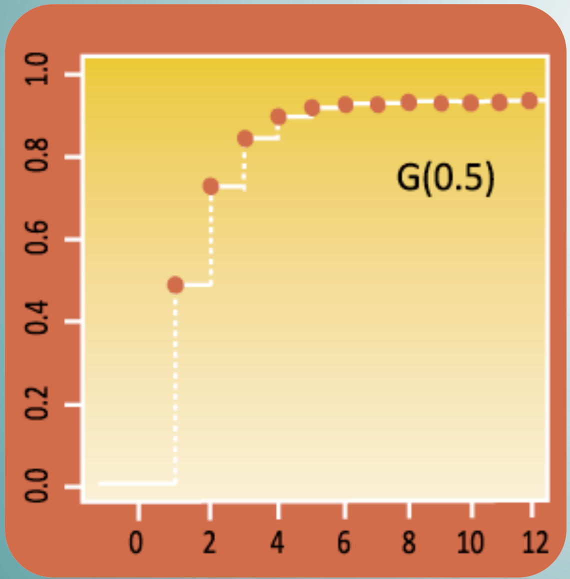
Estadística y Métodos Numéricos

Tema 3. Distribuciones Comunes



Ángel Barón Caldera
Ángel Cobo Ortega
María Dolores Frías Domínguez
Jesús Fernández Fernández
Francisco Javier González Ortiz
Carmen María Sordo García

Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación

Universidad de Cantabria

TEMA 3 · Distribuciones comunes

- **Introducción**
- **Distribuciones discretas comunes**
  - Suceso de Bernoulli
  - Múltiples sucesos de Bernoulli
    - Binomial B(n,p), Geométrica G(p), Binomial negativa BN(r,p)
  - Muestreo sin reemplazamiento. Hipergeométrica HG(N,D,n)
  - Sucesos de Poisson
- **Distribuciones continuas comunes**
  - Tiempo entre sucesos de Poisson. Exponencial y Gamma
  - La distribución normal
    - Aproximacion de distribuciones discretas mediante la normal

Distribuciones comunes

Un experimento aleatorio tiene asociada una distribución de probabilidad arbitraria.

Existen numerosos problemas reales con características similares que tienen asociados una misma distribución de probabilidad común a todos ellos (salvo quizá algún parámetro para adecuarla al problema concreto).

- **Cambio de notación:**
  - **Tema 2: X**
  - **A partir de ahora, algunas X tendrán nombre. e.g: B(n,p) G(p)**

$$p_X(x) \quad \longrightarrow \quad p_{B(n,p)}(x) \equiv p_B(x; n, p)$$

Distribuciones comunes

Veremos una serie de distribuciones de probabilidad con nombre propio. Para cada una de ellas veremos:

- Motivación práctica / condiciones para su uso
- Valores posibles de la v.a. y de sus parámetros
- Función de probabilidad (discr.) o densidad (cont.)
- Función de distribución (si se puede escribir de forma sencilla)
- Valor esperado y varianza en función de los parámetros

Suceso de Bernoulli

Es el experimento aleatorio más sencillo en el que sólo son posibles dos resultados:

x=1 (éxito) **x=0 (fracaso).**

El éxito se obtiene con probabilidad *p*.

Ejemplo:

Lanzar una moneda al aire y ver si sale cara (éxito). p=0.5

Experimentos con más valores posibles pueden reducirse al de Bernoulli: Lanzar un dado

Obtener un 6 (éxito, p=1/6) o no (fracaso, q = 1-p = 5/6)

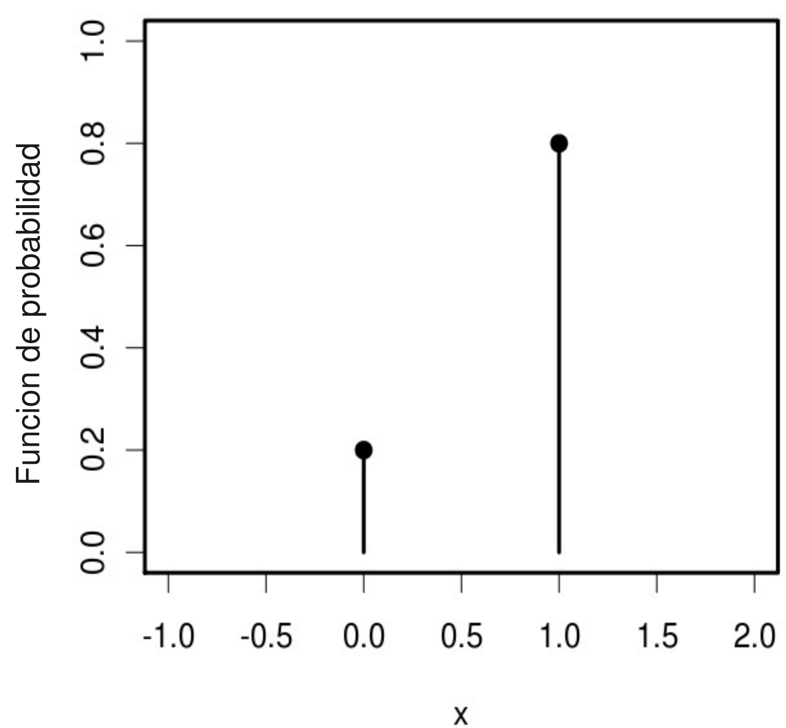
Suceso de Bernoulli

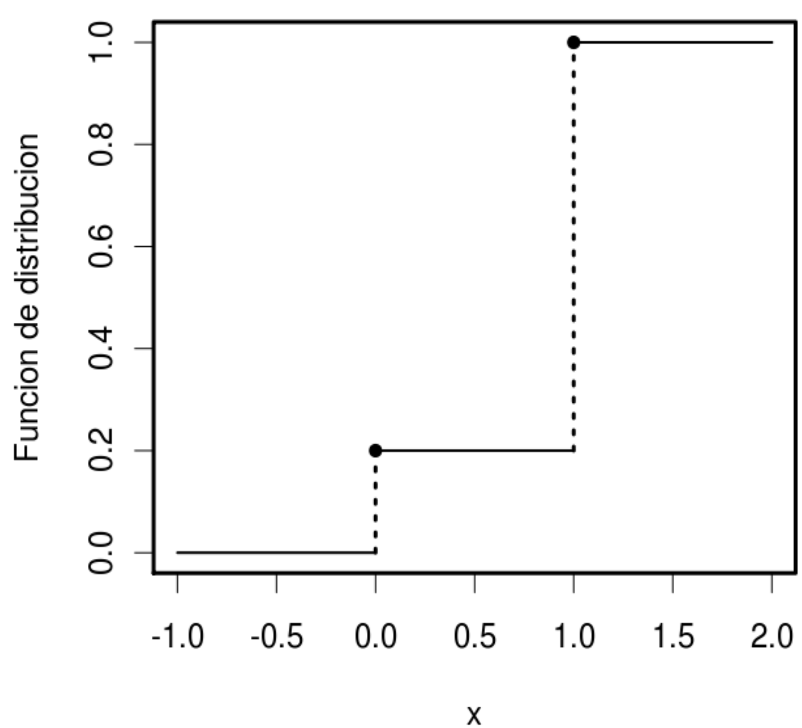
$$p_X(x) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x = 0 \\ p & \text{si } x = 1 \end{cases} = p^x(1-p)^{1-x};\ x = 0, 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\mu_X = p$$

$$\sigma_X^2 = p(1-p)$$





Binomial B(n,p)

Una variable aleatoria X se llama binomial si su valor es igual al número de éxitos que ocurren en n pruebas independientes de Bernoulli teniendo todas la misma probabilidad de éxito p.

- Sucesión de n intentos idénticos.
- En cada intento sólo son posibles dos resultados: éxito o fracaso.
- La probabilidad de éxito (p) es la misma en todos los intentos.
- Los intentos son independientes.

Ejemplo:

El número de caras obtenido al lanzar una moneda al aire 20 veces es una variable Binomial de parámetros B(20, 0.5)

Binomial B(n,p)

Una variable aleatoria X se llama binomial si su valor es igual al número de éxitos que ocurren en n pruebas independientes de Bernoulli teniendo todas la misma probabilidad de éxito p.

Propiedad reproductiva respecto al parámetro n:

Si $X \sim B(n_1, p)$ e $Y \sim B(n_2, p)$ son variables aleatorias independientes, entonces:

$$X+Y \sim B(n_1+n_2, p)$$

Binomial B(n,p)

- **Función de probabilidad:**

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \ldots, n$$

Combinaciones posibles con x éxitos

Probabilidad de obtener x éxitos

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

En la calculadora:
nCr

`choose(n,x)`

Binomial B(n,p)

- **Función de probabilidad:**

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, \ldots, n$$

`dbinom(x,n,p)`

- **Función de distribución:**

No tiene forma analítica sencilla

`pbinom(x,n,p)`

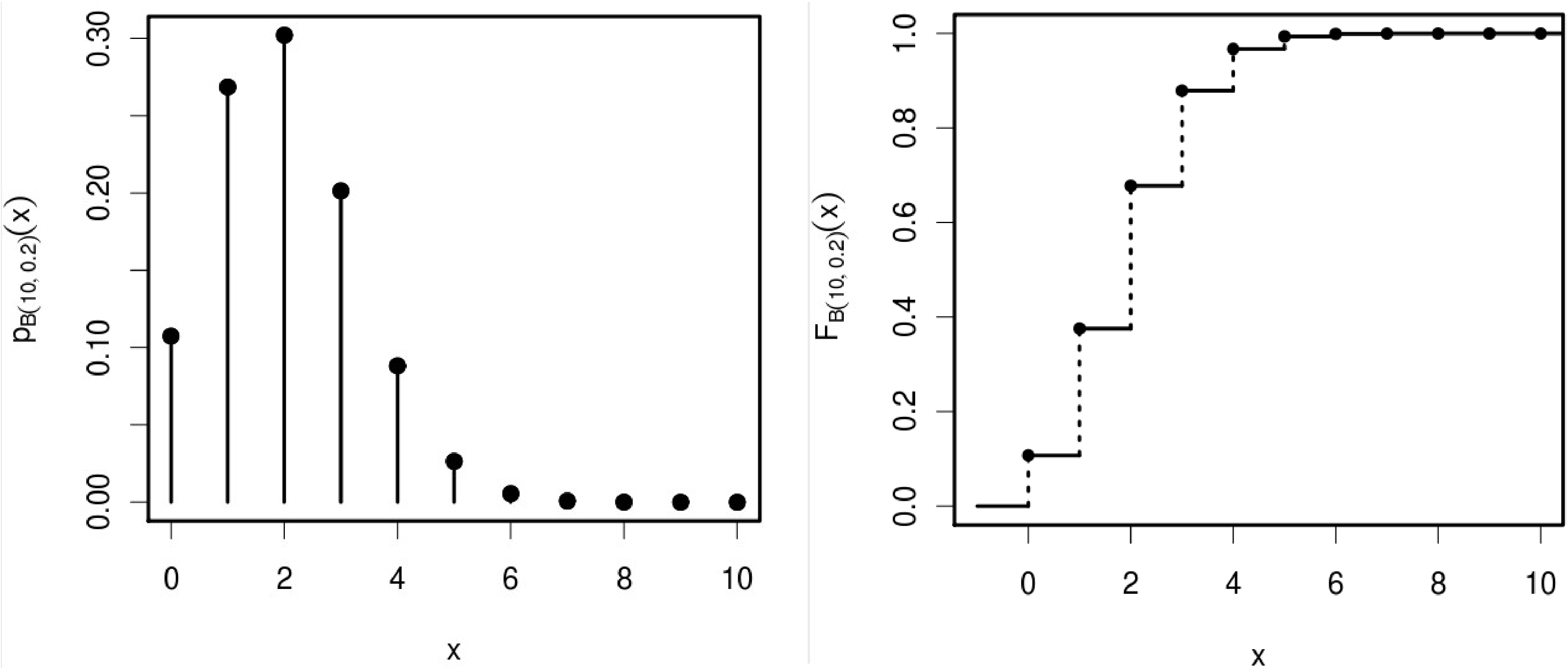
Valor esperado

$$\mu = n\,p$$

Varianza

$$\sigma^2 = n\,p\,(1-p)$$

Binomial   B(10,0.2)



R tip

```
> n <- 10; p <- 0.2; x.i <- 0:10
> barplot(dbinom(x.i,n,p), names.arg=x.i)
> curve(pbinom(x,n,p),-1,10,1000,ylim=c(0,1))
```

Geométrica G(p) y Bin Neg BN(r,p)

Bajo las mismas condiciones de la distribución binomial (múltiples sucesos de Bernoulli independientes teniendo todos la misma probabilidad de éxito *p*), se definen las variables aleatorias

- **G(p) → Geométrica o de Pascal: cuenta el número de intentos hasta que se obtiene el primer éxito.**

  $$x = 1, 2, 3, \ldots$$

- **BN(r, p) → Binomial negativa: cuenta el número de intentos hasta que se obtiene el r-ésimo éxito.**

  $$x = r, r+1, r+2, \ldots$$

Geométrica   G(p) y Bin Neg BN(r,p)

Bajo las mismas condiciones de la distribución binomial (múltiples sucesos de Bernoulli independientes teniendo todos la misma probabilidad de éxito *p*), se definen las variables aleatorias

Ejemplo:

El número de veces que tengo que lanzar una moneda al aire hasta que obtengo cara por primera vez es una variable aleatoria geométrica G(0.5)

El número de veces que tengo que lanzar un dado hasta que me sale un 6 por tercera vez es BN(3, 1/6)

Geométrica G(p) y Bin Neg BN(r,p)

Variable geométrica:

$$p_{G(p)}(x) = p\,(1-p)^{x-1};\ x = 1, 2, \ldots \qquad \mu_{G(p)} = \frac{1}{p}$$

$$F_{G(p)}(x) = 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor};\ x \geq 1 \qquad \sigma^2_{G(p)} = \frac{1-p}{p^2}$$

Variable binomial negativa:

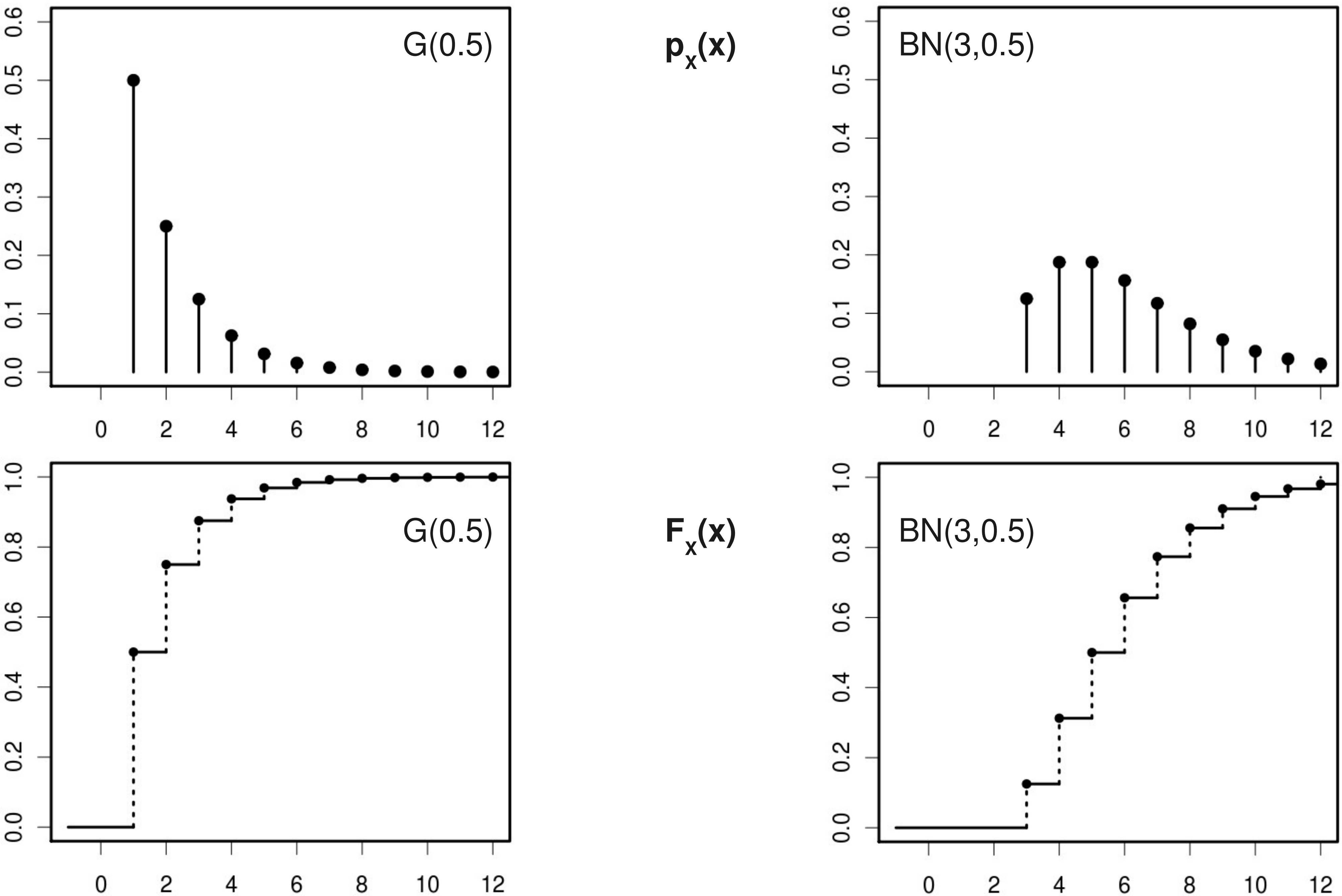
$$p_{BN}(x; r, p) = \binom{x-1}{r-1} p^r\,(1-p)^{x-r};\quad x = r, r+1, \ldots$$

$F_{BN}(x; r, p)$ no tiene forma analitica sencilla

$$\mu_{BN(r,p)} = \frac{r}{p} \qquad \sigma^2_{BN(r,p)} = r\,\frac{1-p}{p^2}$$

G(p) = BN(1,p)

Geométrica G(p) y Bin Neg BN(r,p)



Ejercicio

3.1 Como parte de un entrenamiento diario en el Real Madrid, cada delantero debe anotar 20 penaltis. Cristiano Ronaldo tiene una tasa de acierto en lanzamientos desde el punto de penalti del 90 %. Para este jugador se pide:

a) Función de probabilidad del número de lanzamientos que tiene que realizar hasta que termina esta parte del entrenamiento.

b) Función de probabilidad del número de lanzamientos hasta que marca el primer penalti.

c) Si cada lanzamiento le lleva 30 segundos, ¿Cuál es la función de probabilidad del tiempo que tarda en terminar esta parte del entrenamiento?

Hipergeométrica, HG(N,D,n)

Dada una poblacion finita de N elementos, en la que hay D elementos “especiales” (con alguna propiedad que los diferencia del resto), la variable hipergeométrica cuenta el número de elementos especiales en una muestra sin reemplazamiento de tamaño n tomada de esa población.

Ejemplo:

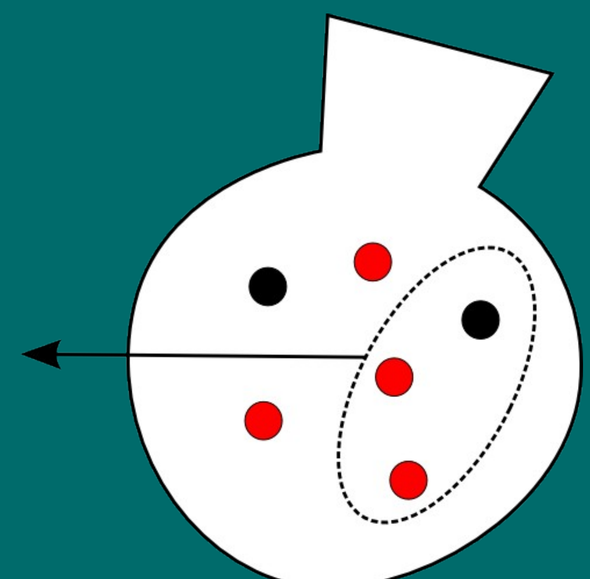
En el experimento de la derecha

$N = 6$

$D = 4$

$n = 3$

$x = 2$



Hipergeométrica, HG(N,D,n)

$$p_X(x) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} \; ; \qquad \max(0, n-N+D) \leq x \leq \min(n, D)$$

Si llamamos p=D/N, el valor esperado y la varianza resultan:

$$\mu = np \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$$

HG(N,D,n) $\xrightarrow{\quad N \gg n \quad}$ **B(n, D/N)**

Ejercicio

3.7 Para las oposiciones de Justicia, los candidatos a oficiales deben estudiar 35 temas. El dia del examen, se seleccionan de forma aleatoria 3 temas, de los cuales los candidatos deben desarrollar el que ellos elijan. Dado que disponen de esta última libertad, es práctica habitual no estudiar todos los temas, esperando que sea poco probable que de 3 temas al azar no salga ninguno de los que han decidido estudiar.

a) Determinar la probabilidad de que no se haya estudiado ningún tema de los 3 que proponen si se han dejado sin estudiar 10 de los 35 temas.

Poisson, Po(λ)

Una variable aleatoria de Poisson cuenta el número de ocurrencias de un suceso (de Poisson) en un cierto intervalo de tiempo o tramo del espacio.

Ejemplos:

X: "Número de camiones que pasan por un punto de una carretera en una hora"

Y: "Número de peticiones a un servidor web en un día"

Z: "Número de baches en cada kilómetro de una carretera"

X, Y, Z ~ Po

Poisson, Po(λ)

Un proceso de Poisson homogéneo debe satisfacer:

- El número de ocurrencias del suceso en dos periodos de tiempo (tramos del espacio) no solapados son variables aleatorias independientes.
- La probabilidad de ocurrencia de un número x de sucesos de Poisson en dos intervalos de la misma duración t (o longitud) es la misma.
- La probabilidad de que ocurra un único suceso en un intervalo pequeño Δt es proporcional al tamaño del intervalo:

$$P(X_{\Delta t} = 1) = \alpha \Delta t + O(\Delta t^2)$$

- La probabilidad de que ocurra más de un suceso en un intervalo pequeño Δt es despreciable frente a la anterior.

α es la tasa de ocurrencia (unidades: $[\text{tiempo}]^{-1}$ o $[\text{espacio}]^{-1}$) y $\lambda = \alpha t$ es el número medio de ocurrencias (adimensional) en un intervalo de tiempo t fijado en la definición de la v.a.

Poisson, Po(λ)

$$p_{Po(\lambda)}(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}; \quad x = 1, 2, \ldots$$

$$\mu_{Po(\lambda)} = \lambda$$

$$\sigma^2_{Po(\lambda)} = \lambda$$

$F_{Po(\lambda)}(x)$ no tiene forma analítica sencilla

Propiedad reproductiva respecto a su parámetro:

Si *X*~Po(λ_1) e *Y*~Po(λ_2) son v.a. independientes

X+Y ~ Po(λ_1+λ_2)

Aproximación binomial:

p < 0.1 y np > 5

B(n, p) $\longrightarrow$ **Po(np)**

Ejercicio

Un servidor web recibe un número de peticiones por segundo que sigue una ley de Poisson con parámetro 0.2. Determinar:

a) La probabilidad de que se reciban dos peticiones en un segundo.

b) La probabilidad de que se reciban un máximo de 3 peticiones en un segundo.

c) La probabilidad de que el servidor se colapse si no puede atender más de 4 peticiones por segundo.

d) La probabilidad de que se reciban 20 peticiones en un minuto.

TEMA 3 · Distribuciones comunes

- **Introducción**
- **Distribuciones discretas comunes**
  - Suceso de Bernoulli
  - Múltiples sucesos de Bernoulli
    - Binomial B(n,p), Geométrica G(p), Binomial negativa BN(r,p)
  - Muestreo sin reemplazamiento. Hipergeométrica HG(N,D,n)
  - Sucesos de Poisson
- **Distribuciones continuas comunes**
  - Tiempo entre sucesos de Poisson. Exponencial y Gamma
  - La distribución normal
    - Aproximacion de distribuciones discretas mediante la normal

Exponencial, Ex(α)

Cuando se cumplen las hipótesis de un proceso de Poisson homogéneo, se puede definir una variable aleatoria continua T que representa el tiempo que transcurre entre dos sucesos de Poisson.

Probabilidad de que esta variable exceda un tiempo *t* **=** Probabilidad de que no suceda ningún suceso de Poisson en el tiempo *(0, t)*

$$P(T > t) = 1 - F_T(t) \qquad\qquad e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^0}{0!}$$

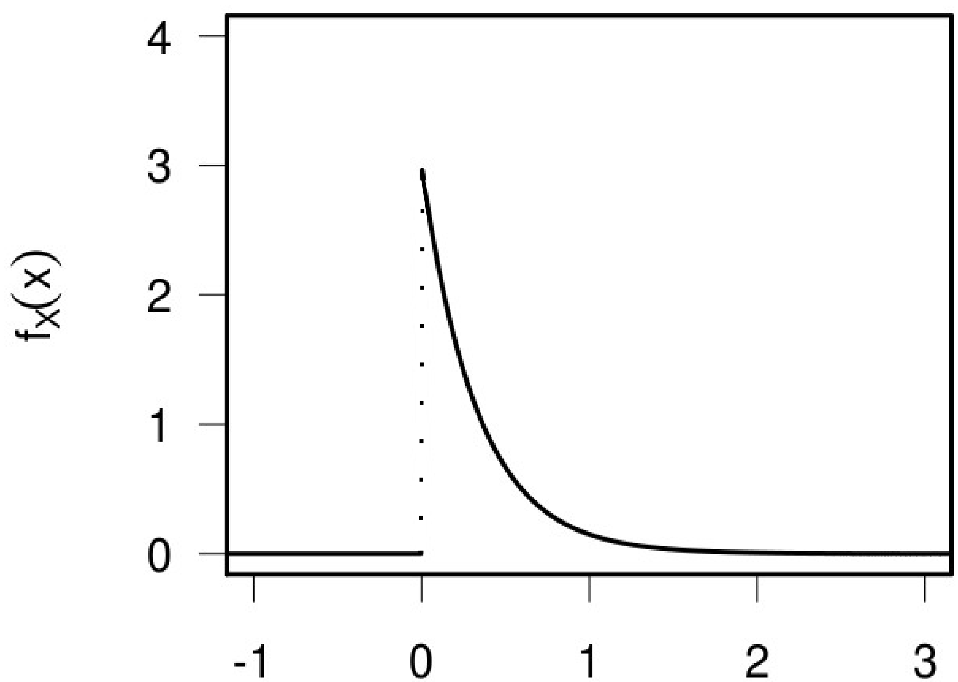
$$F_T(t) = 1 - e^{-\alpha t} \quad ; \quad t \geq 0$$

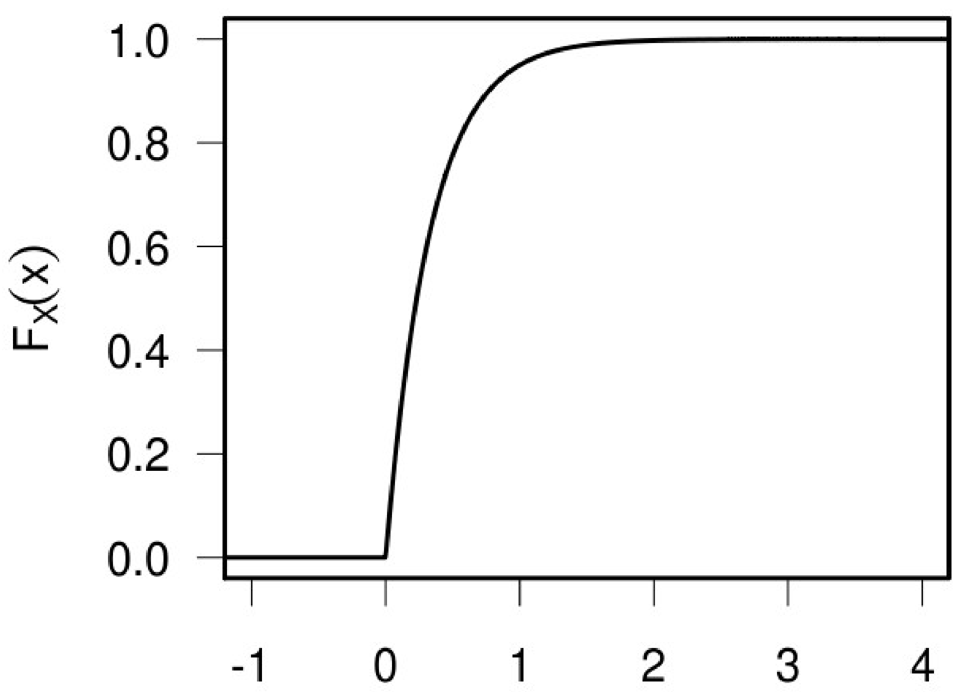
α (tasa de ocurrencia de sucesos) tiene dimensiones [tiempo]$^{-1}$

Exponencial, Ex(α)

Derivando la función de distribución obtenemos la función de densidad:

$$f_T(t) = \alpha e^{-\alpha t}; \;\; t \geq 0 \qquad \mu = \frac{1}{\alpha} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$





Ejercicio

3.10 Si X es una variable Ex(α), calcular $P(X \leq x_0 + x | X > x_0)$

Gamma, Ga(k,α)

Una variable aleatoria positiva T tiene distribución de probabilidad Gamma si su función de densidad es de la forma:

$$f_T(t) = \frac{\alpha^k \, t^{k-1} e^{-\alpha \, t}}{\Gamma(k)}, \quad t > 0.$$

$$\alpha > 0 \qquad k > 0$$

Función Gamma de Euler:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Si k es entero, sirve para modelizar el tiempo que transcurre hasta el k-ésimo suceso de Poisson homogéneo. En tal caso se conoce como distribución de Erlang y Γ(k)=(k-1)!

Ga(1,α) = Ex(α)

Gamma, Ga(k,α)

La media y la varianza son:

$$\mu = \frac{k}{\alpha} \qquad\qquad \sigma^2 = \frac{k}{\alpha^2}$$

La distribución Gamma es reproductiva respecto al parámetro k:

X~Ga(k_1,a) Y~Ga(k_2,a) X e Y independientes

X+Y~Ga(k_1+k_2,a)

Ejercicio

3.12 Jaimito acaba de comprarse un cronómetro y ha bajado a probarlo a la calle, donde sabe que los coches pasan siguiendo una ley de Poisson de media 10 coches/hora. Se sienta en la acera y mide los tiempos entre el paso de los coches.

a) Determinar la función de densidad del tiempo que transcurre entre que pasa un coche y el siguiente.

b) Determinar la función de densidad del tiempo que tiene que esperar hasta que llega el quinto coche.

Normal o gaussiana, N(μ,σ^2)

Es (posiblemente) la distribución más importante:

- **Multitud de fenómenos se comportan según esta distribución: distribución de pesos, alturas, coeficientes de inteligencia, errores en la medida, ... (Teorema del límite central)**
- **Además, se utiliza para aproximar otras distribuciones.**

Normal o gaussiana, N(μ,σ^2)

Depende de dos parámetros, valor medio de la distribución (centro de la curva) y la desviación standard (dispersión respecto de la media).

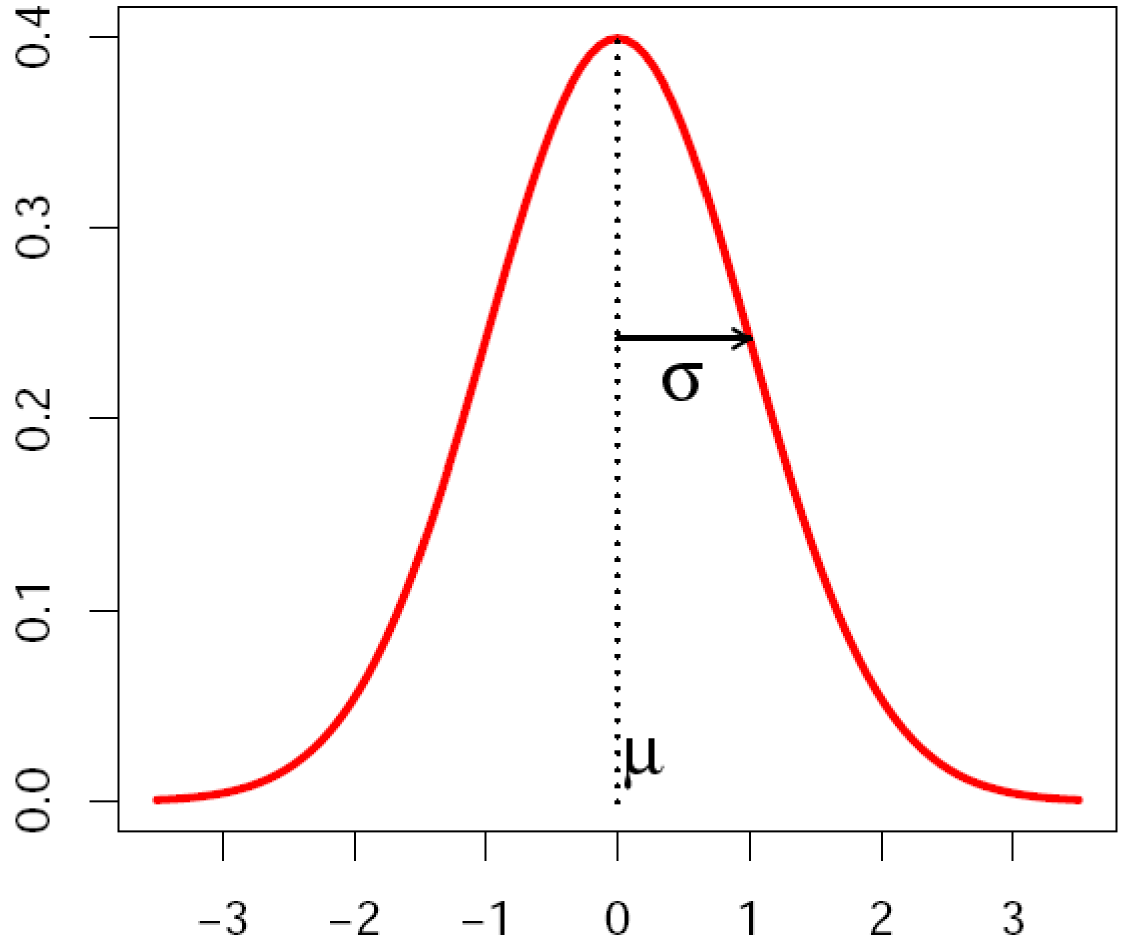
$$E[X] = \mu$$

$$Var[X] = \sigma^2$$

R tip

```
xmin <- -4
xmax <- 4
curve(dnorm(x, 0, 1),xmin,xmax)
```

La curva de densidad es **simétrica**, **unimodal** y con forma de campana. La media la moda y la mediana coinciden.

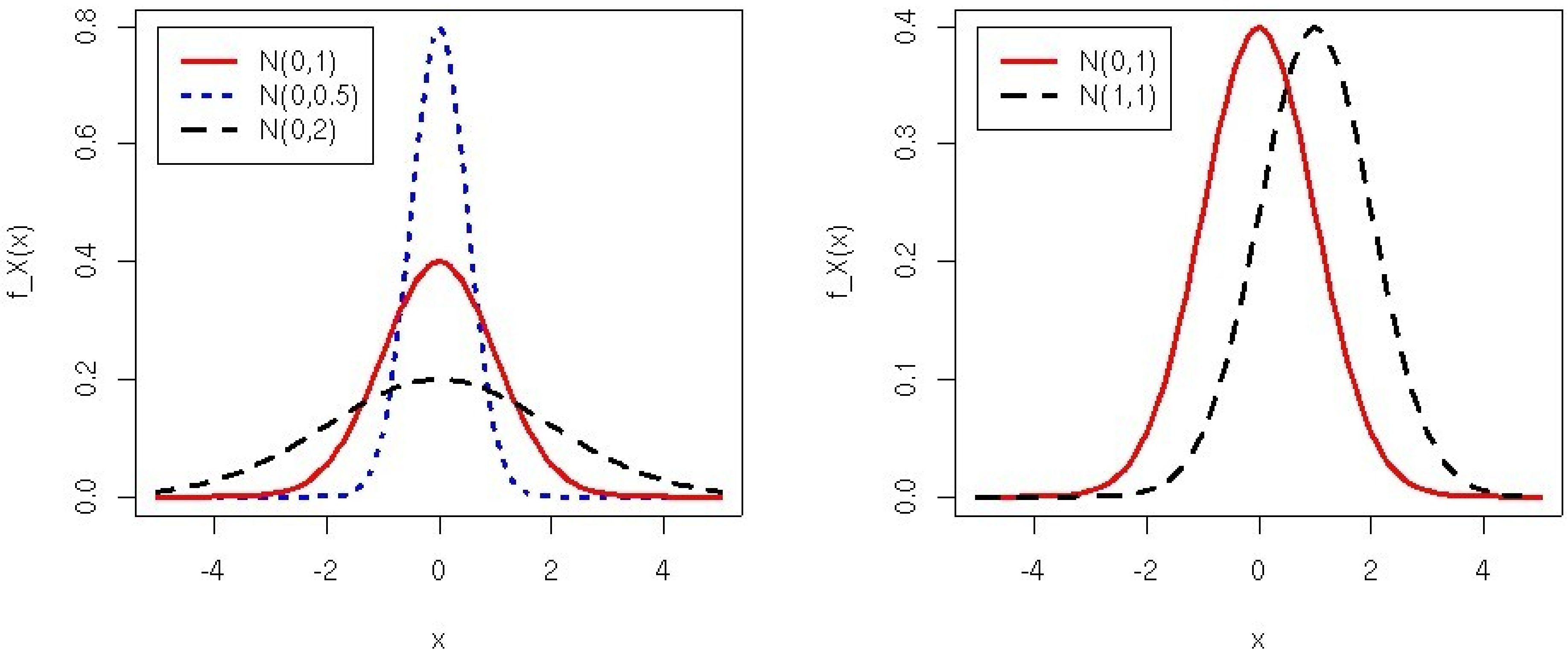


Normal o gaussiana, N(μ,σ^2)

Función de densidad:

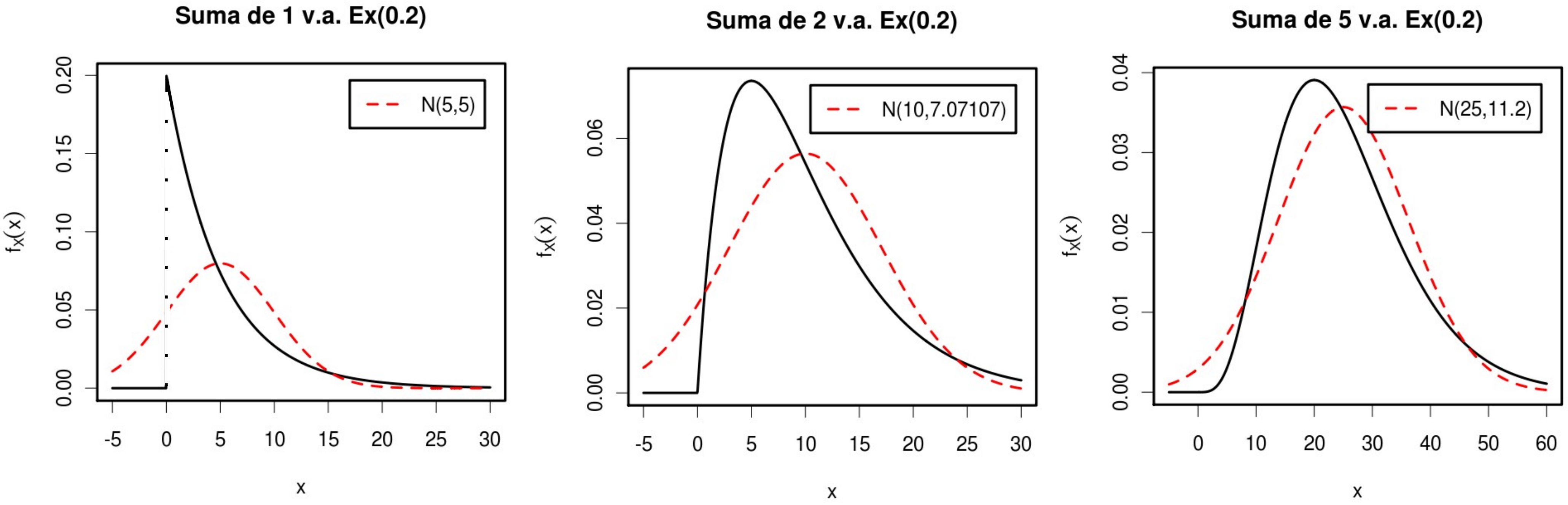
```
dnorm(x,mean=0,sd=0.5)
```

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$



Teorema del límite central

- **La suma de N variables aleatorias, (casi) independientemente de su distribución, sigue una distribución Normal cuando N → ∞**

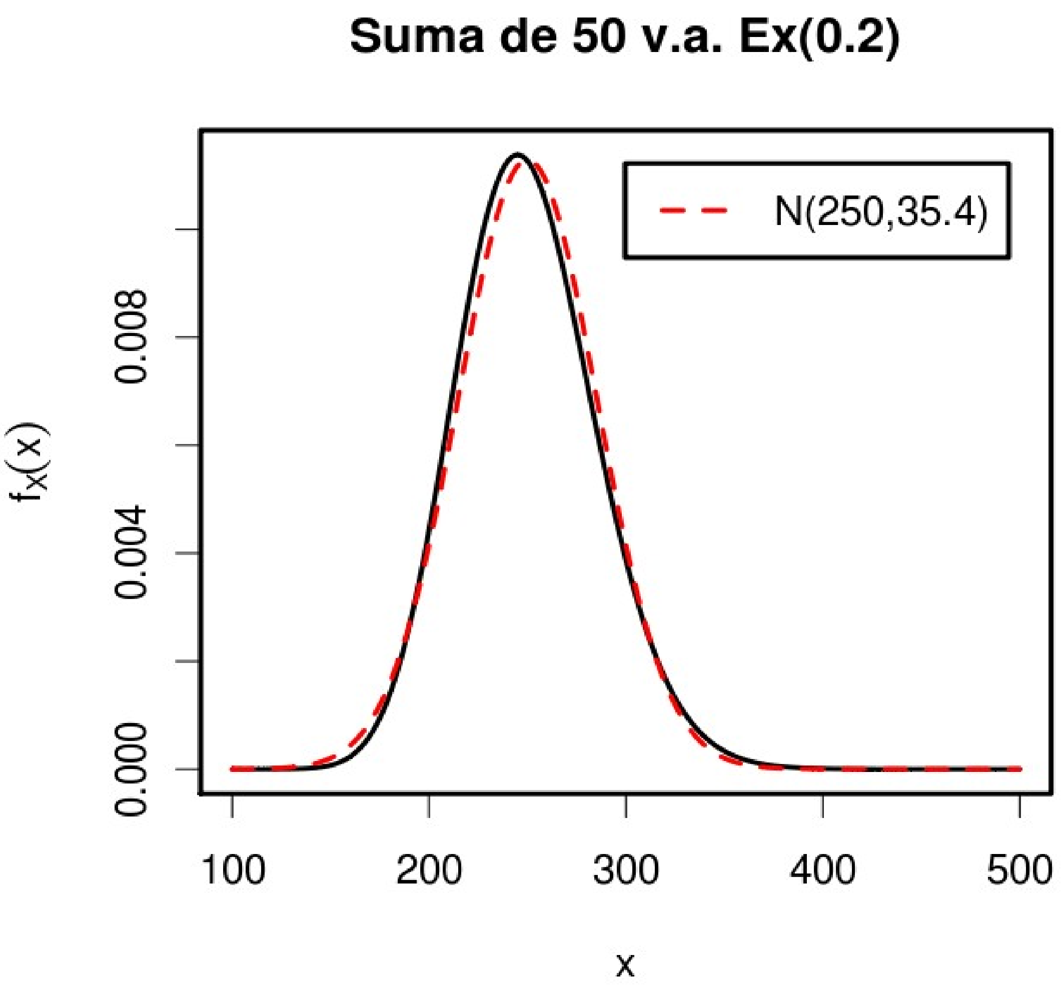


Teorema del límite central

- **La suma de N variables aleatorias, (casi) independientemente de su distribución, sigue una distribución Normal cuando N $\rightarrow \infty$**

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$



Normal o gaussiana, N(μ,σ^2)

- **La v.a. Normal es reproductiva respecto de sus dos parámetros:**

  Si X~N(μ_1, $\sigma^2{}_1$) e Y~N(μ_2, $\sigma^2{}_2$) son variables aleatorias independientes, entonces:

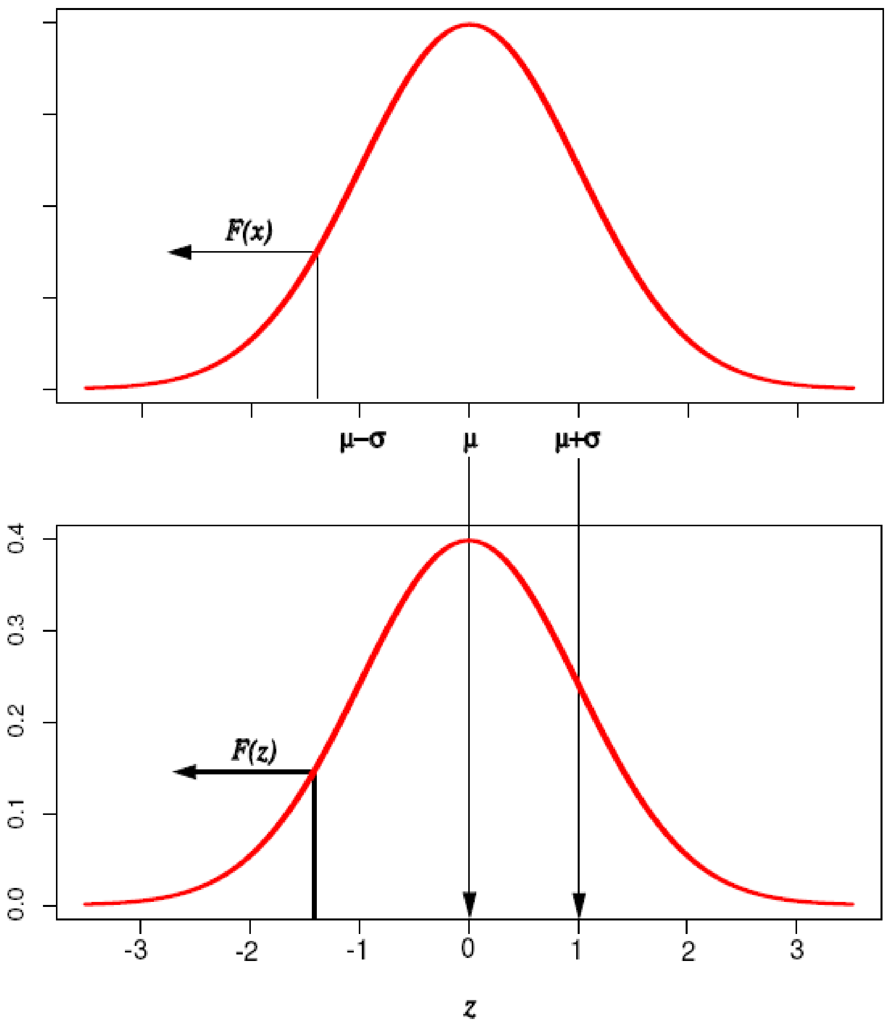
  $$X+Y \sim \mathrm{N}(\mu_1+\mu_2,\ \sigma^2{}_1+\sigma^2{}_2)$$

- **Lamentablemente, la función de distribución normal no tiene una expresión analítica y hay que recurrir a tablas o a un ordenador para su cálculo.**

```
pnorm(x,mean=0,sd=0.5)
```

Normal o gaussiana, N(μ,σ^2)

Las tablas de la función de distribución normal listan únicamente la distribucion normal tipificada N(0,1)



$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Para buscar en la tabla procederemos a tipificar nuestra v.a:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

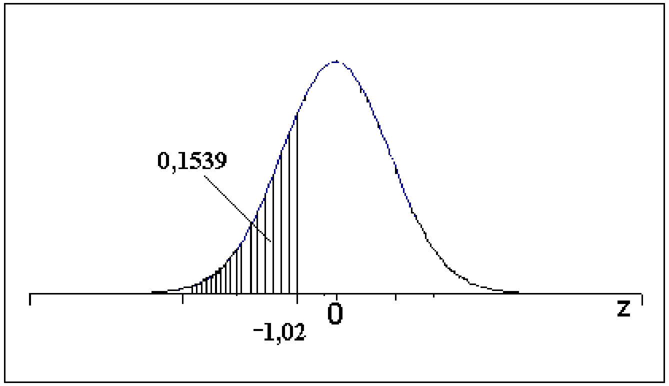
$$Z \sim N(0,1)$$

Normal o gaussiana, $N(\mu, \sigma^2)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955								

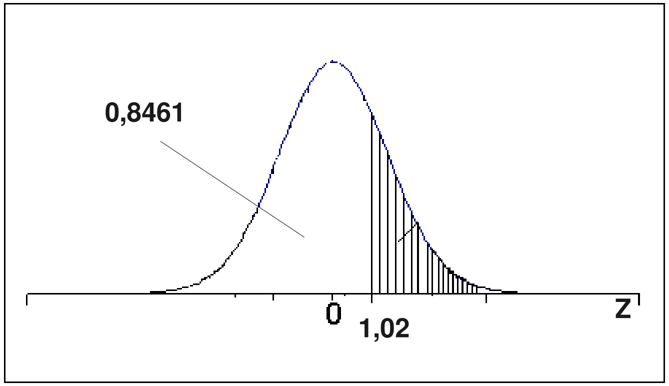
Tabla 4.1: Tabla de la función de distribución normal tipificada: $F_{N(0,1)}(x)$. Para obtener las probabilidades para $x < 0$ se puede utilizar la relación de simetría $F_{N(0,1)}(-a) = 1 - F_{N(0,1)}(a)$. Los subindices indican el número de repeticiones de un digito. Por ejemplo, $F_{N(0,1)}(3.61) = 0.9_3847 = 0.999847$.

Normal o gaussiana, $N(\mu, \sigma^2)$



¿P(Z < -1.02)?

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



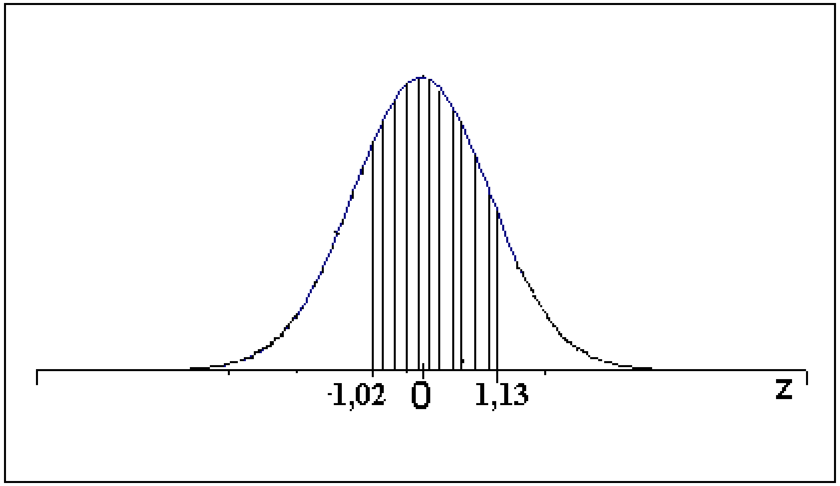
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964

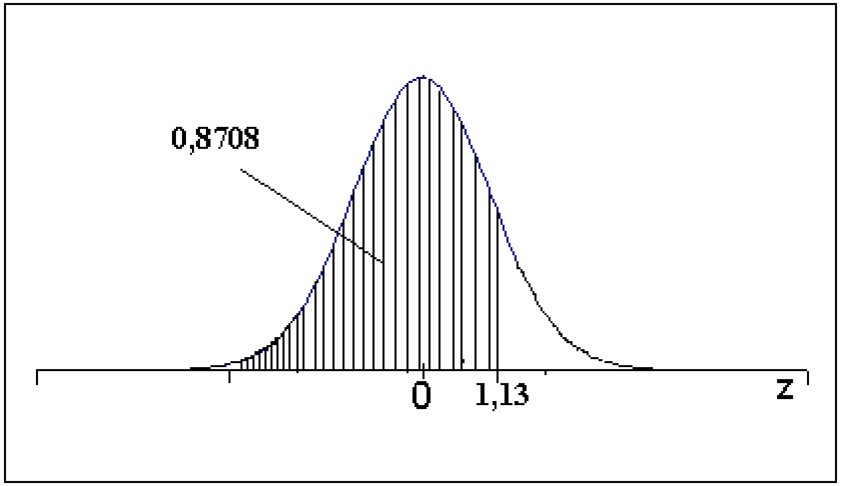
Notación habitual:

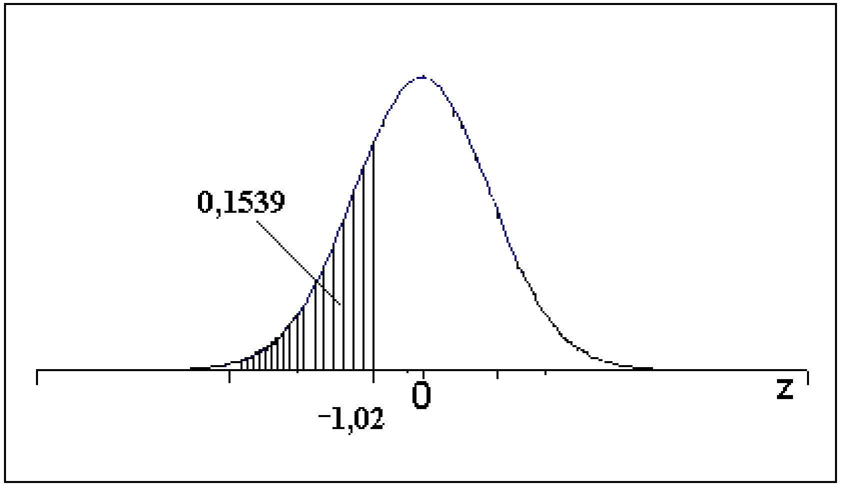
$$\Phi(x) \equiv F_{N(0,1)}(x)$$

$$P(X < -1.02) = 1 - P(X < 1.02) = 1 - \Phi(1.02) = 1 - 0.8461 = 0.1539$$

Normal o gaussiana, N(μ,σ^2)







P(-1,02<Z<1,13)=

= P(Z < 1.13) – P(Z < -1.02) =

= 0.8708 – 0.1539 = 0.7169

Ejercicio

Según los patrones de crecimiento de la Organización Mundial de la Salud[1], la altura de los niños de 3 años se distribuye según una distribución normal de media 96,10 cm y desviación estandar 3,76 cm Se pide:

a) Encontrar la probabilidad de que un niño de 3 años mida más de 1 metro.

b) Encontrar la probabilidad de que un niño de 3 años mida entre 90 y 100 cm.

Aproximaciones con la normal

Si una variable X ~ **B(n,p)**, tiene parámetro n grande y ni p ni (1-p) están próximos a 0, la función de distribución B(n,p) puede aproximarse por una normal: N(np, np(1-p))

Es decir:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

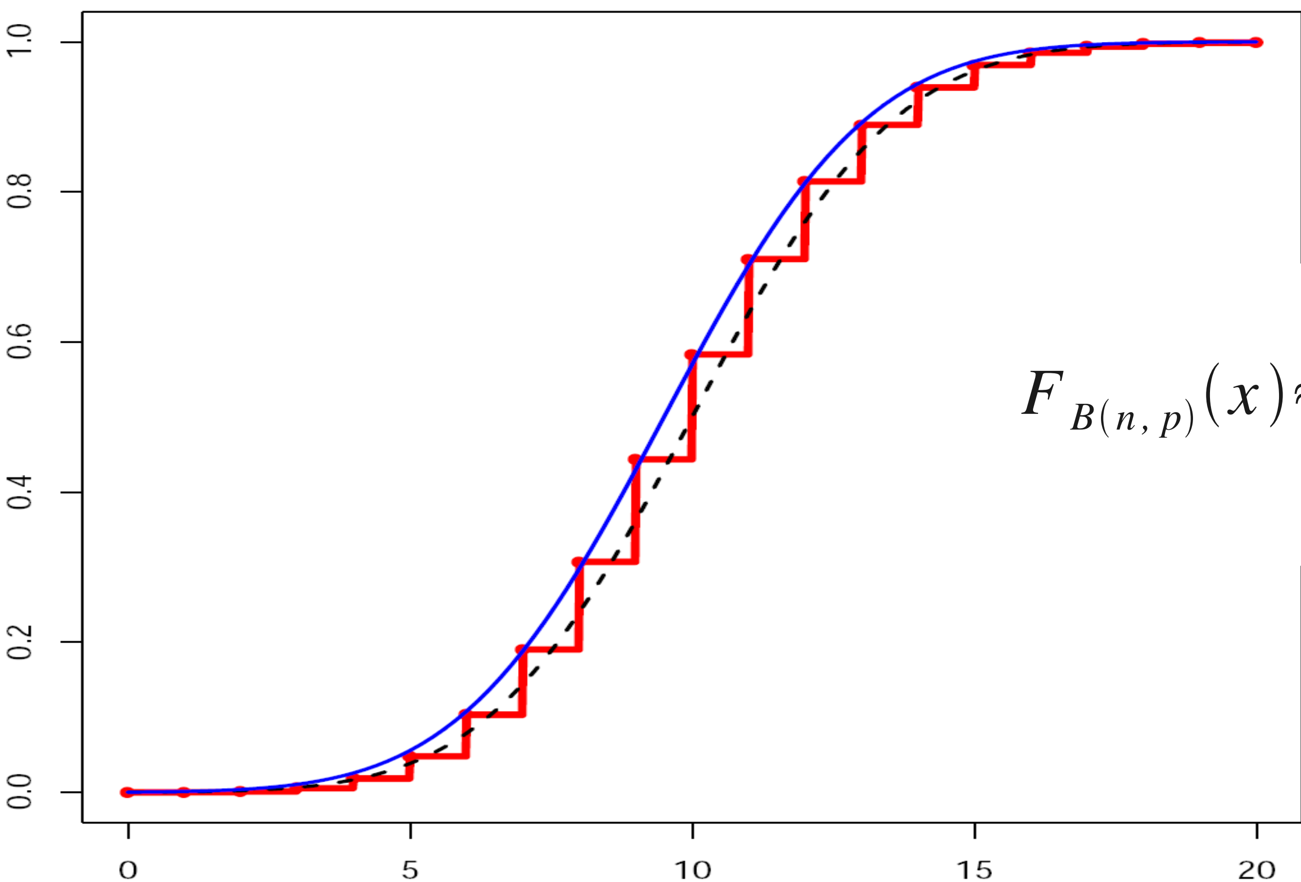
Esta aproximación es tanto mejor cuanto mayor es n.

En la práctica se conviene que una distribución binomial puede aproximarse por la Normal cuando

np>5 y n(1-p)>5

Aproximaciones con la normal

Esta aproximación se mejora con la llamada corrección por continuidad:



$$F_{B(n,p)}(x) \approx F_{N(0,1)}\left(\frac{x-np+0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Ejercicio

El 20 % de los chips fabricados en una planta son defectuosos. Cuales son las probabilidades de que en un lote de 100 chips aleatoriamente seleccionados

a) más de 15 sean defectuosos.

b) entre 10 y 15 sean defectuosos

Aproximaciones con la normal

Cuando en una distribución **Po(λ)**, λ tiende a infinito, la función de distribución Po(λ) puede aproximarse por una N(λ,λ)

Es decir:

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0,1)$$

En la práctica se conviene que una distribución de Poisson puede aproximarse por la Normal cuando λ>5

Esta aproximación se mejora con la llamada corrección por continuidad:

$$Z = \frac{X - \lambda + 0.5}{\sqrt{\lambda}}$$