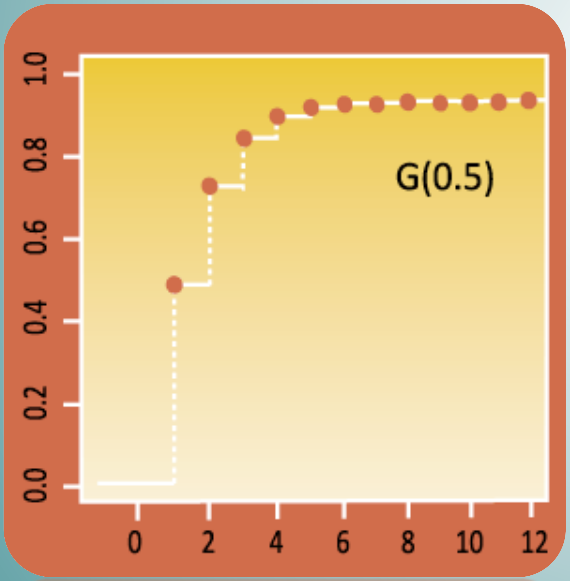
Estadística y Métodos Numéricos

Tema 2. Variable Aleatoria



Ángel Barón Caldera
Ángel Cobo Ortega
María Dolores Frías Domínguez
Jesús Fernández Fernández
Francisco Javier González Ortiz
Carmen María Sordo García

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

TEMA2: Variable Aleatoria

Definición

Variables aleatorias discretas

Variables aleatorias continuas

Función de distribución

Medidas de una distribución

Variable Aleatoria

Define de forma numérica los resultados de un experimento aleatorio. (Función que asigna a cada suceso un número).

1. Número de puntos que aparece en la cara superior de un dado al lanzarlo. $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$
2. Número de artículos defectuosos por lote. $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,\ldots n\}$
3. Número de personas que entran al día en una tienda, $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,\ldots n, \ldots.\}$
4. Altura de los alumnos de estadística $x \in R$
5. Suma que aparece al lanzar dos dados. $x \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Variable Aleatoria

Una **variable aleatoria** unidimensional es una función definida para todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio tal que se verifican las siguientes condiciones:

1) Los valores de la función son números reales

2) La probabilidad P(X≤x) del suceso {X≤x} está definida de forma única y consistente con el espacio de probabilidad.

Discretas: Entre dos valores próximos toma a lo sumo un número finito de valores. E.g. número de artículos defectuosos

Continuas: Entre dos valores próximos toma un número infinito de valores. E.g. peso de los individuos de una población.

Ejemplo:

Experimento aleatorio:
lanzar dos dados (no trucados)

Variable aleatoria: función que hace corresponder a cada resultado del experimento la suma de ambos dados.

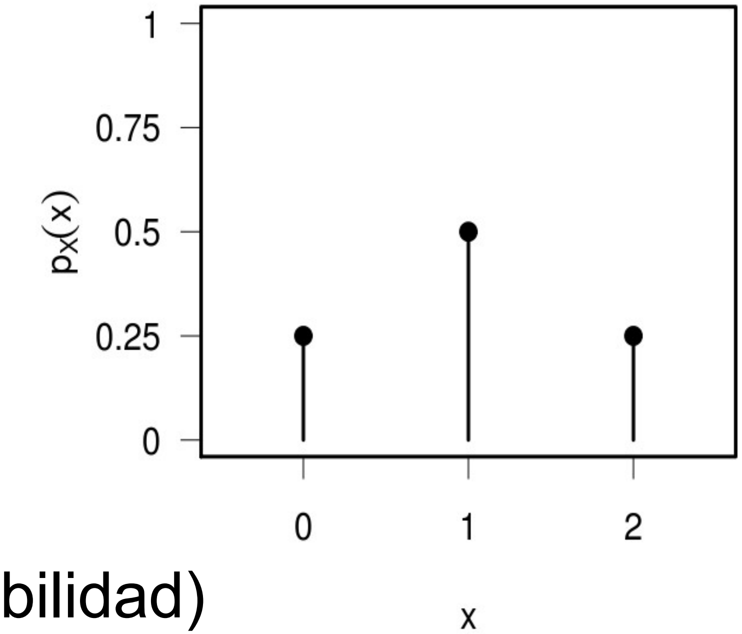
sucesos → Variable aleatoria (x_i)

- 1-1 → 2
- 1-2 → 3
- 1-3 → 4
- ….
- 3-1 → 4
- …
- ….
- 6-5 → 11
- 6-6 → 12

V.A. Discreta: fc. Probabilidad

Asigna a cada posible valor de la variable discreta su probabilidad, $p_X(x)$. Cumple las siguientes propiedades

1. $p_X(x) = P(X=x)$
2. $p_X(x) \geq 0$
3. $\sum_{\forall i} p_X(x_i) = 1$
4. $P(a<X\leq b) = \sum_{a<x_i\leq b} p_X(x_i)$
5. Son valores adimensionales (probabilidad)



Ejemplo: Número de cruces al lanzar 2 monedas

$$\text{Suceso elemental} \xrightarrow{X} R \xrightarrow{p_X(x)} [\,0\,,1\,]$$

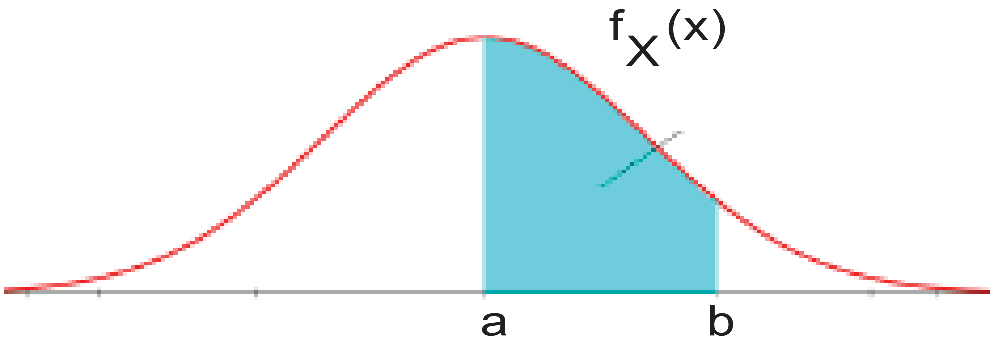
ω_i	x_i	$P(X=x_i)$
CC	0	1/4
CX	1	1/2
XC	1	
XX	2	1/4

$$p_X(x) = \begin{cases} ¼ & \text{si } x=0 \text{ o } x=2 \\ ½ & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

V.A. Continua: fc. Densidad

$f_X(x)$, es una función que cumple:

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\int_R f_X(x) = 1$
3. $P(a<X\leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$



4. La función densidad **no** es la probabilidad de x.
5. Su valor tiene dimensiones del inverso de la variable

Identificamos la probabilidad de un intervalo como el área bajo la f. densidad

Ejemplo:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2/27 & \text{si } 0<x<a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar el valor de la constante de normalización a

Función de Distribución

$F_X(x)$, función que asigna a cada valor de X la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales que x:

$$\mathbf{F_X(x) = P(X \leq x)}$$

v. a. discreta: $F_X(x) = P(X\leq x)=\sum_{x_i \leq x} p_X(x_i)$

v. a. continua: $F_X(x) = P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x')\, dx'$

Ejemplo: Número de caras al lanzar 2 monedas

sucesos	V.A. (x_i)	$p_X(x_i)$
CC	0	1/4
CX, XC	1	1/2
XX	2	1/4

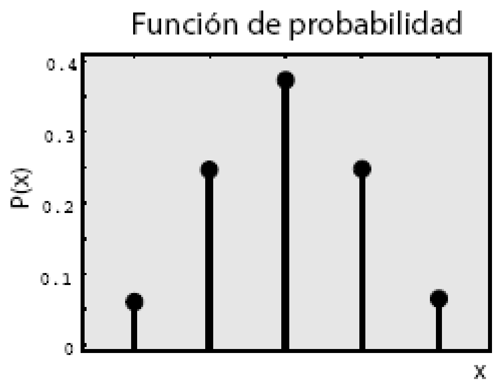
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0\leq x<1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1\leq x<2 \\ 1 & \text{si } 2\leq x \end{cases}$$

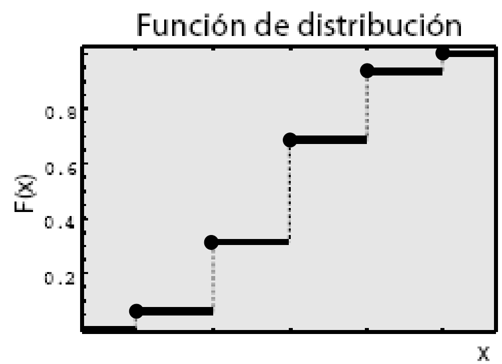
Propiedades de Fc. Distribución

1. $F_X(-\infty) = 0$
2. $F_X(\infty) = 1$
3. Monótona no decreciente
4. Continua por la derecha
5. $P(a<X\leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

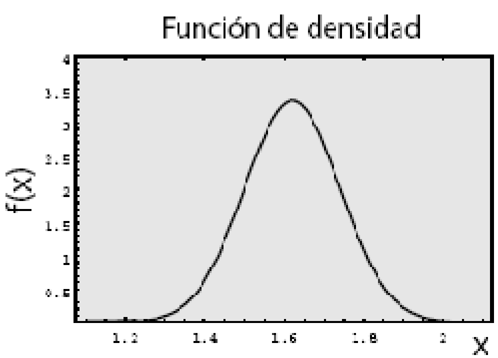
6. $P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-)$. En particular, si X es una v.a. continua $P(X=x)=0 \quad \forall x$

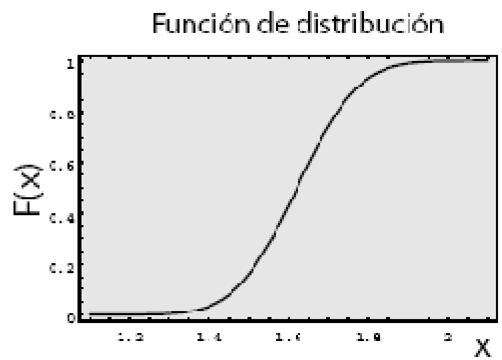
Fc. Distribución



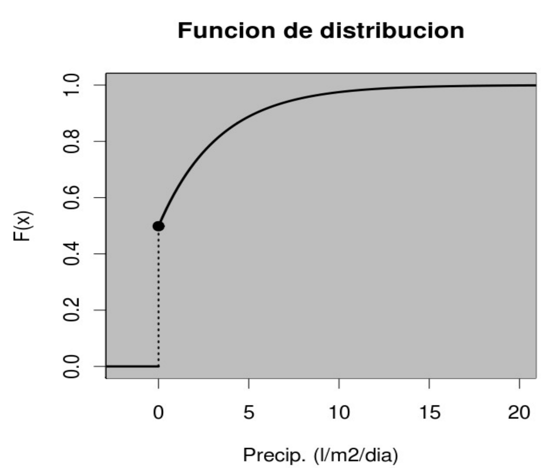


V.A. discreta: Número caras al lanzar 4 monedas





V.A. continua: Altura de los individuos de una población



V.A. mixta: lluvia recogida en un día en Santander

Ejercicio

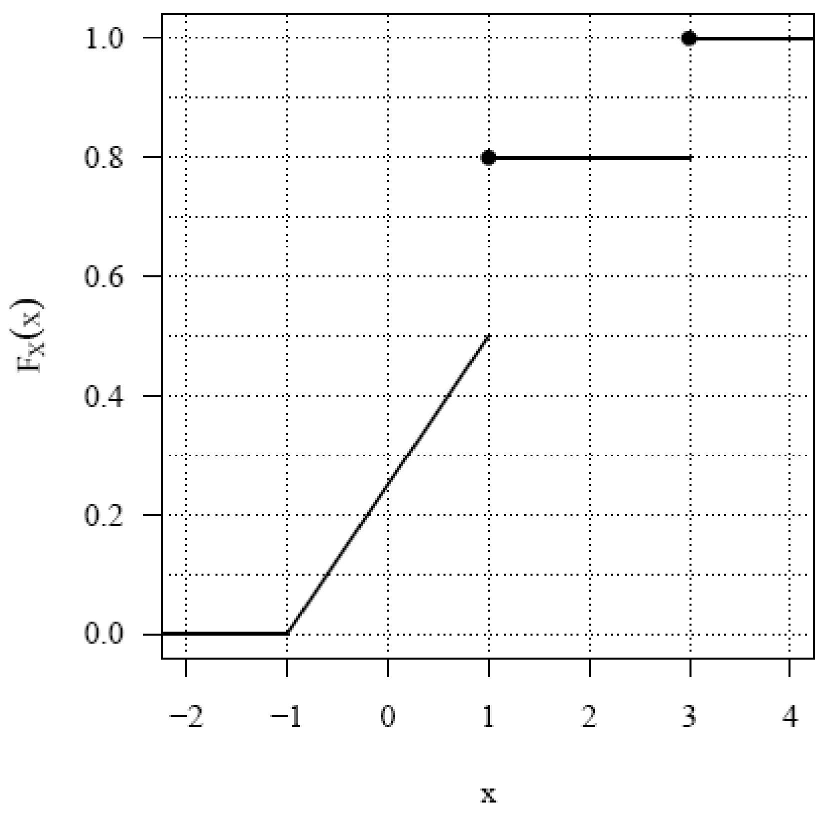
1.14 Contestar razonadamente a las siguientes preguntas referidas a la figura

a) La función representada, ¿puede ser función de distribución de alguna variable aleatoria?. Si es así, ¿de qué tipo de variable aleatoria se trata?

b) ¿Cuánto vale $P(X = 0)$?

c) ¿Cuánto vale $P(X = 1)$?

d) ¿Cuánto vale $P(X \leq 2)$?



Ejercicio

Dada la función $f(x) = a(1 + x^2)$ si $x \in [0, 3]$ (y 0 en otro caso)

$a)$ Hallar el valor de a para que sea una función de densidad.

Medidas de una distribución

Valores numéricos que describen la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.

- Método más sencillo que el uso de funciones (distribución, probabilidad, densidad)
- Descripción incompleta.

Medidas de posición: Cuantiles, deciles, cuartiles.

Medidas de localización: Informan sobre la localización de la distribución. Media y mediana.

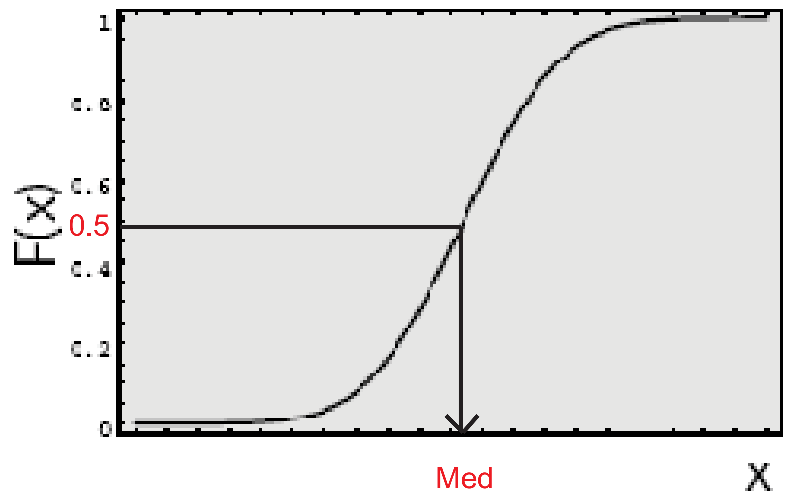
Medidas de dispersión: Miden el grado de variabilidad de la distribución. Varianza, desviación típica, rango intercuartílico.

Medidas de Posición

Cuantil de orden α, q_α

Cualquier valor que verifique: $P(X \leq q_\alpha) \geq \alpha \quad P(X \geq q_\alpha) \geq 1-\alpha$

Mediana, Med(X) : $q_{0,5}$



Cuartiles:

$Q_1 = q_{0.25}$

$Q_2 = q_{0.5}$

$Q_3 = q_{0.75}$

Ejemplo: $f_X(x) = \begin{cases} 0.34x+0.83 & 0<x<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 0.17x^2+0.83x & 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } 1\leq x \end{cases}$

$P(X\leq q_{0,25})=0,17q_{0,25}^2+0,83q_{0,25}=0,25 \Rightarrow q_{0,25}=0,2846$

$P(X\leq q_{0,5})=0,17q_{0,5}^2+0,83q_{0,5}=0,5 \Rightarrow q_{0,5}=0,5422$

Medidas de Localización

Esperanza matemática o media, E(X) o μ_X

V.A. Discreta: $E(X) \equiv \mu_X = \sum_i x_i p_X(x_i)$

V.A. Continua: $E(X) \equiv \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$

E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c donde X e Y son v.a. y a,b,c en R

Ejemplo:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}2 \text{ para } x=0 \\ 0{,}8 \text{ para } x=1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

E(X) = 0*0,2+1*0,8 = 0,8

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^1 x*1dx = 0{,}5$$

Medidas de Dispersión

Varianza var(X) o σ^2

$$var(X) \equiv \sigma_X^2 = E\left(\left(X - \mu_X\right)^2\right)$$

V.A. Discreta: $var(X) \equiv \sigma_X^2 = \sum_i \left(x_i - \mu_X\right)^2 p_X(x_i)$

V.A. Continua: $var(X) \equiv \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu_X\right)^2 f_X(x)dx$

Desviación típica, dev(X) o σ: raiz cuadrada de la varianza

Rango Intercuantílico: $Q_3 - Q_1$

Ejemplo:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}2 \text{ para } x=0 \\ 0{,}8 \text{ para } x=1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

$Var(X) = (0-0{,}8)^2*0{,}2+(1-0{,}8)^2*0{,}8 = 0{,}16$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } 0\leq x\leq 1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

$Var(X) = \int_0^1 (x-0{,}5)^2*1dx = 0{,}08$

Ejercicio

Dada la función $f(x) = a(1 + x^2)$ si $x \in [0, 3]$ (y 0 en otro caso)

a) Hallar el valor de a para que sea una función de densidad.

b) Hallar el valor esperado y la varianza de la distribución.

c) Hallar la probabilidad de que la variable aleatoria sea mayor que su valor esperado.

Media y Varianza

Sea Y=aX+b, donde a y b son contantes y X e Y variables aleatorias

$$\mu_Y = a\mu_X + b \qquad \sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

Se puede pasar de una variable aleatoria X de media μ_X y varianza σ^2 a otra $Y=(X-\mu_X)/\sigma$ con media 0 y varianza 1. Estandarización de la variable aleatoria X.

Ejercicio

La demanda, expresada en toneladas, de un determinado producto es una variable aleatoria cuya función de densidad es :

$$f_X(x) = \begin{cases} x/6 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Cuales son la media, la varianza y la mediana de esta demanda?

Suponiendo que los beneficios Y del producto pueden obtenerse a partir de la demanda mediante la fórmula Y=c+dX, se pide:

1. Calcular los beneficios esperados
2. Calcular la varianza de los beneficios

Ejercicio

Dada la función densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2/27 & 0<x<a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Determinar el valor de la constante de normalización a y representar gráficamente la función densidad.

2. Su función de distribución F(x). Representarla gráficamente.

3. Obtener $P(1<x<2)$ y $P(x>2)$