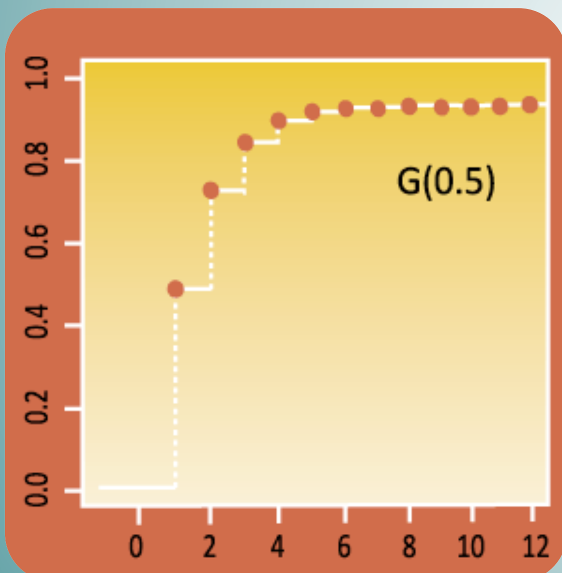
Estadística y Métodos Numéricos

Tema 5. Inferencia Estadística



Ángel Barón Caldera
Ángel Cobo Ortega
María Dolores Frías Domínguez
Jesús Fernández Fernández
Francisco Javier González Ortiz
Carmen María Sordo García

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

TEMA5: Inferencia Estadística

1. Muestreo:
   - Tamaño y calidad de la muestra
   - Muestreo aleatorio
2. Inferencia estadística:
   - Estimación de una proporción
   - Estimación de una media
   - Estimación de una varianza
3. Contraste de hipótesis usando intervalos de confianza

Muestreo

POBLACIÓN: todos los estudiantes de la Universidad de Cantabria

MUESTRA: alumnos de 1º de Grado de Ingeniería Civil de la Universidad de Cantabria.

Necesidad del muestreo:

1. **Coste reducido**: la recogida y tratamiento de datos resulta más barato al trabajar con una pequeña parte de la población

2. Mayor **rapidez** en la evaluación del resultado final (ej. escrutinio de votos de las primeras mesas electorales).

3. **Imposibilidad** material por destrucción del objeto a estudio (ej. duración de bombillas, si se estudia toda la población no quedarían bombillas para vender).

Es importante elegir una muestra que represente bien a la población.

Muestreo Aleatorio

Todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser incluidos en la muestra.

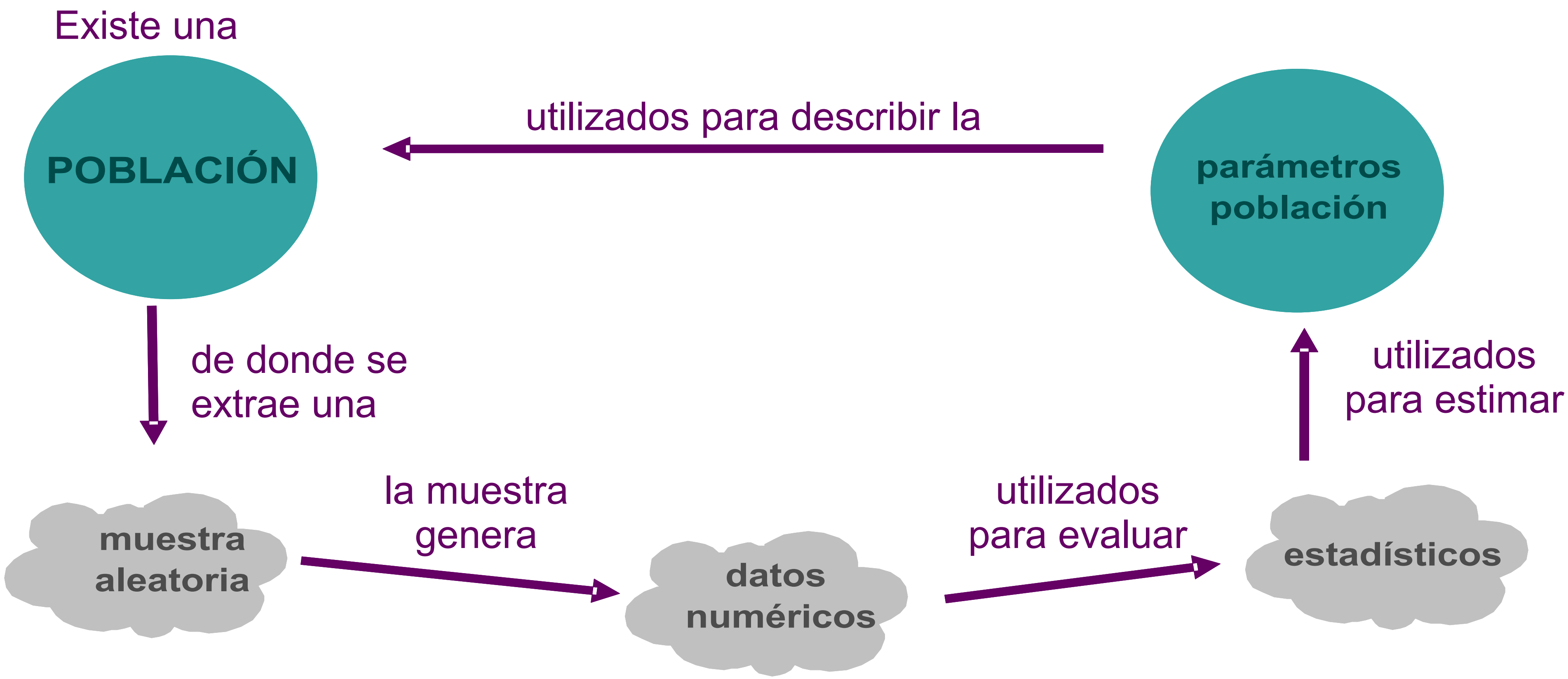
Sin reposición de los elementos: no se permite que un mismo individuo sea seleccionado más de una vez.

Con reposición: un elemento puede ser extraído varias veces.

Cuando la población es grande la diferencia entre ambos casos es mínima.

Inferencia Estadística

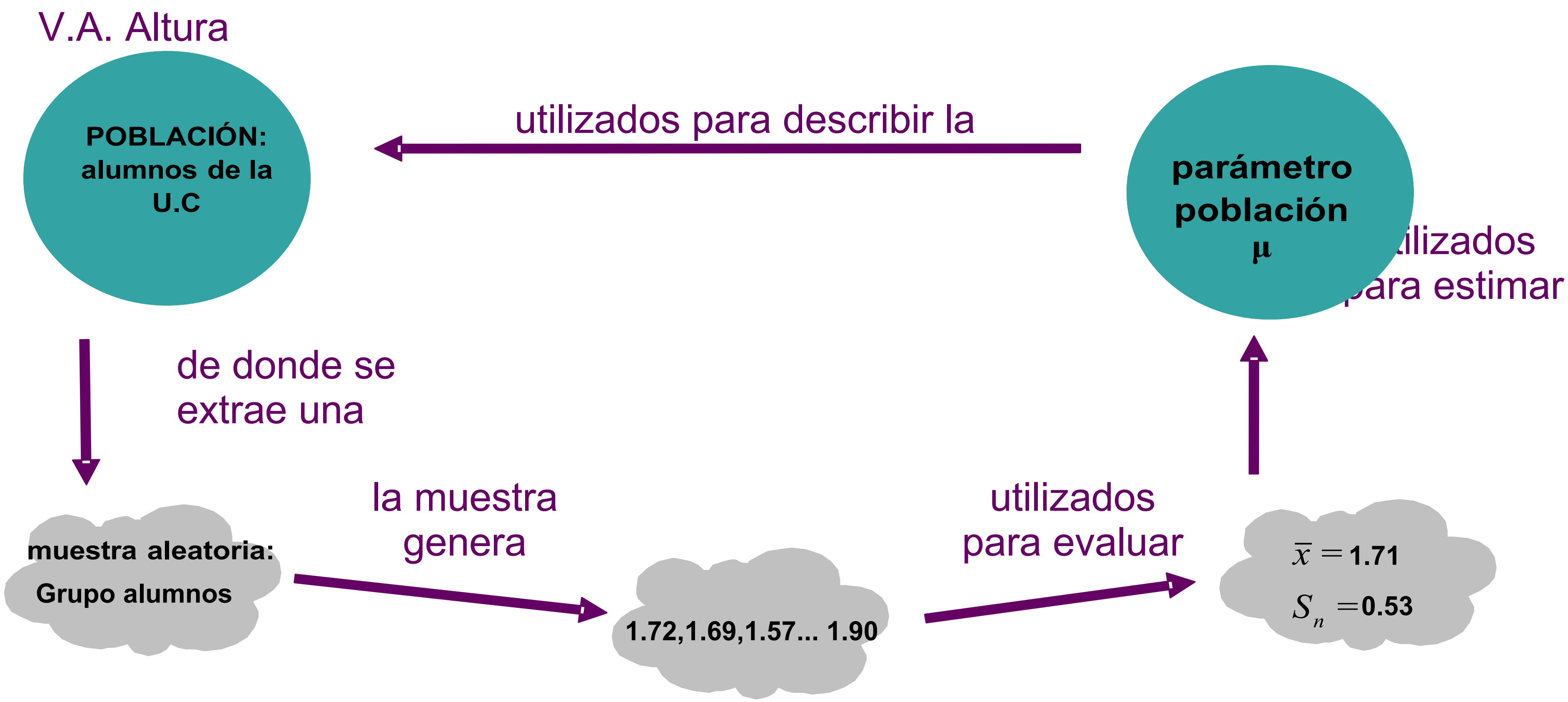
El problema que aparece con más frecuencia en la práctica es el de la estimación de parámetros de la población, que son desconocidos.



El objetivo es doble: **describir** la **muestra** (mediante la estadística descriptiva) y sacar **conclusiones** sobre la **población**.

Inferencia Estadística

Se desea conocer la altura de los alumnos de la Universidad de Cantabria



Conjunto de métodos estadísticos que permiten deducir (inferir) como se distribuye la población en estudio a partir de la información que proporciona una muestra.

Inferencia Estadística

Estimación puntual: Obtener un pronóstico numérico único sobre un parámetro de la distribución

Estimación por intervalos: Obtener un margen de variación para un parámetro de la distribución

θ **Población, parámetro**
- proporción P
- media μ
- varianza σ^2

$\hat{\theta}$ **Muestra, estimador parámetro**
- proporción p
- media
- Varianza S^2

$$\boxed{Objetivo: min\left|\theta - \hat{\theta}\right|}$$

Estimación de una proporción

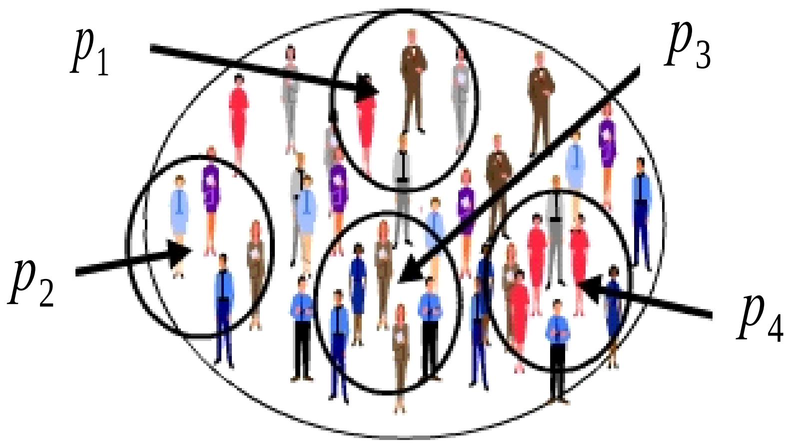
Dada una población con N individuos de los cuales M poseen cierta propiedad (e.g. mujeres) que no poseen los demás, la **proporción poblacional** se define como **$P = M/N$**

Si se elige una muestra de esa población de tamaño n, en la que aparecen m individuos con esa propiedad, entonces la **proporción muestral** se define como **$p = m/n$**

$$\theta \longrightarrow P$$

$$\hat{\theta} \longrightarrow p$$

La proporción poblacional (P) es constante mientras que cada muestra puede tener una proporción muestral (p) distinta.



La **proporción muestral** es una **variable aleatoria** por lo que es importante determinar su distribución.

Distribución de la proporción muestral

La distribución de la proporción muestral es la distribución de probabilidad de todos los valores posibles de la proporción muestral (p)

Muestreo con reemplazamiento o población infinita:

El número de individuos (m) que poseen la propiedad en la muestra es una variable aleatoria **binomial**.

La media y varianza de la proporción muestral serán:

$$E[p] = \frac{E[m]}{n} = \frac{n\,P}{n} = P$$

$$Var[p] = Var[m/n] = \frac{Var[m]}{n^2} = \frac{n\,P\,(1-P)}{n^2} = \frac{P\,(1-P)}{n}$$

Distribución de la proporción muestral

La distribución de la proporción muestral es la distribución de probabilidad de todos los valores posibles de la proporción muestral (p)

Muestreo sin reemplazamiento y población finita:

El número de individuos (m) que poseen la propiedad en la muestra es una variable aleatoria **hipergeométrica**.

La media y varianza de la proporción muestral serán:

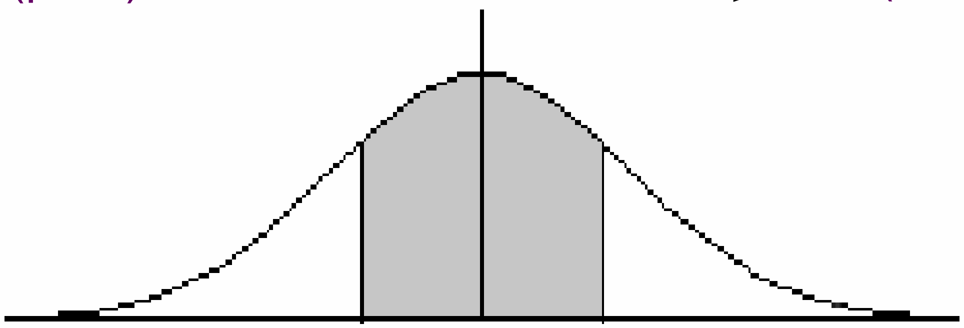
$$E[p] = P \qquad\qquad Var[p] = \frac{N-n}{N-1}\frac{P(1-P)}{n}$$

Distribución de la proporción muestral

- El valor medio de la función de probabilidad coincide con la proporción poblacional P.
- La varianza disminuye a medida que aumenta el tamaño de la muestra(n).
- La función de probabilidad de p converge a la normal de μ=E(p) y σ^2=Var(p) para n tendiendo a infinito.

Cuando la aproximación Normal sea válida, se podrá utilizar la variable tipificada z para obtener la información necesaria en la toma de decisiones.

$$N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{\;z = \frac{x-\mu}{\sigma}\;} N(0, 1)$$

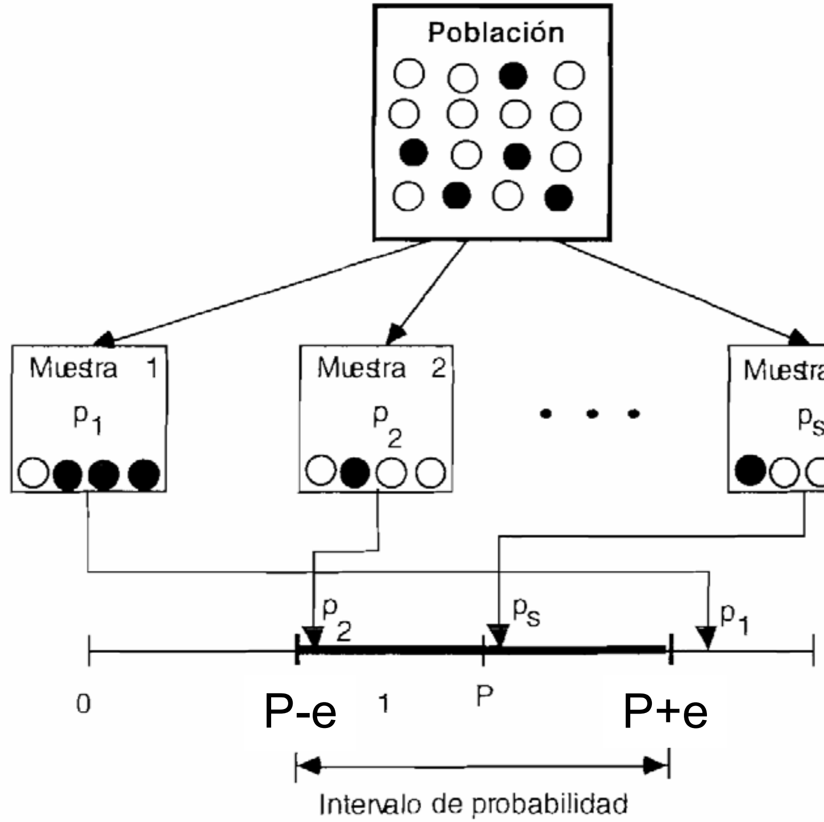


Intervalos de probabilidad de una proporción

Conocer la función de probabilidad de p permite, en el supuesto de conocer el valor de P, fijar unos intervalos tales que la probabilidad de que la variable aleatoria p pertenezca a dicho intervalo sea un valor dado.

Dado un porcentaje 100(1-α)%, siempre es posible encontrar un intervalo alrededor de P que contenga a dicho porcentaje de la muestra.

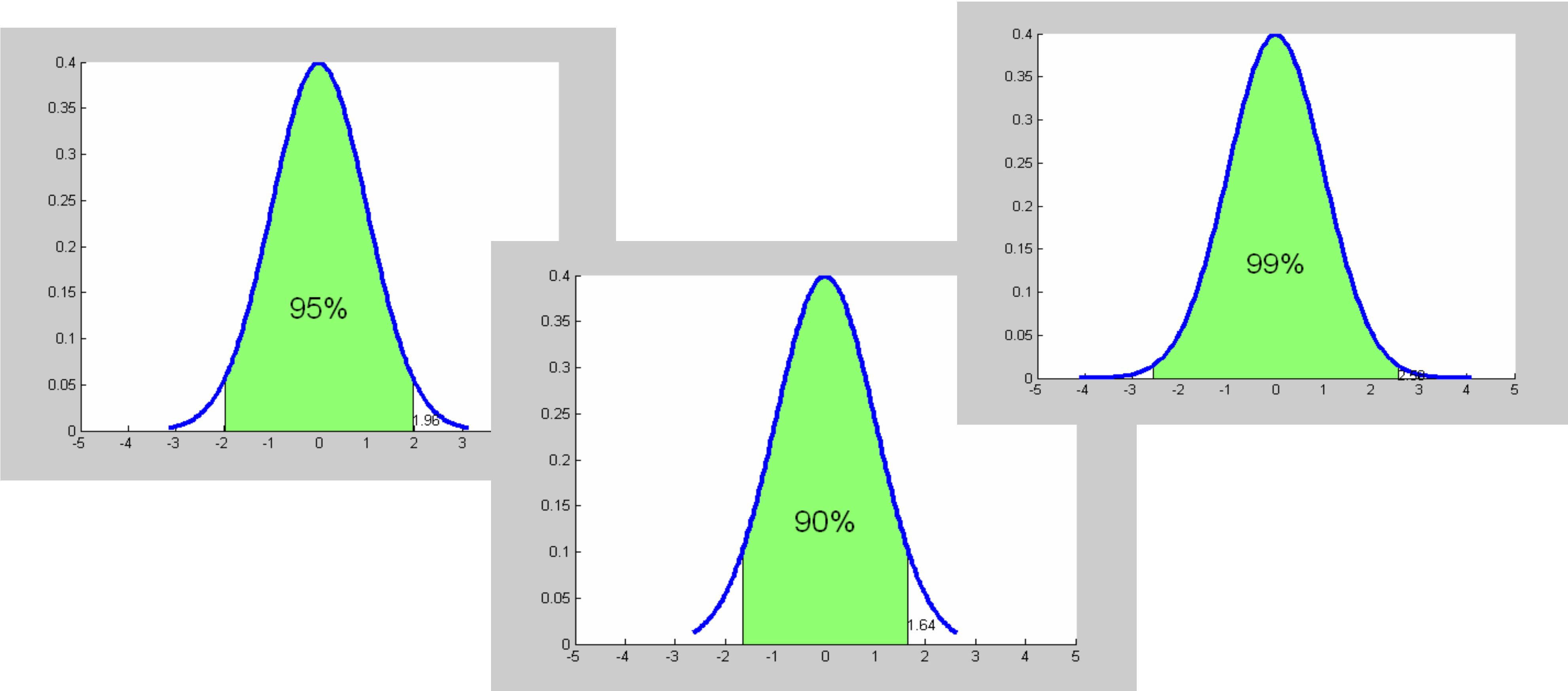
Se denomina **intervalo de probabilidad** de una proporción a aquel intervalo para el cual se sabe con una confianza 1-α que la proporción muestral se encuentra en dicho intervalo.



Intervalos de probabilidad de una proporción

1-α (nivel de confianza, 90% 95% 99%)

α es el nivel de significación



Pueden existir numerosos intervalos 1-α, sin embargo tiene mayor interés el simétrico respecto al valor central P.

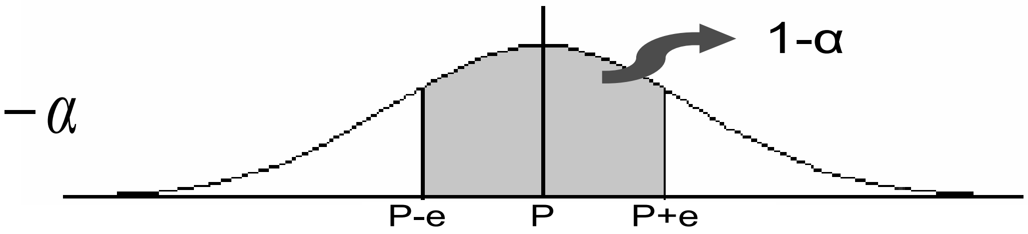
Intervalos de probabilidad de una proporción

El intervalo (a,b] es un intervalo para p con probabilidad 1-α si se verifica:

$$P(a \leq p \leq b) = 1 - \alpha$$

Tiene especial interés el intervalo de amplitud mínima que, para muestras grandes es aproximadamente el simétrico respecto de P.

$$P(P - e \leq p \leq P + e) = 1 - \alpha$$



Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, la variable aleatoria p tiende a la ley normal y los intervalos de probabilidad pueden obtenerse con las tablas de la ley normal.

Intervalos de probabilidad de una proporción

Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, la variable aleatoria p tiende a la ley normal y los intervalos de probabilidad pueden obtenerse con las tablas de la ley normal.

$$P(P-e \leq p \leq P+e) = F_{N(\mu,\sigma^2)}(P+e) - F_{N(\mu,\sigma^2)}(P-e) = F_{N(0,1)}\left(\frac{P+e-\mu}{\sigma}\right) -$$

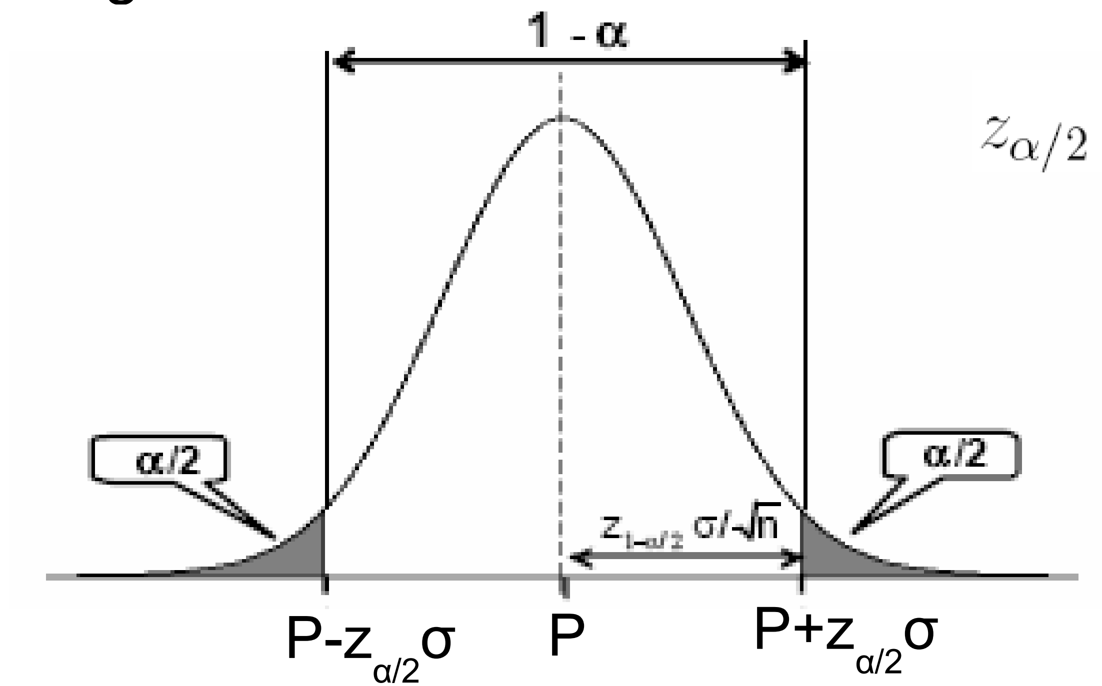
$$- F_{N(0,1)}\left(\frac{P-e-\mu}{\sigma}\right) = F_{N(0,1)}\left(\frac{e}{\sigma}\right) - \left(1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{e}{\sigma}\right)\right) = 2F_{N(0,1)}\left(\frac{e}{\sigma}\right) - 1 = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow F_{N(0,1)}(e/\sigma) = 1-\alpha/2 \Rightarrow e = z_{\alpha/2}\,\sigma$$

Donde $z_{\alpha/2} = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha/2)$

Intervalos de probabilidad de una proporción

1-α (nivel de confianza, 90% 95% 99%)
α es la significación



$$z_{\alpha/2} = F^{-1}_{N(0,1)}(1 - \alpha/2)$$

Los intervalos de probabilidad permanecen constantes para diferentes muestras.

La probabilidad (1- α) indica que para el 100(1- α)% de las muestras, el valor de p está contenido en el intervalo de probabilidad y para el resto está fuera.

Intervalos de probabilidad de una proporción

$$P \pm e \qquad z_{\alpha/2} = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha/2)$$

Muestreo sin reemplazamiento y población finita

$$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{P(1-P)}{n}}$$

$$nP > 5$$

$$n(1-P) > 5$$

$$n/N < 0.9$$

Muestreo con reemplazamiento o población infinita

$$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

$$nP > 5$$

$$n(1-P) > 5$$

Condiciones de validez

Ejemplo: La población de internados en un centro médico es de 1000 enfermos, de los cuales el 20% padecen afecciones cardiacas. Se elige una muestra de 50 enfermos del fichero de registro. Calcular el intervalo de probabilidad al 0.95 de p para el caso de muestreo sin y con reemplazamiento.

Intervalos de probabilidad de una proporción

$$P \pm e$$

Muestreo sin reemplazamiento y población finita

$$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{P(1-P)}{n}}$$

$$nP > 5$$

$$n(1-P) > 5$$

$$n / N$$

Muestreo con reemplazamiento o población infinita

$$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$$

$$nP > 5$$

$$n(1-P) > 5$$

Condiciones de validez

Ejemplo:

α	z_α
0.001	3.090
0.005	2.576
0.010	2.326
0.025	1.960
0.050	1.640
0.100	1.280

$$z_{\alpha/2} = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha/2)$$

Estimadores de una proporción

En la realidad, el problema más frecuente es el de la estimación de los parámetros de la población. Para ello se extrae de la población una muestra de tamaño n y conocida ésta se trata de estimar P.

- **Estimación puntual**: Se estima el valor de la proporción de la población (P) con el valor del parámetro de la muestra.

$$p \longrightarrow P$$

No da información alguna de la precisión de la estimación.

- **Intervalo de confianza**: Determina entre que valores (a, b] se encuentra la proporción de la población P con cierta probabilidad o certeza (1-α).

$$P(a \leq P \leq b) = 1 - \alpha$$

Complementa la estimación puntual precisando la exactitud de la estimación.

Intervalos de Confianza de una Proporción

Se dice que el intervalo (a,b] es un **intervalo de confianza** para P al nivel (1-α) si se verifica:

$$P(a \leq P \leq b) = 1 - \alpha$$

Partiendo del intervalo de probabilidad (1- α):

$$P(P - e \leq p \leq P + e) = 1 - \alpha$$

Esta expresión se puede escribir como:

$$P(p - e \leq P \leq p + e) = 1 - \alpha$$

Por lo que el intervalo [p-e, p+e] tiene una probabilidad asociada de (1- α) de contener al parámetro P.

Intervalos de confianza de una proporción

$$p \pm e \qquad z_{\alpha/2} = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha/2)$$

Muestreo sin reemplazamiento y población finita

$$p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$n(p-e) > 5$$
$$n(1-p-e) > 5$$
$$n/N < 0.9$$

Muestreo con reemplazamiento o población infinita

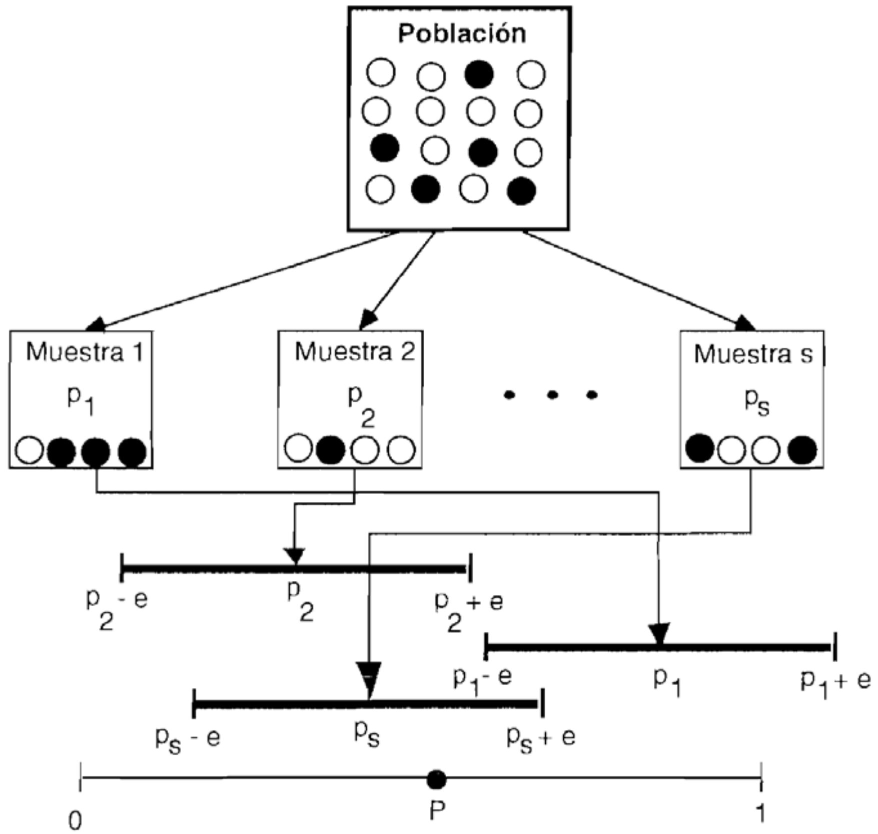
$$p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$n(p-e) > 5$$
$$n(1-p-e) > 5$$

Condiciones de validez

Ejemplo: En una muestra aleatoria de 50 rocas tomadas de una mina se observa que 20 de ellas son ricas en contenido mineral. Estimar puntualmente la proporción de rocas con alto contenido mineral en la mina. Calcular un intervalo de confianza 0.95 de esta proporción.

Intervalos de Confianza de una Proporción



- Los intervalos de confianza sí cambian con las muestras.
- El 100(1- α)% de las muestras dan intervalos de confianza que contienen a la proporción poblacional.

Tamaño de muestra para estimar proporción

En la práctica el experimentador se plantea con qué error y nivel de confianza desea estimar la proporción y se calcula el tamaño de la muestra necesario.
Es decir, se conocen e y 1-α y se busca calcular n.

Muestreo sin reemplazamiento y población finita

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\,\frac{p(1-p)}{n}}$$

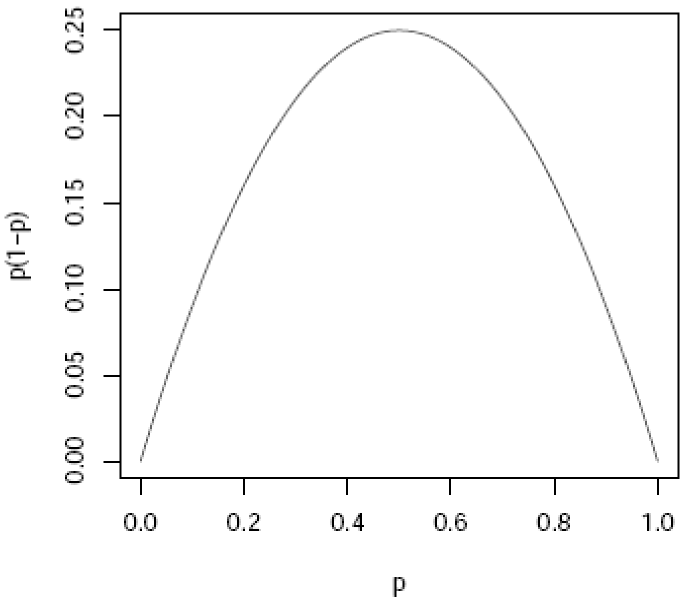
$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2\, N\, p\,(1-p)}{e^2\,(N-1) + p\,(1-p)\, z_{\alpha/2}^2}$$

Muestreo con reemplazamiento o población infinita

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2\, p\,(1-p)}{e^2}$$

Tamaño de muestra para estimar proporción



El cálculo de n implica el conocimiento previo de la proporción muestral, en p(1-p), que es el valor que se busca.

Si no se tiene idea del rango de valores de p(1-p), se puede usar el valor ¼ que es la cota superior de p(1-p).

Muestreo sin reemplazamiento y población finita

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2} N}{4e^2(N-1) + z^2_{\alpha/2}}$$

Muestreo con reemplazamiento o población infinita

$$n = \frac{z^2_{\alpha/2}}{4e^2}$$

Ejercicio

Ejemplo: Se quiere estimar la proporción de zurdos en una población con una confianza del 95% y una precisión de 0.01.

1. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra escogida?

2. Mediante un muestreo previo se estima que $p \approx 0.1$, ¿qué tamaño debe tener la muestra si para calcularlo se utiliza la estimación de p obtenida?

Ejercicio

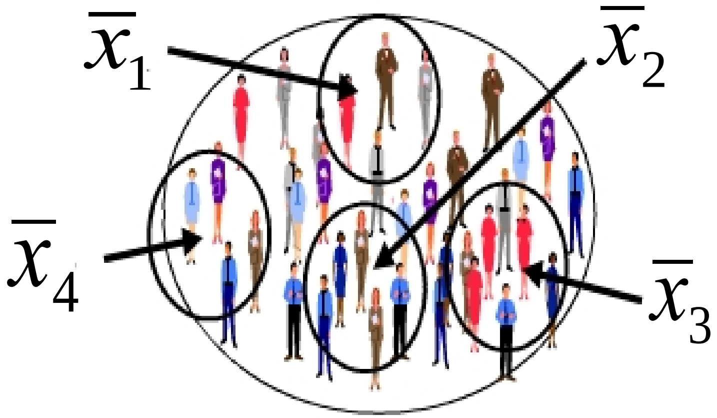
5.5 Se desea conocer la proporción de rocas con alto contenido mineral en una cierta explotación minera. Para ello, se toman dos muestras de 100 y 500 rocas, respectivamente y se observa que dichas muestras presentan proporciones de alto contenido mineral de $x_1 = 0.1$ y $x_2 = 0.11$, respectivamente. Calcular:

a) Un intervalo de confianza $(x_1 - e, x_1 + e)$ del 80 % para la proporción de rocas con alto contenido mineral basado en la primera muestra.

b) El nivel de confianza $(1 - \alpha)$ del intervalo de confianza basado en la segunda muestra $(x_2 - e, x_2 + e)$, que tiene asociado el mismo error e que en el caso anterior.

5.2 Se tiene una moneda trucada de tal manera que da caras con una probabilidad 0.51. Dar un intervalo de probabilidad al 97 % para la proporción de caras obtenida al lanzar la moneda 100 veces.

Estimación de una media



$$\theta \longrightarrow \mu$$

$$\hat{\theta} \longrightarrow \bar{x}$$

Dada una población con N individuos que poseen cierta propiedad (altura), esa propiedad o variable tendrá su media poblacional μ, aún cuando su valor numérico se desconozca.

Si se elige una muestra aleatoria de esa población de tamaño n, se puede observar dicha variable y obtener la media muestral

La media muestral es una variable aleatoria ya que cada muestra tiene un valor distinto, por lo que tiene interés estudiar su función de probabilidad y en especial su media y su varianza.

La distribución de la media muestral es la distribución de probabilidad de todos los valores posibles de la media muestral.

Distribución de la media muestral

Muestreo sin reemplazamiento y población finita

$$E[\bar{x}] = \mu$$

$$Var[\bar{x}] = \frac{\sigma^2 (N-n)}{n(N-1)}$$

Muestreo con reemplazamiento o población infinita

$$E[\bar{x}] = \mu$$

$$Var[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

- La media de las medias muestrales coincide con la media poblacional.
- La varianza disminuye a medida que aumenta el tamaño de la muestra (n).
- La función de probabilidad converge a la normal para n tendiendo a infinito (teorema central del límite).

Intervalos de probabilidad de una media

Se denomina **intervalo de probabilidad** de una **media** a aquel intervalo para el cual se sabe con una confianza $1-\alpha$ que la media muestral se encuentra en dicho intervalo.

El intervalo (a,b] es un intervalo para la media muestral con probabilidad $1-\alpha$ si se verifica:

$$P(a \leq \bar{x} \leq b) = 1-\alpha$$

Al igual que para proporciones, para la media el intervalo de especial interés es el simétrico respecto de la media de la población.

$$P(\mu - e \leq \bar{x} \leq \mu + e) = 1-\alpha \longrightarrow [\mu - e, \mu + e]$$

Intervalos de probabilidad de una media

Varianza de la población **conocida** y n grande (**n≥30**): la distribución muestral se puede aproximar por una normal, Teor. central del límite.

Muestreo sin reemplazamiento y población finita

$$\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$$

Muestreo con reemplazamiento o población infinita

$$\mu \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z_{\alpha/2} = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha/2)$$

Varianza de la población **desconocida** y **n** es **pequeña**.

No se puede emplear σ^2/n, en su lugar se toma S^2/n a partir de la muestra, por lo que la distribución ya no es exactamente una distribución normal.

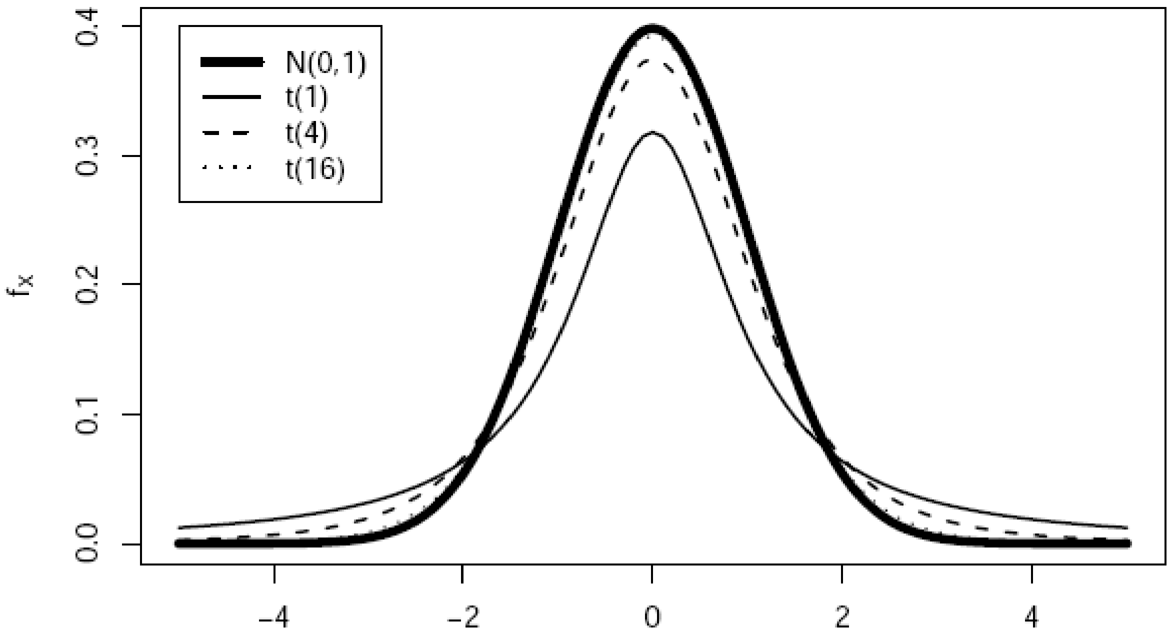
En este caso, si la distribución de partida es normal, se considera el estadístico t que se distribuye según una t de Student con n-1 grados de libertad.

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \longrightarrow \mu \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$t_{n-1,\alpha/2} = F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha/2)$$

t de Student, t(n)

Forma de campana, simétrica y unimodal.
Eje de simetría en la recta X=0, por lo que su mediana = 0



n =1, 4, 16, ∞

Cuando n tiende a infinito la distribución t(n) tiende a la N(0,1)

t de Student, t(n)

Los cuantiles de la distribución t(n) aparecen en muchas fórmulas de inferencia estadística y se aproximan mediante tablas o mediante programas de ordenador.

```
> qt(0.95, 9)
[1] 1.833113
```

	Valores de p					
n	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
110	0.6767	1.2893	1.6588	1.9818	2.3607	2.6213
120	0.6765	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174

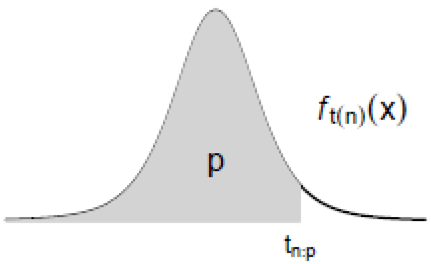


Tabla 5.4: Valores de $t_{n;p} \equiv F^{-1}_{t(n)}(p)$.

Ejercicio

En un instituto se sabe que la estatura de los alumnos se ajusta a una $N(165, 8^2)$ en cm. Calcular la probabilidad de que la altura media de 64 alumnos, elegidos al azar, esté entre 163 y 167 cm.

Estimadores de una media

Como ya se ha mencionado antes, en la realidad, el problema más frecuente es el de la estimación de los parámetros de la población. Para ello se extrae de la población una muestra de tamaño n y conocida ésta se trata de estimar μ.

- **Estimación puntual**: La media muestral es un buen estimador de la media de la población.

$$\bar{x} \longrightarrow \mu$$

No da información alguna de la precisión de la estimación.

- **Intervalo de confianza**: Determina entre que valores (a, b] se encuentra la media de la población μ con cierta probabilidad o certeza (1-α).

$$P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha$$

Complementa la estimación puntual precisando la exactitud de la estimación.

Intervalos de confianza de una media

Se dice que el intervalo (a,b] es un **intervalo de confianza** para **μ** al nivel (1-α) si se verifica:

$$P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha$$

Usando la hipótesis de normalidad y de la misma manera que se hizo para las proporciones:

$$P(\bar{x} - e \leq \mu \leq \bar{x} + e) = 1 - \alpha \longrightarrow e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si la aproximación normal no es válida (n pequeña y σ desconocida), al igual que se hizo con el intervalo de probabilidad, es necesario considerar el valor de la cuasivarianza muestral S^2 y calcular la variable t, que se distribuye según una t de Student.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \longrightarrow e = t_{n-1,\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Intervalos de confianza de una media

$$\bar{x} \pm e$$

Varianza de la población **conocida** y n grande (**n≥30**):

Muestreo sin reemplazamiento y población finita

$$e = z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{\frac{N-n}{n(N-1)}}$$

Muestreo con reemplazamiento o población infinita

$$e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$z_{\alpha/2} = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha/2)$$

Varianza de la población **desconocida** y **n** es **pequeña**.

$$e = t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$t_{n-1,\alpha/2} = F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha/2)$$

Tamaño de muestra para estimar media

Al igual que con la proporción, en la realidad el problema que se plantea se centra en estimar el tamaño de muestra necesario para estimar una media con un error y nivel de confianza dados.

Es decir, se conocen e y 1-α y se busca calcular n.

$$e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \longrightarrow n = z^2_{\alpha/2} \frac{\sigma^2}{e^2}$$

Si la aproximación Normal no es válida, este cálculo se complica ya que n aparece implícitamente en $t_{n-1,\alpha/2}$

Ejercicio

Si la vida en horas de una bombilla eléctrica de 75 watios se distribuye de forma normal con una desviación típica de 5 horas y elegimos una m.a.s. de 30 bombillas cuya vida media es de 1014 horas, se pide:

1. Construir un intervalo de confianza para la vida media de las bombillas con un nivel de significación del 0.05.

2. Si queremos tener un nivel de confianza del 95% de que el error en la estimación de la vida media fuera menor de una hora, ¿Qué tamaño de la muestra elegiríamos?

Ejercicio

5.8 En una cadena de producción se quiere estimar la longitud media (ℓ) de un cable fabricado mediante un proceso de producción que sigue una distribución normal con una varianza de 0.01cm. Se toman muestras de 16 cables con los siguientes valores de lontigud en cm:

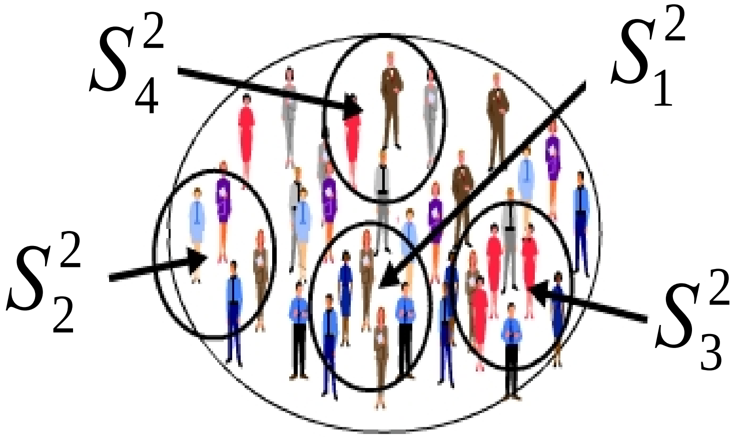
4.8, 4.94, 4.75, 4.78, 4.95, 4.91, 4.95, 4.96, 5.02, 4.9, 4.86, 5.01, 5.07, 4.95, 5, 4.84

a) ¿Cuál será el intervalo de confianza del 95 % para ℓ?

c) ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación de la media poblacional mediante la media muestral?

d) ¿Qué deberíamos hacer si quisiéramos reducir este error a 0.03 cm?

Estimación de una varianza



$$\theta \longrightarrow \sigma^2$$

$$\hat{\theta} \longrightarrow S^2, \quad S_n^2$$

La varianza poblacional (σ^2) es constante mientras que cada muestra puede tener una varianza o cuasi-varianza muestral (S_n^2, S^2) distinta.

S_n^2 y S^2 son variables aleatorias por lo que es importante determinar su distribución

La distribución de la varianza (cuasi-varianza) muestral es la distribución de probabilidad de todos los valores posibles de la varianza (cuasi-varianza) muestral.

Distribución de la varianza muestral

$$E[S_n^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$$Var[S_n^2] = \frac{(n-1)^2}{n^3}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4)$$

$$E[S^2] = \sigma^2$$

$$Var[S^2] = \frac{1}{n}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4)$$

μ4 es el momento de orden cuatro respecto de la media:

- El valor medio de las varianzas muestrales no coincide con el de la varianza de la población (estimador sesgado)
- El valor medio de las cuasi-varianzas muestrales si coincide con el de la varianza de la población (estimador centrado).
- Las varianzas tienden a cero cuando n tiende a infinito.

Intervalos de probabilidad de una varianza

Se denomina **intervalo de probabilidad** de una **varianza** a aquel intervalo para el cual se sabe con una confianza 1-α que la varianza muestral se encuentra en dicho intervalo.

$$P\left(a \leq S_n^2 \leq b\right) = 1 - \alpha$$

Para el caso de la varianza y cuasi-varianza muestrales, no existe una distribución a la que converjan todos los casos posibles de distribución poblacional.

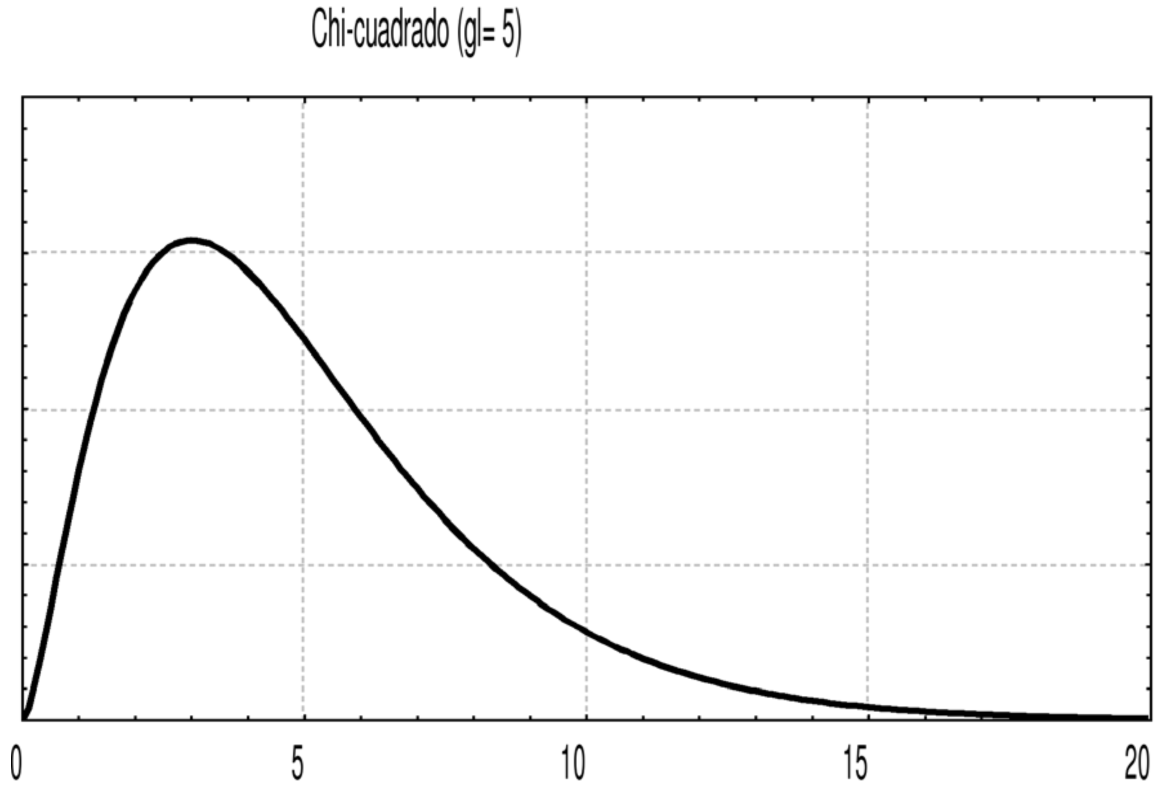
La distribución de la varianza o cuasi-varianza muestral depende en alto grado de cual sea la distribución poblacional de partida.

Para simplificar vamos a considerar en lo que sigue sólo el caso de población normal.

Intervalos de probabilidad de una varianza

Si asumimos que la población sigue una distribución N(μ, σ^2), entonces la variable aleatoria

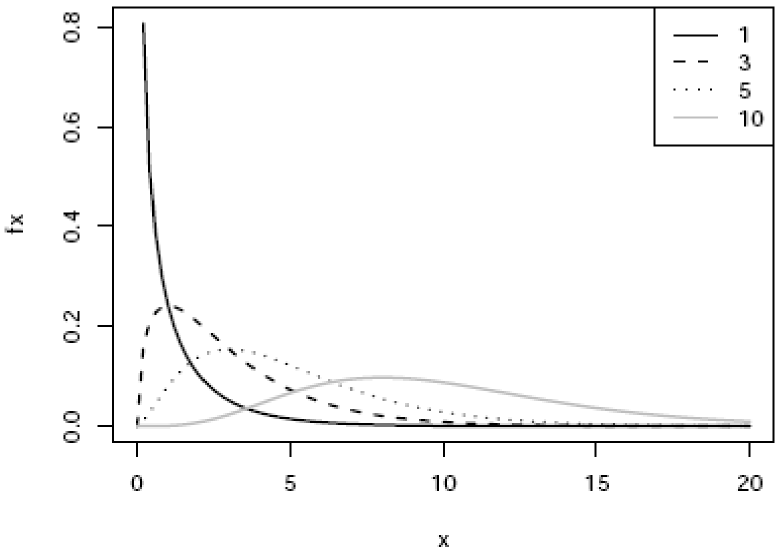
$$\frac{n\,S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

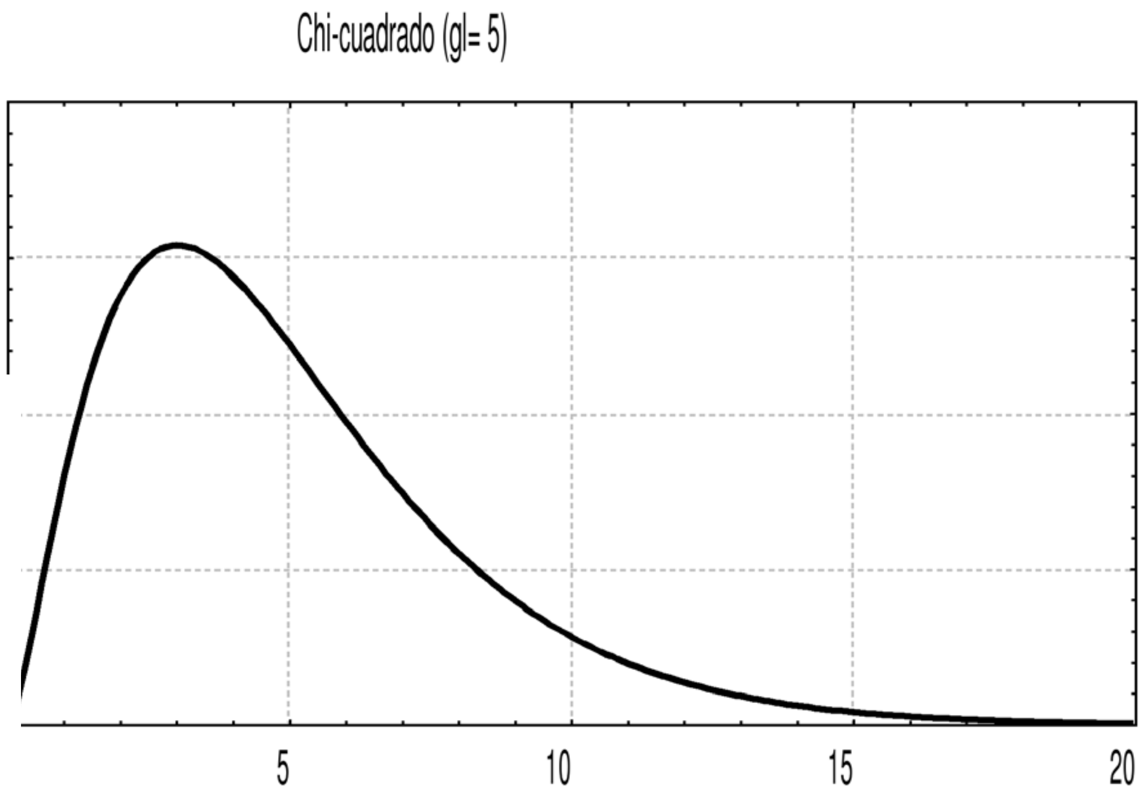


Intervalos de probabilidad de una varianza

Si asumimos que la población sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable aleatoria

$$\frac{n\,S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$





Intervalos de probabilidad de una varianza

Si asumimos que la población sigue una distribución N(μ, σ^2), entonces la variable aleatoria

$$\frac{n\,S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Por tanto:

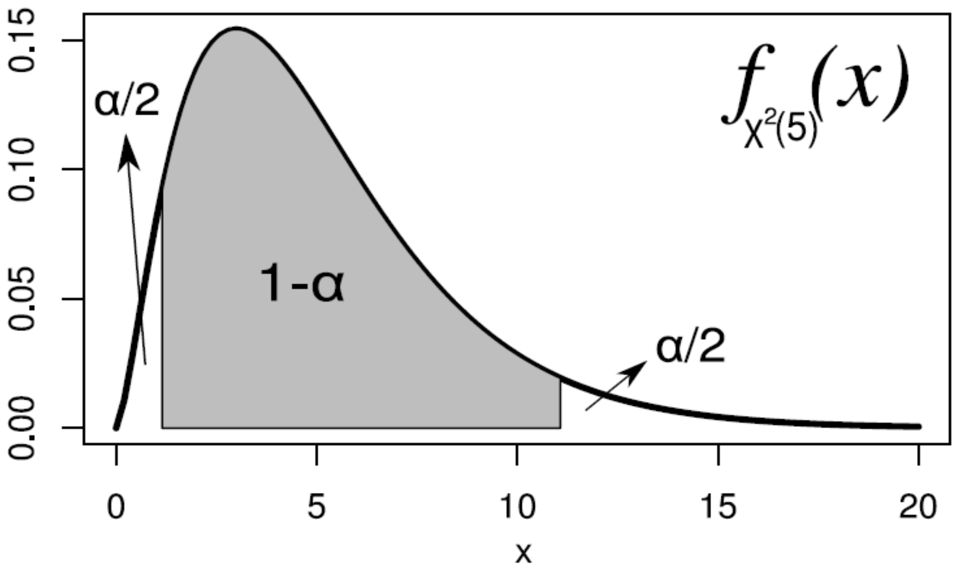
$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P(a \le S_n^2 \le b) = P\left(\frac{na}{\sigma^2} \le \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \le \frac{nb}{\sigma^2}\right) = \\ &= F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{nb}{\sigma^2}\right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{na}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Pero hay infinitos valores de a y b que cumplen esta relación para una confianza dada.

Intervalos de probabilidad de una varianza

$$F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{na}{\sigma^2}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sigma^2}{n} F^{-1}_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{nb}{\sigma^2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sigma^2}{n} F^{-1}_{\chi^2(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$



$$P\left(\frac{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}\sigma^2}{n} \leq S_n^2 \leq \frac{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}\sigma^2}{n}\right) = 1 - \alpha$$

Intervalos de probabilidad de una varianza

	Valores de p									
n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.0_439	0.0_316	0.0_398	0.0_239	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

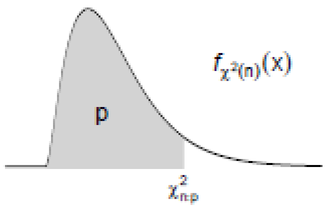


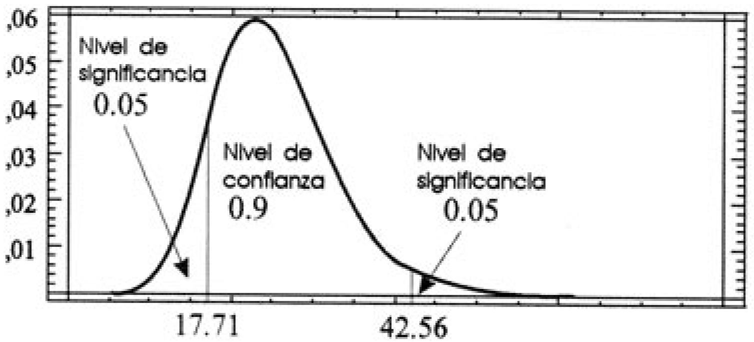
Tabla 5.5: Valores de $\chi^2_{n;p} \equiv F^{-1}_{\chi^2(n)}(p)$. Los subíndices indican el número de repeticiones de un digito. Por ejemplo, $F^{-1}_{\chi^2(1)}(0.005) = 0.0_439 = 0.000039$.

Intervalos de probabilidad de una varianza

n=30

$$1-\alpha = 0.9 \qquad \alpha/2 = 0.05$$

$$F^{-1}_{\chi^2_{(29)}}(0.05) = 17.7084$$
$$F^{-1}_{\chi^2_{(29)}}(0.95) = 42.5570$$



	Valores de p									
n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.0_439	0.0_316	0.0_398	0.0_239	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.[illegible]	15.379	17.292	35.5[illegible]	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.[illegible] a	16.151	18.114	36.7[illegible] b	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.[illegible]	16.928	18.939	37.9[illegible]	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	$\boxed{17.708}$	19.768	39.087	$\boxed{42.557}$	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

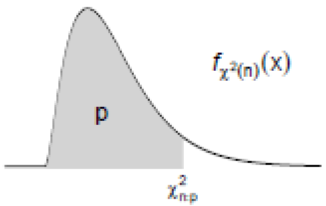


Tabla 5.5: Valores de $\chi^2_{n;p} \equiv F^{-1}_{\chi^2(n)}(p)$. Los subíndices indican el número de repeticiones de un digito. Por ejemplo, $F^{-1}_{\chi^2(1)}(0.005) = 0.0_439 = 0.000039$.

Intervalos de probabilidad de una cuasi-varianza

Para la cuasi-varianza el intervalo de probabilidad se calcularía de la misma manera:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

sigue una distribución Chi-cuadrado con n-1 grados de libertad,

El intervalo de probabilidad vendría dado de la forma:

$$P\left(\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma^2}{n-1} \leq S^2 \leq \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma^2}{n-1}\right) = 1-\alpha$$

Estimadores de una varianza

En la realidad, el problema más frecuente es el de la estimación de los parámetros de la población. Para ello se extrae de la población una muestra de tamaño n y conocida ésta se trata de estimar σ^2.

- **Estimación puntual**: La varianza y cuasi-varianza muestral son buenos estimadores de la varianza de la población. La cuasivarianza tiene la ventaja de se un estimador centrado de σ^2.

$$\bar{S}^2 \longrightarrow \sigma^2$$

No da información alguna de la precisión de la estimación.

- **Intervalo de confianza**: Determina entre que valores (a, b] se encuentra la varianza de la población con cierta probabilidad o certeza (1-α).

$$P(a \leq \sigma^2 \leq b) = 1 - \alpha$$

Complementa la estimación puntual precisando la exactitud de la estimación.

Intervalos de confianza de una varianza

De la misma manera que se hizo para el intervalo de probabilidad (1- α):

$$P\left(\frac{nS_n^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS_n^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}}\right) = 1-\alpha$$

es un **intervalo de confianza para la varianza poblacional** si la población de partida es normal. Por la definición de la cuasi-varianza muestral, este intervalo también se puede escribir como:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}}\right)$$

Ejercicio

Se sabe que el peso por bloque de un cierto preparado de hormigón se distribuye de forma normal. Con el objeto de estudiar la varianza de la distribución, se extrae una m.a.s de 6 bloques. Sabiendo que la varianza muestral es igual a 40, estimar la varianza poblacional mediante un intervalo de confianza al 90%.

Ejercicio

La resistencia a fractura X, en kg/cm2, de unas placas de acero fueron:
69.5; 71.9; 72.6; 73.3; 73.5; 75.5; 75.7; 75.8; 76.1; 76.2; 77; 77.9; 78.1; 79.6; 79.7; 79.9; 80.1; 82.2; 83.7; 93.7

Calcular un intervalo de confianza para la desviación típica de la distribución de la resistencia a fractura al nivel de confianza 0.99 ¿es válido este intervalo cualquiera que sea el tipo de distribución de la v.a. X?

Contraste de hipótesis usando intervalos de confianza

El objetivo del contraste de hipótesis es decidir si una determinada hipótesis o conjetura sobre la **distribución poblacional** estudiada es confirmada o invalidada estadísticamente a partir de las **observaciones de una muestra**, es decir, avalar o rechazar tales informaciones sobre la característica de la población, pero no estimarla.

Ejemplo:

La proporción de mujeres en Madrid toma un valor determinado:

$$P = 50.58\%$$

Contraste de hipótesis usando intervalos de confianza

El planteamiento general de un problema de contraste es el siguiente:

- Se formula una hipótesis o conjetura acerca de la población
- Se trata de ver si esa afirmación se encuentra apoyada por la evidencia experimental que se obtiene a través de una muestra aleatoria.

Una **hipótesis estadística** es una afirmación que se hace con respecto a una o más características desconocidas de una población de interés.

Ejemplo:

Se desea contrastar que la proporción de mujeres en Madrid toma un valor determinado:

$$H_0: P = 50.58\%$$

Contraste de hipótesis usando intervalos de confianza

La realización de un contraste implica la existencia de dos hipótesis:

La **hipótesis nula** H_0 es la que se formula y se quiere contrastar. Es la que el investigador asume como correcta y que no necesita ser probada, es decir, la aceptación de H_0 no implica que ésta sea correcta o que haya sido probada, sino que los datos no han proporcionado evidencia suficiente como para rechazarla.

La **hipótesis alternativa** es la hipótesis opuesta de H_0, de forma que si a partir de la muestra se rechaza H_0 entonces se acepta como cierta H_1.

Ejemplo:

Se desea contrastar que la proporción de mujeres en Madrid toma un valor determinado:

$$H_0: P = 50.58\%$$

$$H_1: P \neq 50.58\%$$

Contraste de hipótesis usando intervalos de confianza

Las afirmaciones no son todas del mismo tipo, pueden involucrar ya sea el valor numérico de algún parámetro, suponiendo la distribución conocida (generalmente la Normal), o la forma funcional no conocida de la distribución de interés a partir de la cual se obtiene la muestra .

1. $H_0 : P = 0.5$
2. $H_0 : \mu = 1.68$
3. $H_0 : F \sim \text{Normal}$

Contraste paramétrico (1, 2)

Contraste no paramétrico (3)

Contrastes paramétricos:

Si: $H_0 : \theta = 0.5$,

entonces H_1 puede ser:

$H_1 : \theta > 0.5$ Contraste unilateral derecho

$H_1 : \theta < 0.5$ Contraste unilateral izquierdo

$H_1 : \theta \neq 0.5$ Contraste bilateral

Contraste de hipótesis usando intervalos de confianza

La estimación del intervalo de confianza de un parámetro implica el cálculo de límites para los cuales es "razonable" que el parámetro en cuestión esté dentro de ellos.

En el contraste se decide si hay evidencias suficientes de que el parámetro en cuestión tenga un determinado valor.

Ambos métodos basan su decisión en el mismo estadístico, cuya distribución muestral es conocida.

La prueba de $H_0 : \theta = \theta_0$
$H_1 : \theta \neq \theta_0$

Contraste bilateral

es equivalente a calcular un **intervalo de confianza** (a un nivel de confianza 1-α) **de θ** y **rechazar H_0** (a un nivel de confianza 1-α) si **θ_0 no está dentro del intervalo de confianza** y aceptarla en caso contrario

Ejercicio

Una muestra aleatoria de 36 cigarrillos de una marca determinada dio un contenido promedio de nicotina de 3mg. Suponga que el contenido de nicotina de este tipo de cigarrillos sigue una distribución normal con una desviación estándar de 1mg.

1. Obtenga e interprete un intervalo de confianza del 95% para el verdadero contenido promedio de nicotina en estos cigarrillos.

2. El fabricante garantiza que el contenido promedio de nicotina es de 2.9 mg, ¿qué puede decirse de acuerdo con el intervalo hallado?

Ejercicio

5.8 En una cadena de producción se quiere estimar la longitud media (ℓ) de un cable fabricado mediante un proceso de producción que sigue una distribución normal con una varianza de 0.01cm. Se toman muestras de 16 cables con los siguientes valores de lontigud en cm:

4.8, 4.94, 4.75, 4.78, 4.95, 4.91, 4.95, 4.96, 5.02, 4.9, 4.86, 5.01, 5.07, 4.95, 5, 4.84

a) ¿Cuál será el intervalo de confianza del 95 % para ℓ?

b) Según este resultado, ¿puede considerarse que este proceso tiene un valor medio de 5.0 cm?

c) ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación de la media poblacional mediante la media muestral?

d) ¿Qué deberíamos hacer si quisiéramos reducir este error a 0.03 cm?