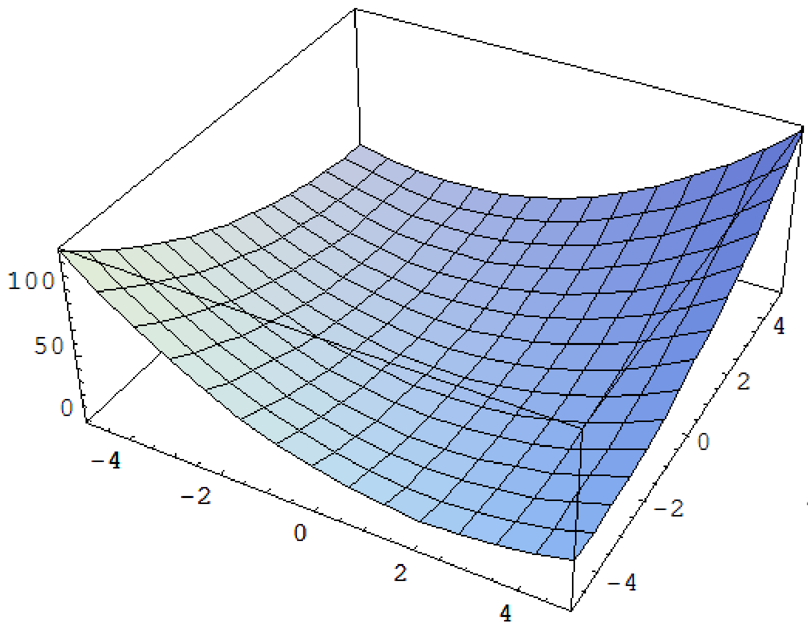
$$\nabla f(\vec{x}) + \lambda \nabla g(\vec{x}) = 0$$

Condiciones suficientes:

- Clasificación de matriz hessianas

Ejemplo

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + x - y + 2$$



$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + 2y + 1 \\ 2y + 2x - 1 \end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 1 = 0 \\ 2y + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3/2 \end{cases}$$

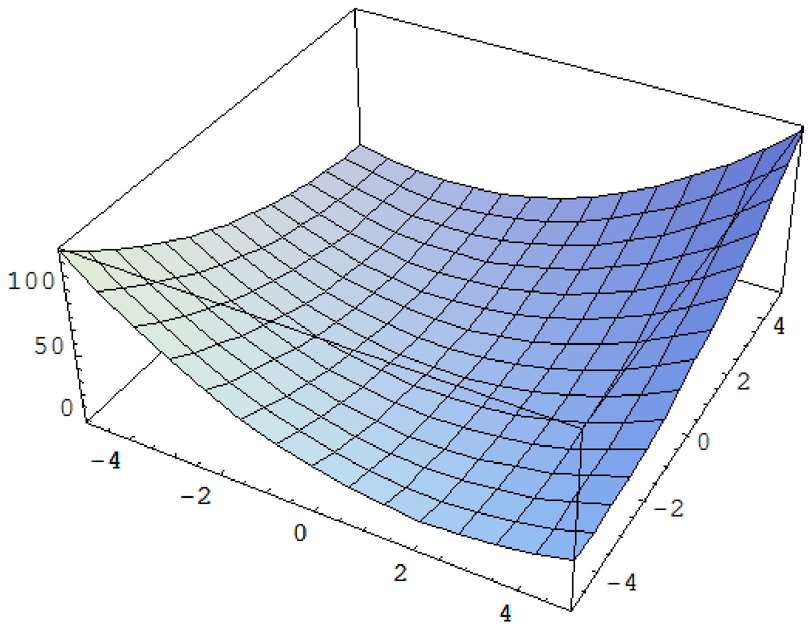
Candidato a óptimo

$$Hf(-1, 3/2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz hessiana es def. pos., por lo que el punto es un **mínimo**.

Ejemplo

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + x - y + 2$$



Matlab tip

```
f = inline('2*x.^2+y.^2+2*x.*y+x-y+2')
dens = 50;
x = y = linspace(-5,5,dens);
[xx, yy] = meshgrid(x,y);
zz = f(xx,yy);
surf(xx,yy,zz, 'EdgeColor','none');
xlabel('x'); ylabel('y')
hold on
contour3(xx,yy,zz,'w')
scatter3(-1,3/2,f(-1,3/2),'w')
```

$$\begin{cases} 4x + 2y + 1 = 0 \\ 2y + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3/2 \end{cases}$$

Candidato a óptimo

$$Hf(-1, 3/2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz hessiana es def. pos., por lo que el punto es un **mínimo**.

Ejemplo

Si añadimos una restricción
$$\begin{cases} \min\ 2x^2 + y^2 + 2xy + x - y + 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$\nabla f + \lambda \nabla g = \begin{pmatrix} 4x + 2y + 1 \\ 2y + 2x - 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 4x + 2y + 1 + \lambda = 0 \\ 2y + 2x - 1 + \lambda = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \\ \lambda = 9 \end{cases}$$

Candidato a óptimo

$$Hf(x,y) + \lambda Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz hessiana es definida positiva para todo (x,y) y λ, por lo que el punto es un **mínimo**.

Análisis geométrico

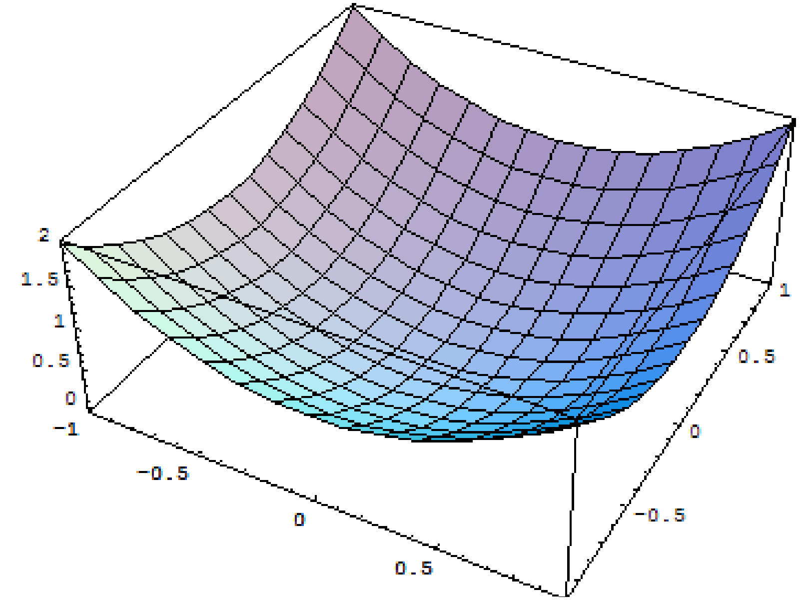
En casos muy sencillos y de pocas dimensiones (1 ó 2), se puede resolver el problema de optimización de forma gráfica.

- Representando la región factible
- Representando las curvas de nivel y el vector gradiente.
- Localizando el óptimo dentro (o en los bordes) de la región factible.

El papel del vector gradiente

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

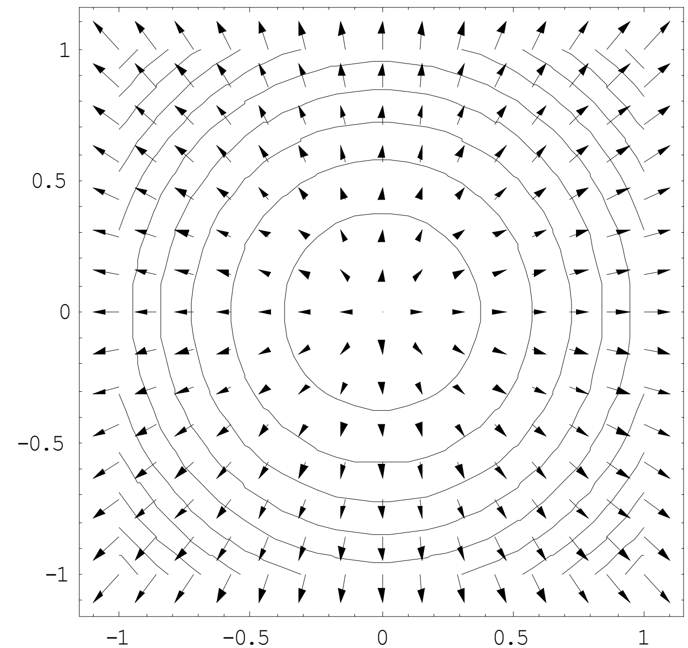
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$



Los vectores gradientes son ortogonales con las curvas de nivel (curvas f(x,y)=cte, que permiten representar funciones de dos variables en el plano).

Siempre señalan sobre el dominio la dirección de más rápido crecimiento de la función.

"Huyen" de los mínimos y se sienten "atraídos" por los máximos.

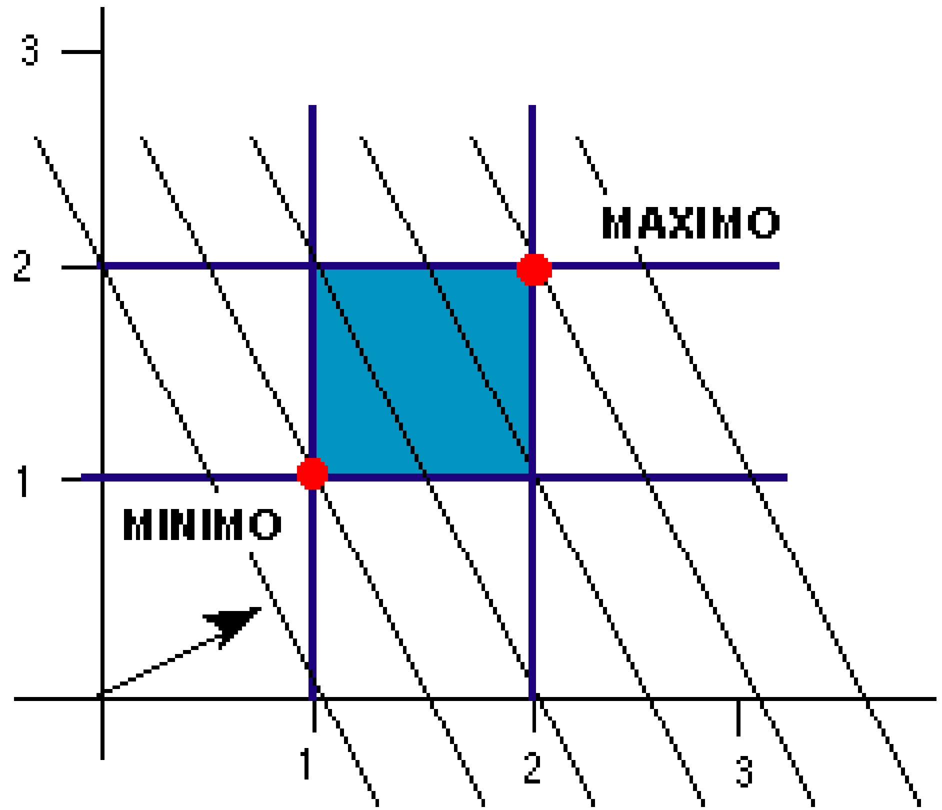


María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

El papel del vector gradiente

Ejemplo

$$\begin{cases} \text{opt } 2x + y \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$



Ejercicio

Localizar gráficamente los óptimos (máximos y mínimos) de los siguientes programas no lineales:

a) $\begin{cases} \text{opt} \quad (x_1-3)^2+(x_2-3)^2 \\ x_1+x_2 \leq 10 \\ x_1+x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \min \quad x_1^2+\frac{(x_2-2)^2}{4} \\ x_2 \geq x_1^2+1 \\ |x_1| \geq 1 \end{cases}$

Contenidos

Introducción a la optimización

Problemas de optimización

El vector gradiente. Análisis geométrico.

Programación lineal

- Características
- Resolución geométrica
- Resolución mediante software especializado: LINGO

Programación Lineal

La programación lineal es instrumento habitual en empresas.

Una de las ramas de la Optimización más desarrollada y con mayor número de aplicaciones prácticas

Orígenes de la programación lineal:

- Economistas de la URSS: modelos lineales para aumentar la eficiencia en la organización y planificación de la producción
- Segunda Guerra Mundial: Proyecto SCOOP (Scientific Computation of Optimal Programs)
- Dantzig: método Simplex

http://www.orms-today.org/orms-12-07/history.html

Programas lineales

$$\begin{cases} \text{opt } c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2 \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Función objetivo

Restricciones lineales

Características:

- Todo óptimo es global.
- Las condiciones necesarias de primer orden son suficientes.
- Si hay dos soluciones distintas, también lo es cualquier combinación lineal convexa.

Programas lineales

$$\begin{cases} \text{opt } c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2 \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Función objetivo

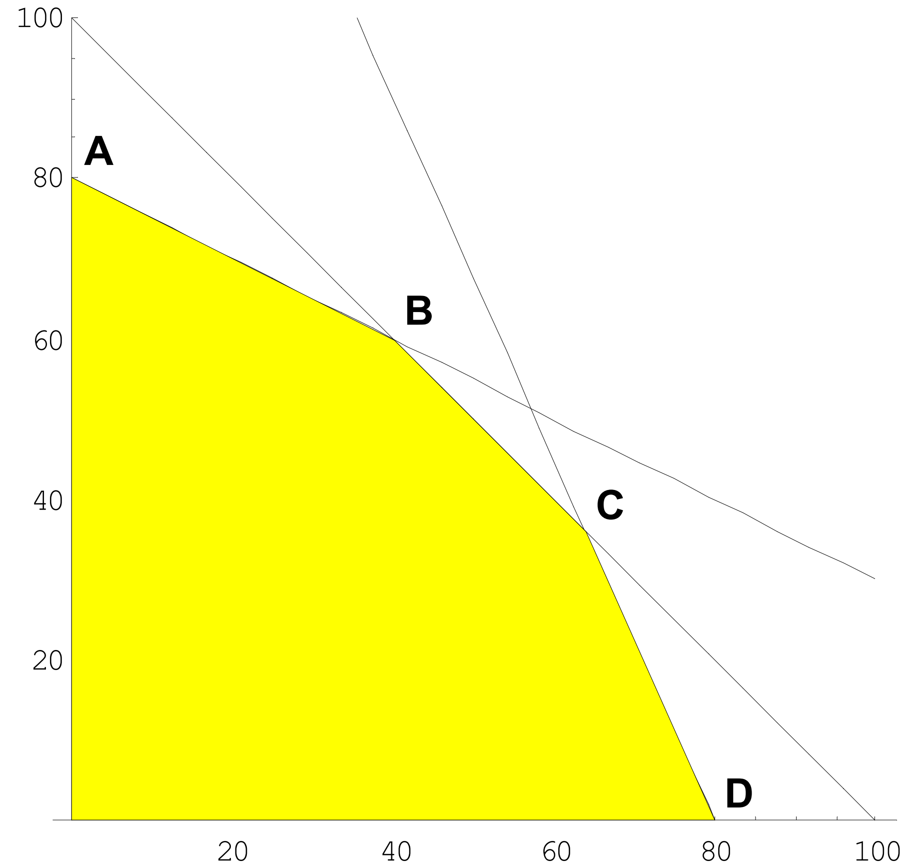
Restricciones lineales

Ventajas:

- Fáciles de definir y formular.
- Se trabaja de forma eficiente con un número elevado de variables de decisión.
- Se adaptan mejor al tratamiento algorítmico con computadores (rápidez de cálculo).

Análisis geométrico

$$\begin{cases} \max\ ax + by \\ x + 2y \leq 160 \\ 2x + 2y \leq 200 \\ 9x + 4y \leq 720 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



El espacio D de soluciones factibles es un polítopo con un número finito de vértices.

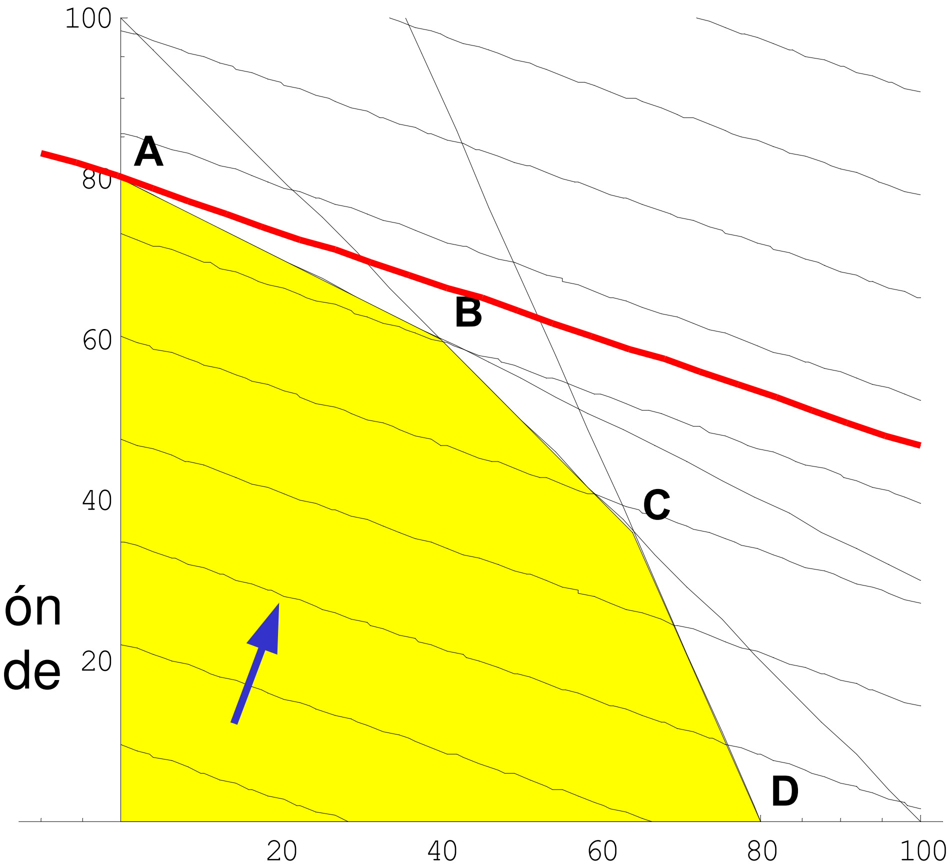
Es recomendable que sea acotado para garantizar la existencia de un óptimo.

En programación lineal habitualmente no se consideran restricciones estrictas

Caso a=20, b=60

$$\begin{cases} \max\ 20x + 60y \\ x + 2y \leq 160 \\ 2x + 2y \leq 200 \\ 9x + 4y \leq 720 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

El gradiente marca la dirección de crecimiento, y por tanto de búsqueda del máximo



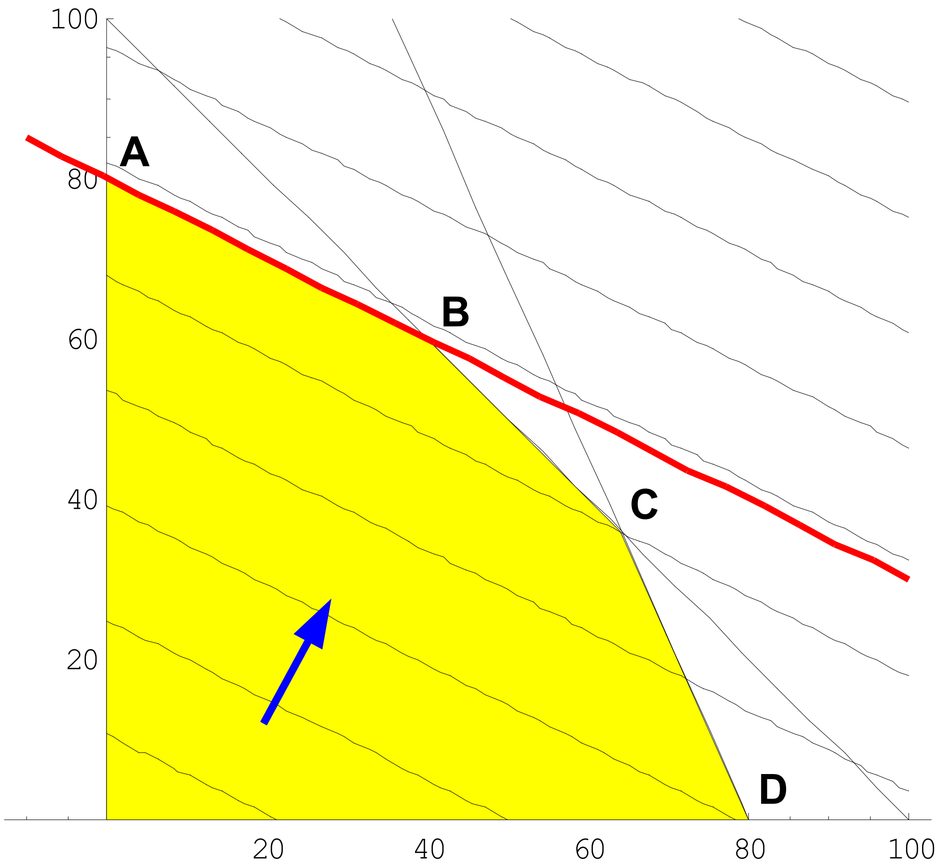
El máximo se alcanza en el vértice A=(0,80)

Valor máximo de la función f(0,80)=4800

María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

Caso a=30, b=60

$$\begin{cases} \max 30x + 60y \\ x + 2y \leq 160 \\ 2x + 2y \leq 200 \\ 9x + 4y \leq 720 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



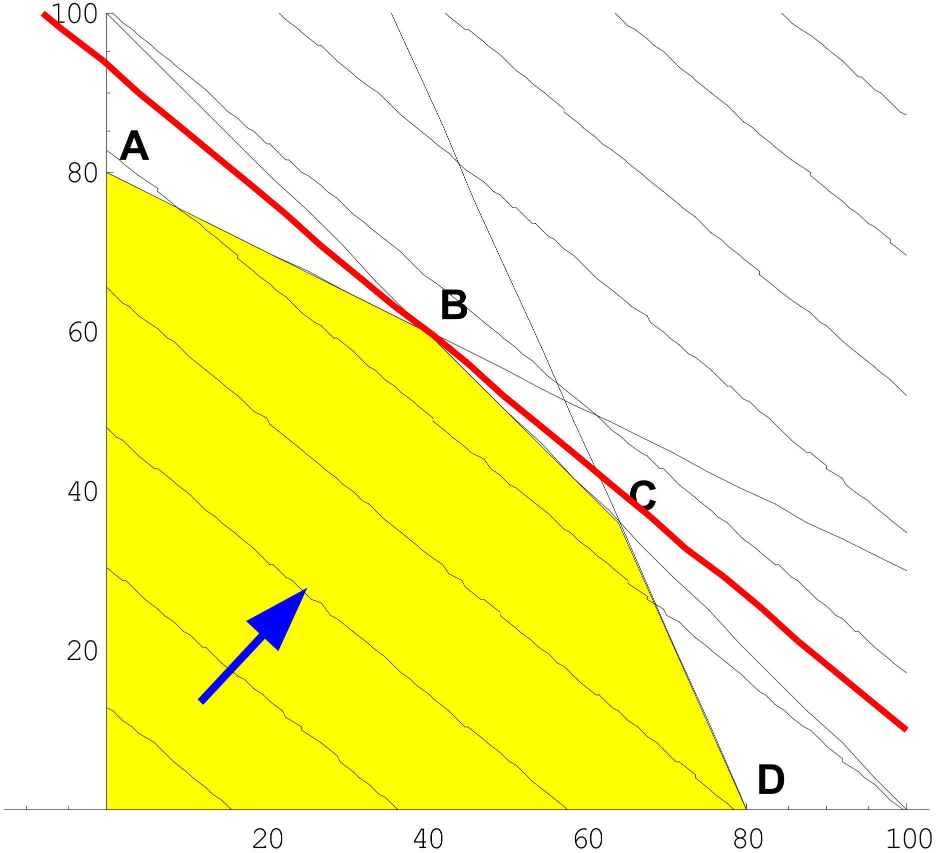
El máximo se alcanza en los vértices A=(0,80) y B=(40,60) y en todos los puntos que están en todo el lado que determinan.

El valor de la función en todos ellos es 4800

El problema tiene por tanto infinitas soluciones

Caso a=50, b=60

$$\begin{cases} \max\ 50x + 60y \\ x + 2y \leq 160 \\ 2x + 2y \leq 200 \\ 9x + 4y \leq 720 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



El máximo se alcanza en el vértice B=(40,60)

Valor máximo de la función f(40,60)=5600

María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

Análisis geométrico

Deducción de propiedades:

- Todo óptimo es global y siempre se alcanza en la frontera de *D* (alguna restricción se satura).
- Si existe óptimo, éste se alcanza, al menos, en un vértice de *D*.
- Si varios puntos son óptimos, también lo es cualquier combinación lineal convexa.

Resolución:

- Localizar los vértices de *D*.
- Calcular la función objetivo sobre todos los vértices
- Elegir aquél sobre el que la función alcance el menor o el mayor valor.

No aconsejable para problemas de grandes dimensiones.

Ejercicio

Una empresa de cartografía elabora mapas a dos resoluciones distintas. Obtiene un beneficio por mapa de 400 euros para los de menor resolución y de 500 para los mapas con mayor resolución. La confección de los mapas requiere de tres procesos en tres departamentos distintos: dibujo, imprenta y revisión final. El tiempo disponible en cada departamento está limitado a 10 horas diarias en el de dibujo, 12 en el de imprenta y 10 en el de revisión. Elaborar un mapa de resolución baja requiere 1 hora en el departamento de dibujo, 2 en el de imprenta y 1 hora en el de revisión, mientras que para un mapa de resolución mayor se necesitan 3 horas en el de dibujo, 2 en el de imprenta y 1 hora en el de revisión.

a) Determinar cuántos mapas deben elaborarse diariamente de cada tipo para que el beneficio sea máximo.

b) ¿Cuál es ese beneficio?

Método Simplex

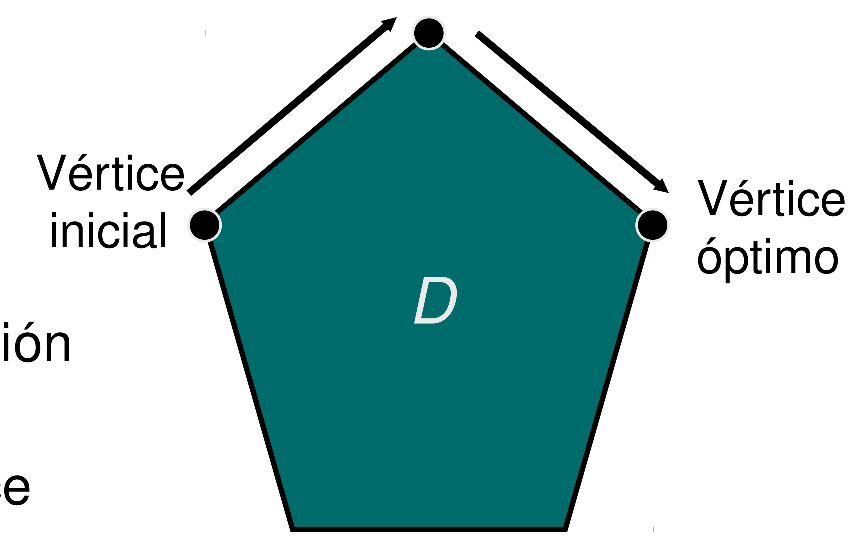
Formulación estándar de programas lineales:

$$\begin{cases} \min\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2. \ldots, x_n \geq 0; n \geq m; b_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\ cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

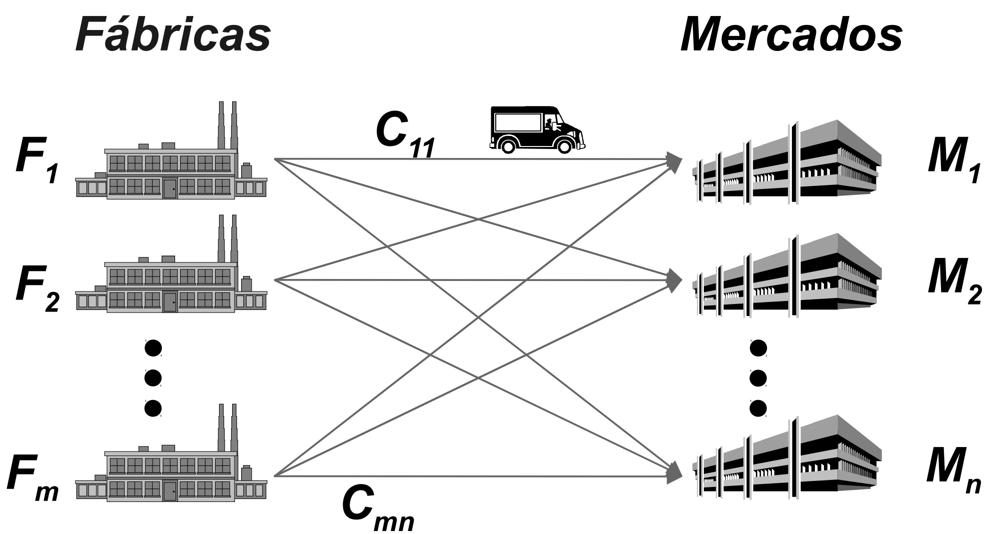
Objetivo: encontrar el vértice óptimo sin tener que calcularlos todos.

- Se parte de un vértice inicial.
- Si no es óptimo, encontrar un vértice adyacente que disminuya el valor de la función objetivo o que, por lo menos, no aumente.
- Repetir el proceso hasta encontrar un vértice que no pueda ser mejorado.



El problema del transporte

Una empresa dispone de *m* fábricas para producir un único producto que ha de distribuirse a *n* mercados diferentes, siendo C_{ij} el coste, por unidad de producto, desde la fábrica F_i al mercado M_j



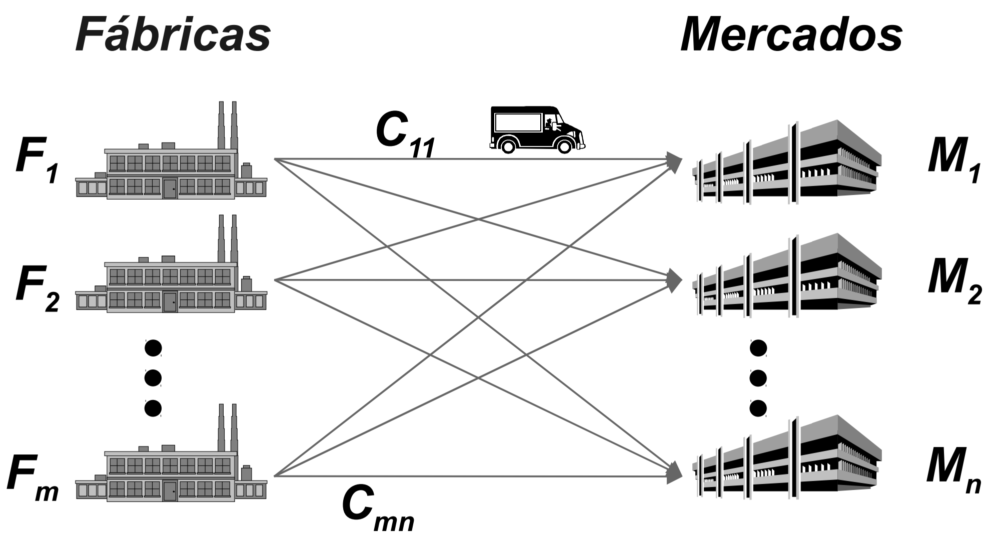
Objetivos de la empresa:

1. Diseñar política de suministros que minimice costes de transporte (c_{ij}).
2. No sobrepasar los límites de producción de cada una de sus fábricas (p_i).
3. Atender la demanda de cada uno de los mercados (d_j).

María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

El problema del transporte

Una empresa dispone de m fábricas para producir un único producto que ha de distribuirse a n mercados diferentes, siendo C_{ij} el coste, por unidad de producto, desde la fábrica F_i al mercado M_j.



$$
\begin{cases}
\min \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq p_i \quad i = 1,2,\cdots,m \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_i \quad j = 1,2,\cdots,n \\
x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,\cdots,m; \\
\qquad\qquad j = 1,2,\cdots,n
\end{cases}
$$

Variables de decisión: unidades transportadas desde cada fábrica a cada mercado (x_{ij})

Función objetivo: minimizar el coste total del transporte

Restricciones: Atender la demanda de cada mercado (d_j)

No sobrepasar las capacidades de producción de cada fábrica (p_i)

El problema del transporte

Ejemplo

Una empresa multinacional dedicada a la fabricación de electrodomésticos recibe un pedido de 8.000 hornos y 12.000 cocinas.

Para hacer frente al pedido en un plazo de un mes debe producir los electrodomésticos en cuatro fábricas diferentes.

El objetivo que se plantea la empresa es la **planificación óptima** de la producción del pedido.

	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3	Fábrica 4
Capacidad de producción mensual de hornos	**0**	**5000**	**7000**	**3000**
Capacidad de producción mensual de cocinas	**4000**	**6000**	**0**	**8000**
Coste de producción por unidad de horno	**-**	**25 €**	**30 €**	**20 €**
Coste de producción por unidad de cocina	**20 €**	**20 €**	**-**	**25 €**
Coste por unidad de electrodoméstico del envío hasta el destino	**10 €**	**13 €**	**12 €**	**9 €**

Ejemplo

Planteamiento del problema

VARIABLES DE DECISIÓN (x_{ij}):

X2H = hornos producidos en la Fábrica 2
X2C = cocinas producidas en la Fábrica 2
X3H = hornos producidos en la Fábrica 3
X4H = hornos producidos en la Fábrica 4
X4C = cocinas producidas en la Fábrica 4

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

FUNCIÓN OBJETIVO (COSTES TOTALES):

Prod = 20 X1C + 25 X2H + 20 X2C + 30 X3H + 20 X4H + 25 X4C
Trans = 10 X1C + 13 (X2H + X2C) + 12 X3H + 9 (X4H + X4C)
COSTE TOTAL = 30 X1C + 38 X2H + 33 X2C + 42 X3H + 29 X4H + 34 X4C

LIMITACIONES O RESTRICCIONES:

Capacidades de producción en cada fábrica:
X1C <= 4000; X2H <= 5000; X2C <= 6000
X3H <= 7000; X4H <= 3000; X4C <= 8000

Necesidad de satisfacer el pedido:
X2H + X3H + X4H >= 8000;
X1C + X2C + X4C >= 12000

No negatividad de las variables:
X2H, X3H, X4H, X1C, X2C, X4C >= 0

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq p_i \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_i \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m;$$

Resolución de programas lineales con software de investigación operativa

Uso del programa Lingo

http://www.lindo.com

María Dolores Frías, Jesús Fernández y Carmen María Sordo

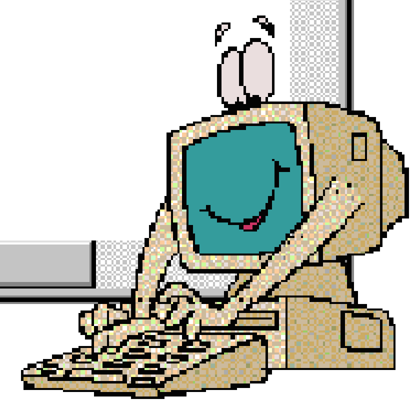
Ejemplo

Resolución del problema anterior con un software de Investigación operativa: Lingo

(http://www.lindo.com)

C:\MISDOC~1\ELECTRO

```
MIN = 30*X1C + 38*X2H + 33*X2C + 42*X3H + 29*X4H + 34*X4C;
X1C < 4000;
X2H < 5000;
X2C < 6000;
X3H < 7000;
X4H < 3000;
X4C < 8000;
[Pedido_Hornos] X2H + X3H + X4H > 8000;
[Pedido_Cocinas] X1C + X2C + X4C > 12000;
```



Lingo es un software específico para resolver problemas de optimización, tanto lineales como no lineales

Ejemplo

Solución:

Optimal solution found at step: 2
Objective value: 663000.0

Valor óptimo

Variable	Value	Reduced Cost
X1C	4000.000	0.0000000E+00
X2H	5000.000	0.0000000E+00
X2C	6000.000	0.0000000E+00
X3H	0.00000E+00	4.000000
X4H	3000.000	0.0000000E+00
X4C	2000.000	0.0000000E+00

Valores de las variables de decisión

Costes reducidos: indican la modificación a aplicar a los coeficientes de la función objetivo para que la variable pase a ser no nula

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	663000.0	1.000000
R1	0.0000000E+00	4.000000
R2	0.0000000E+00	0.0000000E+00
R3	0.0000000E+00	1.000000
R4	7000.000	0.0000000E+00
R5	0.0000000E+00	9.000000
R6	6000.000	0.0000000E+00
PEDIDO_HORNOS	0.0000000E+00	-38.00000
PEDIDO_COCINAS	0.0000000E+00	-34.00000

Precios duales: miden la sensibilidad del valor óptimo ante cambios en los términos de la derecha de las restricciones

Holguras en las restricciones