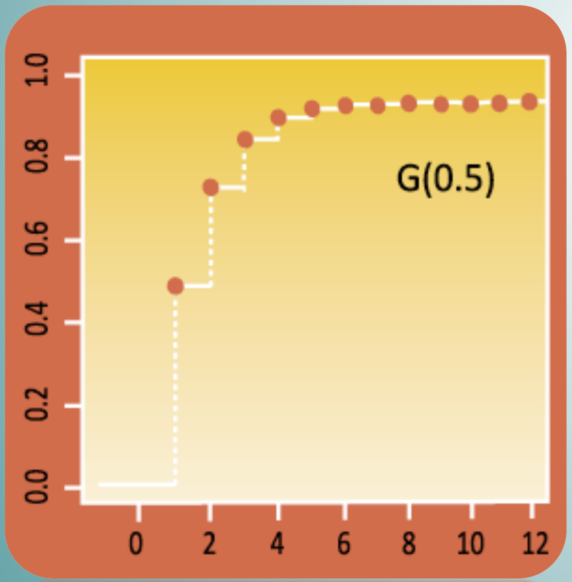
Estadística y Métodos Numéricos

Tema 2. Probabilidad



Ángel Barón Caldera
Ángel Cobo Ortega
María Dolores Frías Domínguez
Jesús Fernández Fernández
Francisco Javier González Ortiz
Carmen María Sordo García

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

TEMA2: Probabilidad

Experimento aleatorio

Probabilidad

Probabilidad condicionada

Regla del producto

Independencia de sucesos

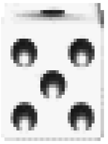
Teorema de la probabilidad total

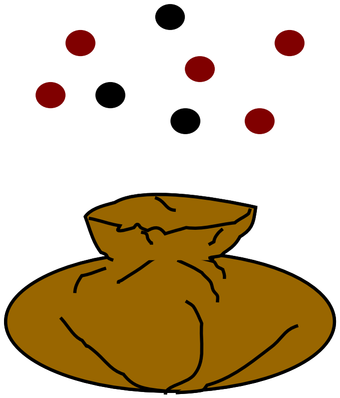
Teorema de Bayes

Experimentos

Aleatorio: Cualquier situación que, realizada en las mismas condiciones, proporcione un resultado imposible de predecir, conociendo de antemano cuáles son todos los posibles resultados.

La probabilidad aparece cuando se analizan experimentos aleatorios

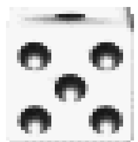


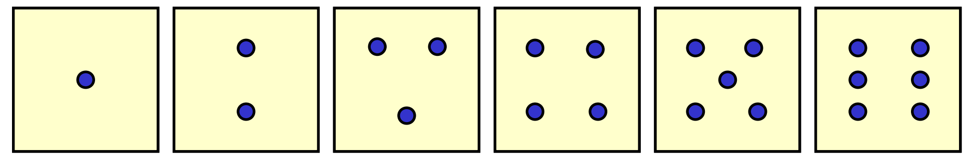


Determinista: Cualquier experimento que al realizarse bajo condiciones específicas conduce siempre al mismo resultado: (lo contrario de un experimento aleatorio).

Suceso Elemental y Espacio Muestral

Suceso elemental: cada uno de los posibles resultados del experimento

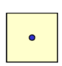
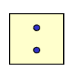
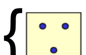
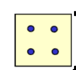
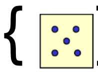
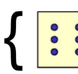




Se suele designar de forma genérica con la letra ω.

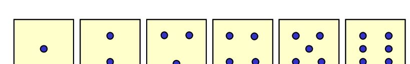
Siempre existe más de un posible resultado.

Pueden ser de cualquier naturaleza (no necesariamente números).

ω_1={  } ω_2={  } ω_3={  } ω_4={  } ω_5={  } ω_6={  }

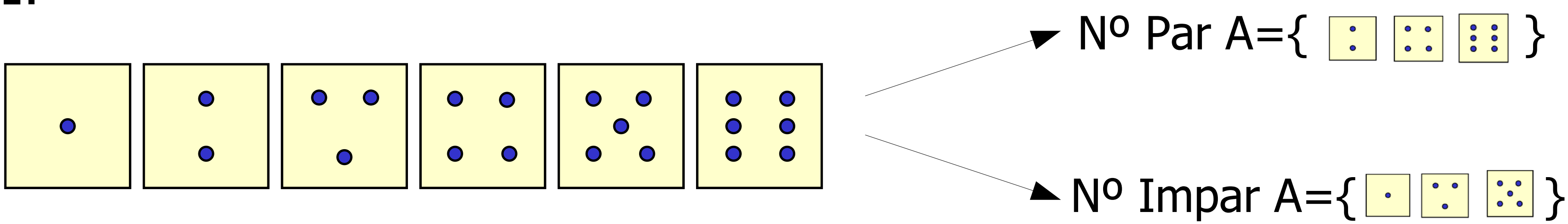
El conjunto de todos los sucesos elementales se denomina **espacio muestral**.

Se suele designar de forma genérica con la letra Ω

Ω={  }

Suceso Compuesto, Seguro e Imposible

Compuesto: Cualquier subconjunto del espacio muestral Ω.



Un suceso compuesto ocurre si y solo si ocurre alguno de los sucesos elementales que lo forman.

Seguro: aquel que siempre ocurre. El suceso seguro es **Ω**

Imposible: aquel que nunca ocurre.El suceso imposible es el conjunto vacío (**Ø**)

Relaciones entre Sucesos

Dos sucesos son **compatibles** si pueden ocurrir en la misma realización del experimento.

$$A \cap B \neq \emptyset$$

En caso contrario se dice que son incompatibles

El suceso **opuesto** de uno dado A es el suceso que ocurre si y solo si no ocurre A.

$$A \cup A^c = \Omega \quad \text{y} \quad A \cap A^c = \emptyset$$

Suceso complementario A^c

Ejemplo:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{2,4,6\}$ y $B=\{1,2\}$ compatibles, $A^c=\{1,3,5\}$ $B^c=\{3,4,5,6\}$

$A=\{2,4,6\}$ y $C=\{1,3,5\}$ incompatibles, $C^c=A$

Probabilidad

Clásica: Hay un número finito de resultados igualmente verosímiles que cubren todas las posibilidades

$$P(A) = \frac{resultados \quad favorables}{resultados \quad posibles}$$

Limitado a juegos de azar por la condición exigida de que todos los resultados deben ser igualmente verosímiles.

Probabilidad

Frecuentista: Situaciones prácticas que pueden repetirse en condiciones idénticas. Probabilidad verificable mediante experimentación.

<u>Variabilidad aleatoria a corto plazo</u>: Los resultados varían de una realización a otra de forma impredecible.

<u>Regularidad a la larga</u>: El cociente entre el número de veces que ocurre el suceso A (n_A) y el número total de repeticiones del experimento n parece converger a un límite cuando n crece.

Probabilidad P(A) del suceso A es el límite de la frecuencia relativa n_A/n del suceso A cuando el número de repeticiones n crece indefinidamente.

Probabilidad

Dado un espacio muestral Ω, una probabilidad P es una función que hace corresponder a todo suceso del espacio muestral un número real no negativo y que verifica los siguiente axiomas:

1. La probabilidad del suceso seguro es la unidad

$$P(\Omega) = 1$$

2. Si A_1, A_2,... A_n es una sucesión de sucesos disjuntos dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$), entonces la probabilidad de la unión de todos ellos es la suma de sus probabilidades:

$$P(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... P(A_n)$$

Para cualquier suceso A definiremos su probabilidad P(A) como una medida de A que tomará un valor entre 0 y 1.

Propiedades de la Probabilidad

1. La probabilidad de un suceso más la de su complementario suman 1

$$P(A^c)=1-P(A)$$

2. La probabilidad del suceso imposible es nula

$$P(\emptyset)=0$$

3. Si A es un suceso que incluye al suceso B ($B\subseteq A$), se tiene

$$P(B) \leq P(A) \qquad P(A-B)\equiv P(A\cap B^c)=P(A)-P(B)$$

4. La probabilidad de cualquier suceso no puede ser mayor de 1

$$P(A)\leq 1,$$

5. Si A y B son dos sucesos cualesquiera se cumple (regla de la adición):

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Ejercicio

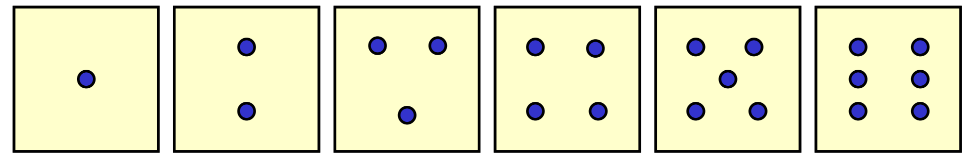
Sean A y B sucesos de un mismo espacio muestral tales que:

$P(B)=0.4$ $P(A \cup B)=0.7$ $P(A \cap B)=0.3$

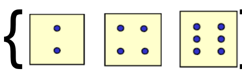
Calcular: $P(A^c)$

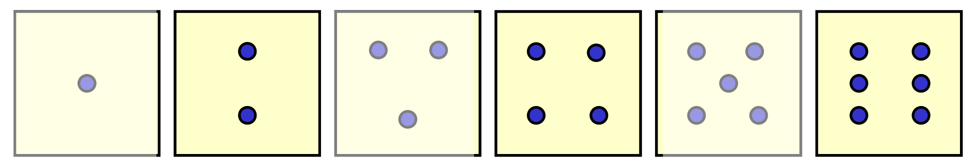
Probabilidad Condicionada

Al lanzar un dado



se sabe que ha salido un número par.

B={}



¿Cuál es la probabilidad de un suceso A conociendo está información?

Probabilidad Condicionada

La **probabilidad condicionada, P(A|B)**, "mide" la probabilidad relativa de A con respecto al espacio reducido B.

Sea un espacio muestral y un suceso B tal que P(B) > 0. Se define:

$$P(A|B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

P(· |B) es una nueva medida de probabilidad

A|B **NO ES UN SUCESO**, | **NO ES UNA OPERACIÓN ENTRE SUCESOS!**

Regla del producto: $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Independencia de Sucesos

Sea un espacio muestal y los sucesos A, B tales que $P(B) > 0$, se dice que **A es independiente de B** si el conocimiento de que ha ocurrido B no altera la probabilidad de A:

$$P(A|B) = P(A)$$

Sea un espacio muestral y un conjunto dos o más sucesos $A_1, \ldots, A_n$. Se dice que estos n sucesos son independientes entre sí si se verifica:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n)$$

y, además, todos los sucesos de cualquier selección formada por n-1 sucesos tomados de entre $A_1, \ldots, A_n$ son independientes entre sí.

Ejercicio

De una baraja de 40 cartas se extre una al azar. Comprobar cuales de los siguientes pares de sucesos son independientes:

1. A={rey}, B={espadas}
2. A={figuras}, B={espadas}
3. A={rey}, B={figuras}

1. $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\text{rey de espadas})}{P(\text{espadas})} = \dfrac{1/40}{1/4} = 1/10$

   $P(A) = P(\text{rey}) = 1/10$

2. $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\text{figura de espadas})}{P(\text{espadas})} = \dfrac{3/40}{1/4} = 3/10$

   $P(A) = P(\text{figuras}) = 3/10$

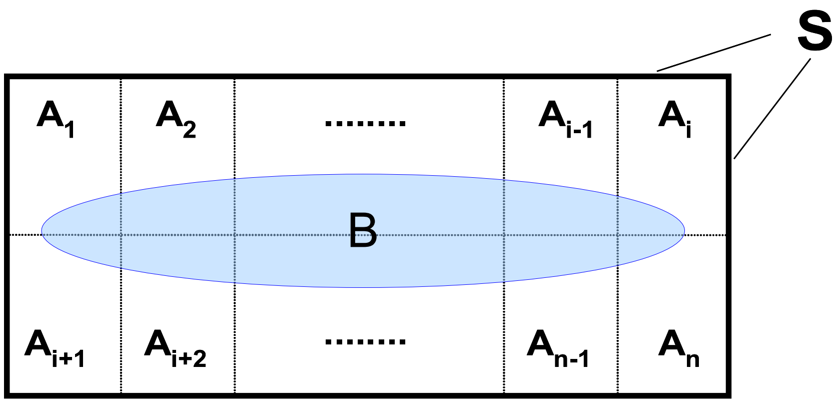
3. $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\text{rey})}{P(\text{figuras})} = \dfrac{1/10}{3/10} = 1/3$

   $P(A) = P(\text{rey}) = 1/10$

Teor. Probabilidad Total

Supongamos que sobre el espacio muestral S tenemos una partición A_i, con i = 1, ..., n. Su unión es el total y los sucesos son incompatibles dos a dos.

Esto significa que cualquier suceso elemental de S necesariamente debe estar en uno y sólo uno de los eventos A_i

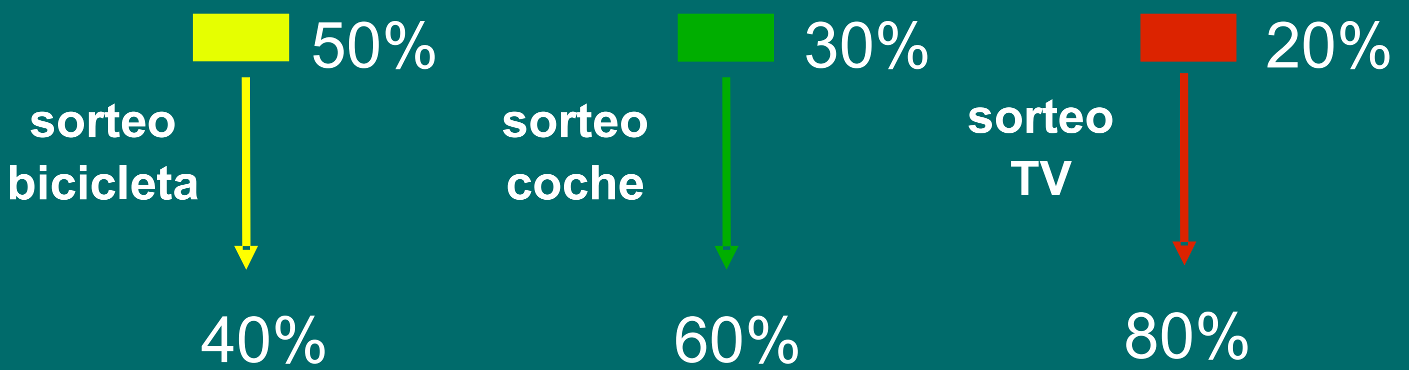


¿Cual es la probabilidad del suceso B, P(B)?

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)$$

Ejercicio

En un saco hay papeletas de 3 colores con las siguientes probabilidades de ser elegidas:



Probabilidad de ganar en cada concurso

¿Qué probabilidad tienes de ganar en el sorteo?

$P(G) = P(G \cap Amarillo) + P(G \cap Verde) + P(G \cap Rojo) = P(G|Amarillo)$
$P(Amarillo) + P(G|Verde)P(Verde) + P(G|Rojo)P(Rojo) = 0.54$

Teor. Bayes

Supongamos ahora que B ocurre, ¿cuál de los sucesos A_i ha ocurrido?

¿$P(A_i|B)$? $i = 1, ..., n$

Teorema de Bayes:
parte de una situación en la que es posible conocer las probabilidades de que ocurran una serie de sucesos A_i.

Conociendo que ha ocurrido el suceso B, la fórmula del teorema de Bayes nos indica como modifica esta información las probabilidades de los sucesos A_i.

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Ejercicio

En un saco hay papeletas de 3 colores con las siguientes probabilidades de ser elegidas:

50% 30% 20%

sorteo bicicleta **sorteo coche** **sorteo TV**

40% 60% 80%

Probabilidad de ganar en cada concurso

¿Sabemos que Pablo ha ganado el sorteo, que probabilidad hay de que Pablo haya ganado una bicicleta?

$$P(\text{Amarillo}|G)=\frac{P(G\cap\text{Amarillo})}{P(G)}=\frac{P(G|\text{Amarillo})P(\text{Amarillo})}{P(G)}=\frac{0{,}4*0{,}5}{0{,}54}$$

Ejercicio

La probabilidad de que una persona, seleccionada al azar, sea diabética es 0,03. Además en el 95% de las personas diabéticas los niveles de glucosa en sangre son superiores a 1000 mg/l, mientras que para las personas sanas ésto sólo ocurre el 2%.

Supongamos que al realizar un análisis de sangre los niveles de glucosa de una persona son superiores a 1.000 mg/l.

¿Cuál es la probabilidad de que esa persona sea diabética?