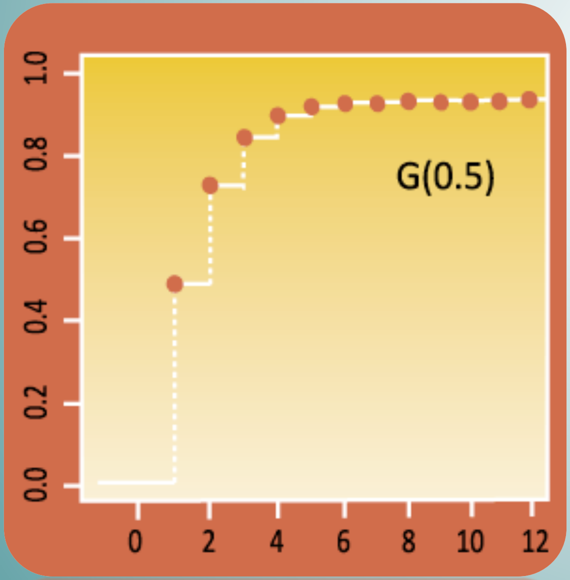
Estadística y Métodos Numéricos

Tema 9. Ecuaciones no lineales



Ángel Barón Caldera
Ángel Cobo Ortega
María Dolores Frías Domínguez
Jesús Fernández Fernández
Francisco Javier González Ortiz
Carmen María Sordo García

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

TEMA9: Ecuaciones No Lineales

1. Introducción
2. Métodos cerrados:
   - Bisección
3. Métodos abiertos:
   - Punto Fijo
   - Newton
   - Secante

Resolución numérica de ec. No lineales

Objetivo:

1. Calcular el valor de x, que cumple

$$f(x) = 0$$

2. Calcular el valor de x que cumple

$$g(x) = h(x) \Rightarrow f(x) = g(x) - h(x) = 0$$

Dada una función f(x) determinar algún valor x' para el que se cumpla f(x')=0. Los valores x' se llaman raíces de f(x).

Resolución numérica de ec. No lineales

Problema a resolver: Dada una función **f(x)** determinar algún valor **x'** para el que se cumpla **f(x')=0**.

Los valores **x'** se llaman **raíces** de f(x). Las raíces pueden ser reales o complejas.

Determinar **raíces reales** de:

1. Ecuaciones algebraicas: $f(x)=x^2-2x+1$
2. Ecuaciones trascendentes (involucran funciones trigonométricas, exponenciales, logaritmicas, etc): $f(x)=sen(x)+e^{-x}$

Método Gráfico

Dibujar la función y=f(x) y observar dónde cruza el eje x. Ese punto representa el valor de x para el cual f(x)=0, es decir, la raíz de la función.

Ejemplo: Encontrar una raíz de la función

$$f(x) = \frac{667.38}{x}\left(1 - e^{-0.146843x}\right) - 40$$

x	f(x)
4	34.1149
8	17.6535
12	6.0669
16	-2.2688
20	-8.4006

Resolución numérica de ec. No lineales

Los métodos de resolución numérica son de tipo iterativo:

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \ldots. \qquad x_n \longrightarrow \ldots..$$

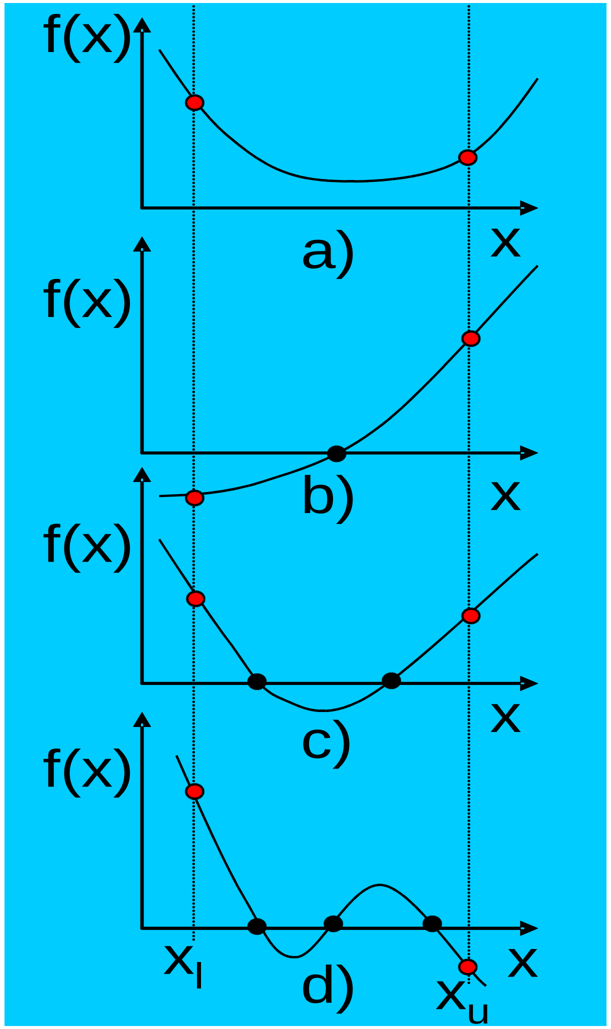
1. Métodos cerrados:
   - Bisección

2. Métodos abiertos:
   - De punto fijo
   - Newton
   - Secante

Métodos cerrados

1. Se basan en el hecho de que una función cambia de signo en la vecindad de una raíz

2. Necesitan dos valores iniciales para la raíz: intervalo



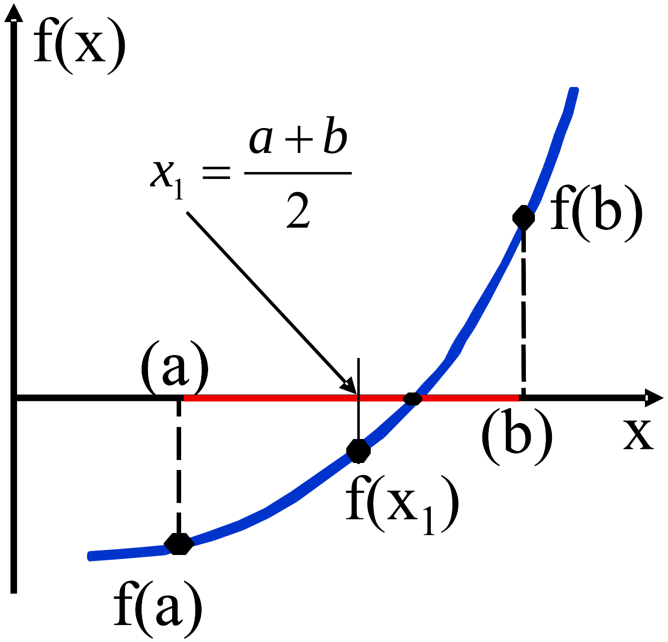
Teorema de Bolzano:

$$\underbrace{\begin{array}{l} f(x) \text{ continua en } [a,b] \\ f(a)f(b) < 0 \end{array}}$$

En [a, b] hay un número **impar** de **raíces** ⇒ En [a, b] al menos hay una raíz

Métodos cerrados: bisección

Se genera una sucesión $\{x_i\}$ de aproximaciones a la raíz calculando los puntos medios de los intervalos:



Primera iteración:

1. Estimar raíz: $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$

2. Comprobar si es raíz: ¿$f(x_1) = 0$?

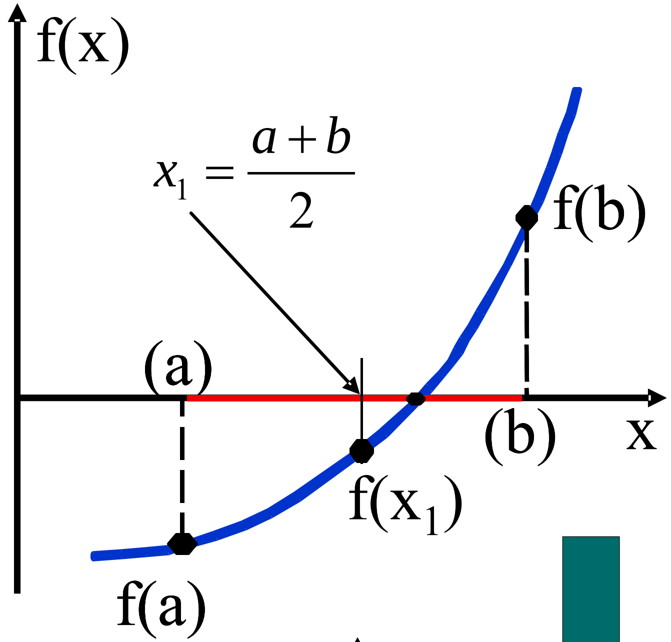
3. Determinar nuevo intervalo:

$$f(x_1)f(a) < 0 \Rightarrow x_1 \to b$$

$$f(x_1)f(a) > 0 \Rightarrow x_1 \to a$$ (Gráfica)

Métodos cerrados: bisección

Se genera una sucesión $\{x_i\}$ de aproximaciones a la raíz calculando los puntos medios de los intervalos:



Primera iteración:

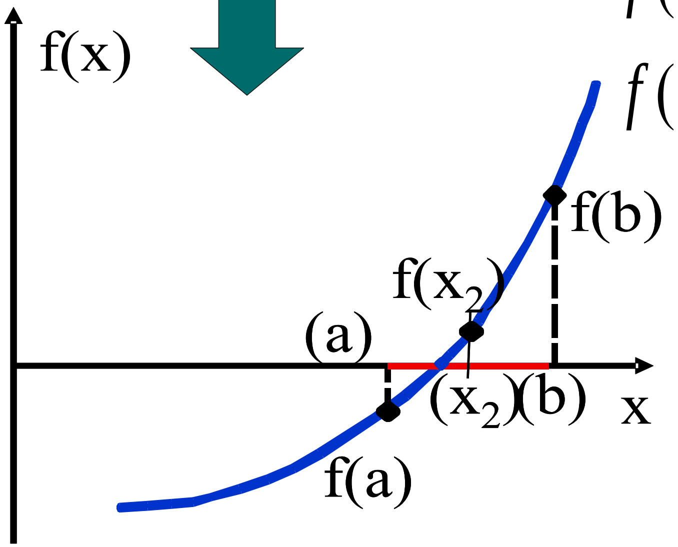
1. Estimar raíz: $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$

2. Comprobar si es raíz: $¿\, f(x_1) = 0\,?$

3. Determinar nuevo intervalo:

$$f(x_1)\,f(a) < 0 \Rightarrow x_1 \rightarrow b$$

$$f(x_1)\,f(a) > 0 \Rightarrow x_1 \rightarrow a \quad \text{(Gráfica)}$$



Segunda iteración:

Repetir con nuevo intervalo

$$x_2 = \frac{a+b}{2}$$

Métodos cerrados: bisección

Dado un intervalo [a,b] y la función f(x) continua en [a,b] y tal que f(a)f(b)<0:

1. **Estimar la raíz** usando el punto medio: $$\tilde{x} = \frac{a+b}{2}$$

2. Comprobar si es la raíz, en otro caso, revisar el intervalo:

Si **$f(a)f(\tilde{x}) < 0$**, $\tilde{x} \longrightarrow b$

Si **$f(a)f(\tilde{x}) > 0$**, $\tilde{x} \longrightarrow a$

3. Repetir pasos 1 y 2 hasta:

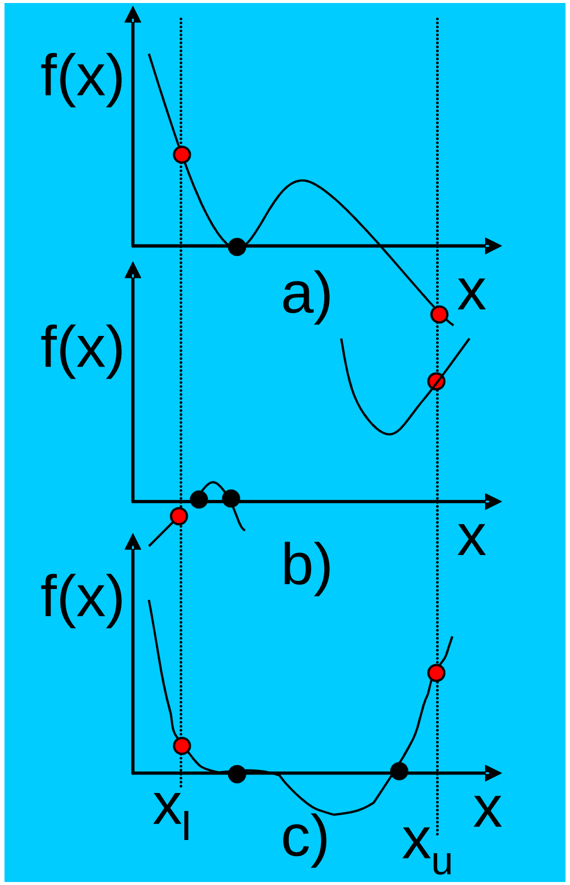
- **$|f(\tilde{x})| \leq \varepsilon$**
- **$|a-b| \leq \varepsilon$**
- Se alcanza el número **máximo** de **iteraciones**
- $$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| < \varepsilon$$ $$E_a = | x_{i+1} - x_i | < \varepsilon$$

Métodos cerrados: bisección

a) Si f(a)f(b) <0 puede haber más de una raíz, al menos habrá una. El método sólo encuentra una de ellas.

b) Si f(x) no es continua en [a,b] no está garantizado el funcionamiento del método

c) Si f(a)f(b) > 0 el método no tiene garantizado el funcionamiento puesto que puede no existir raíz y aunque exista no está definido el criterio para redefinir los intervalos



Métodos cerrados: bisección

Ejemplo: Encontrar una raíz de la función con un error aproximado máximo de 0.005

$$f(x) = \frac{667.38}{x}\left(1 - e^{-0.146843x}\right) - 40$$

Métodos cerrados: bisección

Una ventaja de este método es que se puede calcular el número de iteraciones que deben realizarse para cometer un error absoluto ($E=|x'-\tilde{x}|$) menor o igual de un ε prefijado.

El error absoluto que se comete :

Primera iteración: $E^1 \leq \frac{1}{2}(b-a)$

Segunda iteración: $E^2 \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}(b-a)$

N-ésima iteración: $E^n \leq (b-a)/2^n$

Para cometer un error absoluto menor o igual que una cantidad fijada ε

$$|x' - \tilde{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$$

Métodos cerrados: bisección

Ventajas:

- Simple
- Buena estimación del error absoluto $|E| \leq \left|\frac{b-a}{2}\right|$
- Convergencia garantizada $|E^{i+1}| = 0.5|E^{i}|$

Desventajas:

- Lento
- Requiere una buena estimación del intervalo inicial (que encierra la raíz)

Métodos abiertos

1. Se basan en fórmulas requieren un único valor de inicio o si requieren dos, no es necesario que encierren a la raíz

2. No está garantizada la convergencia

3. En caso de converger, lo hacen mucho más rápido que los métodos cerrados

Métodos abiertos: De punto fijo

Dado un valor inicial para la raíz x_i se predice de forma iterativa una nueva aproximación x_{i+1} como función del valor incial x_i

Para ello se transforma la ecuación f(x)=0 de tal forma que x=g(x)

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = g(x) = \frac{x^2 + 3}{2}$$

$$f(x) = sen\, x = 0 \Rightarrow x = g(x) = sen\, x + x$$

Algoritmo: $x_{i+1}=g(x_i)$ repetir hasta que:

1. $|\varepsilon_a|<\varepsilon$, $E_a<\varepsilon$
2. $|f(\tilde{x})| \leq \varepsilon$
3. Número max. iterac.

Métodos abiertos: De punto fijo

Ejemplo: Use el método del punto fijo para encontrar una raíz de la función, empezando con el valor inicial x_0=0

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Métodos abiertos: De punto fijo

Convergencia del método:

- La ecuación iterativa satisface $x_{i+1}=g(x_i)$
- La raíz x' verifica $x'=g(x')$

- El valor de la función g en un punto x_i se puede expresar usando la serie de Taylor de orden 1 como:

$$g(x_i)=g(x')+g'(\xi)(x_i-x') \quad \text{con } x' \leq \xi \leq x_i$$

$$x_{i+1}=x'+g'(\xi)(x_i-x') \Rightarrow x_{i+1}-x'=g'(\xi)(x_i-x')$$

$$|E_{i+1}|=|g'(\xi)||E_i|$$ **Convergencia lineal**

Si $|g'(\xi)| < 1$ el error absoluto disminuye en cada iteración

Métodos abiertos: Newton-Raphson

La serie de Taylor para f(x') donde x' es la raíz

$$0 = f(x') \approx f(x_i) + f'(x_i)(x' - x_i)$$

De donde podemos despejar la raíz:

$$x' \approx x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

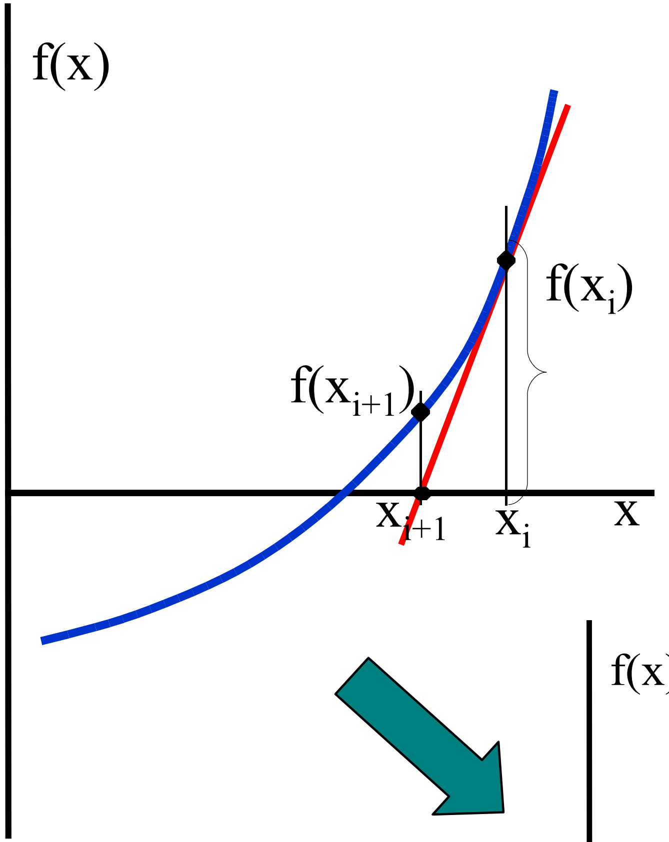
Que proporciona un método para el cálculo iterativo de la raíz:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Que tiene la forma $x_{i+1} = g(x_i)$ con

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x_i)f'(x_i) - f(x_i)f''(x_i)}{(f'(x_i))^2} = \frac{f(x_i)f''(x_i)}{(f'(x_i))^2}$$

Métodos abiertos: Newton-Raphson

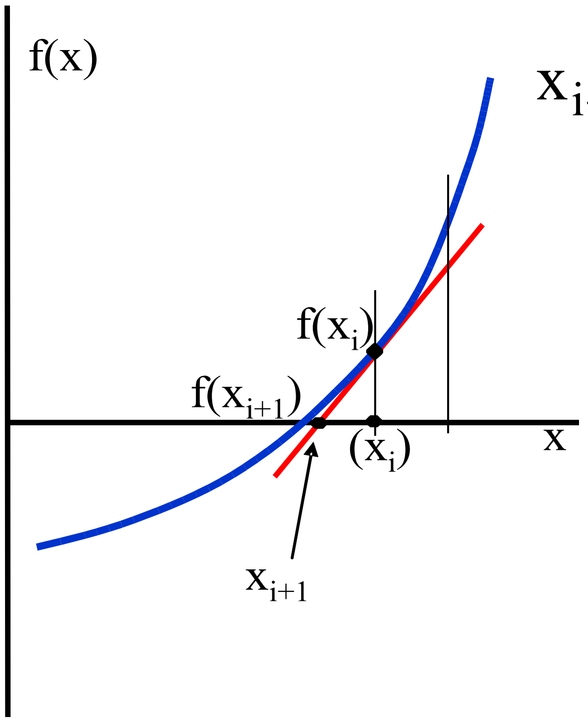


Pendiente de f(x) en el punto x_i

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

Despejando x_{i+1}

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Repetir hasta que:

1. $| f(x_{i+1}) | < \varepsilon$
2. $|\varepsilon_a| < \varepsilon$, $E_a < \varepsilon$
3. Número max. iter.

Métodos abiertos: Newton-Raphson

Ejemplo: Use el método de Newton para encontrar una raíz de la función, empezando con el valor inicial x_0=0

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Métodos abiertos: Newton-Raphson

Convergencia del método:

- La ecuación iterativa satisface $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
- La raíz x' verifica

$$0 = f(x') = f(x_i) + f'(x_i)(x'-x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x'-x_i)^2 \; con \; x' \le \xi \le x_i$$

diviendo por $f'(x_i)$ y reorganizando

$$0 = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} + (x'-x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!\,f'(x_i)}(x'-x_i)^2 \Longrightarrow 0 = -(x_{i+1} - x_i) + (x'-x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!\,f'(x_i)}(x'-x_i)^2$$

$$(x'-x_{i+1}) = -\frac{f''(\xi)}{2!\,f'(x_i)}(x'-x_i)^2 \Longrightarrow \left|E_{i+1}\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2!\,f'(x_i)}\right| \left|E_i^{\,2}\right|$$

E_{i+1} es proporcional a E_i^2 ➡ **Convergencia cuadrática**

Métodos abiertos: Secante

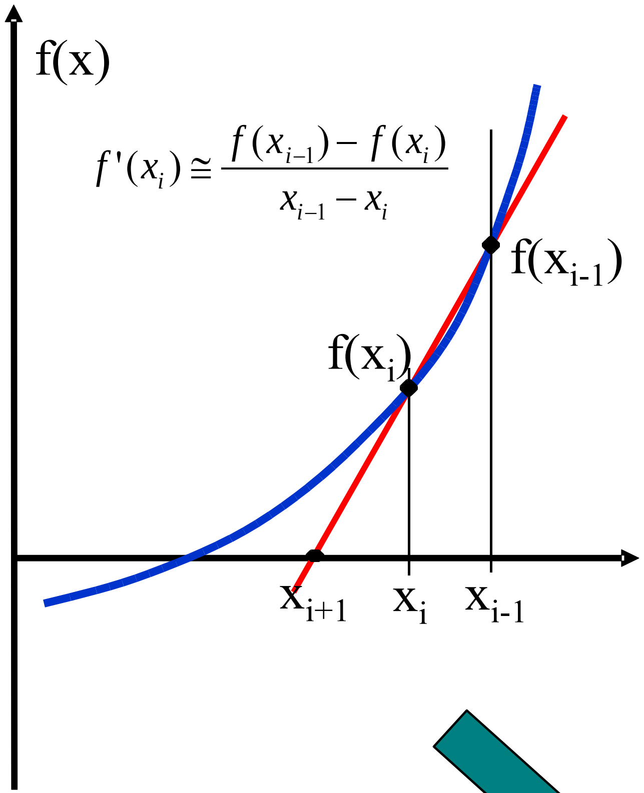
Un posible problema del método de Newton es el cálculo de la derivada. En el método de la Secante se aproxima la derivada mediante diferencias finitas:

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Y se sustituye en la ecuación del método de Newton-Raphson para obtener la expresión iterativa

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

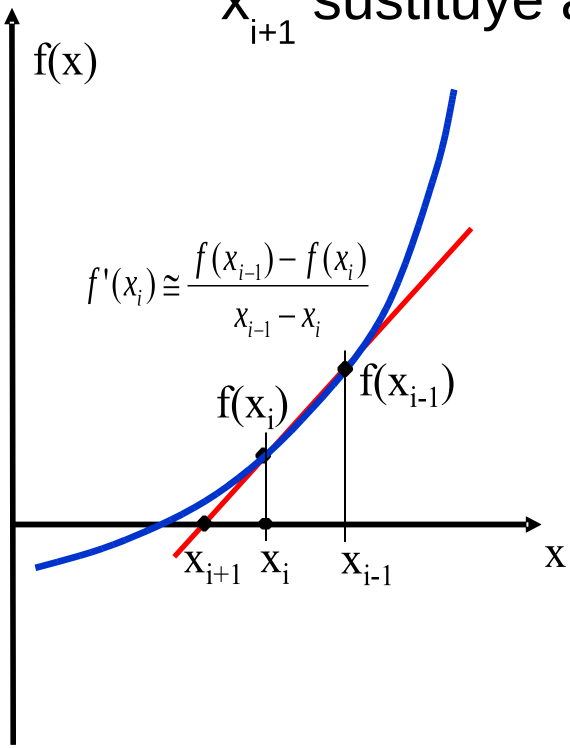
Métodos abiertos: Secante



1. Se parte de dos puntos iniciales x_{i-1} y x_i
2. Se calcula x_{i+1}

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Los valores se reemplazan de forma que x_{i+1} sustituye a x_i y éste a x_{i-1}



Repetir hasta que:

1. $| f(x_{i+1}) | < \varepsilon$
2. $|\varepsilon_a| < \varepsilon$, $E_a < \varepsilon$
3. Número max. iter.

Métodos abiertos: Secante

Ejemplo: Use el método de la Secante para encontrar una raíz de la función, empezando con el valor inicial $x_{-1}=0$ y $x_0=1$

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Métodos abiertos

Ventajas:

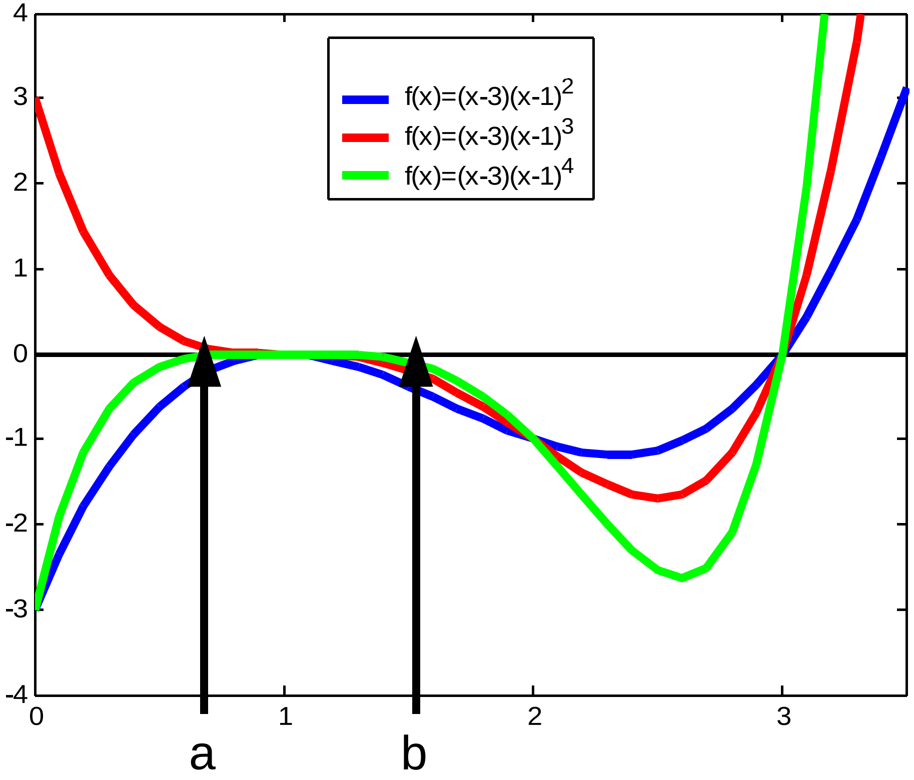
1. Pueden ser muy rápidos

Inconvenientes:

1. No está garantizada la convergencia
2. Requiere una derivada (Newton-Raphson)
3. Requiere dos puntos iniciales (Secante)

aunque no es necesario que encierren a la raíz

Raíces múltiples



- Los métodos cerrados pueden fallar ya que f(a)f(b)>0
- En x=1, f(x)=f'(x)=0, por lo que los métodos de Newton-Raphson y de la secante pueden tener problemas. Pero f(x) alcanza el valor 0 antes que f '(x), entonces si se compara el valor f(x) con 0 en el algoritmo, éste termina antes de evaluar f'(x), aunque la convergencia se hace más lenta

Raíces múltiples: Newton-Raphson modificado

Método de Newton-Raphson modificado para el cálculo de raíces múltiples: redefinir el problema usando una nueva fc. u(x)

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Esta función tiene raíces en los mismos puntos que f(x). Aplicando el método de Newton-Raphson a esta nueva función:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

calculando la derivada de u con respecto a x y sustituyendo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

Raíces múltiples

Ejemplo: Con los dos métodos de Newton calcule la raíz múltiple de la ecuación:

$$f(x) = (x-3)(x-1)^2 = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

Comenzando con el valor inicial x_0=0.