Matemáticas 1

RESUMEN TEORÍA:

Números Complejos

Elena Álvarez Sáiz

Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación

Universidad de Cantabria

Necesidad de ampliar el conjunto de los números reales

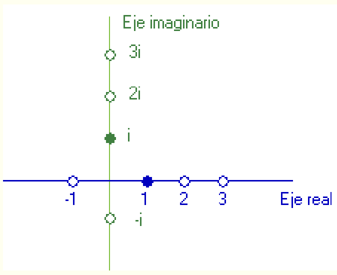
Primera cuestión: ¿Hay algún número que al elevarlo al cuadrado dé -1? ¿Puedo calcular la raíz cuadrada de -1? Puedes pulsar aquí para conocer un poco más sobre cómo surgió la necesidad de plantearse estas preguntas.

- Es claro que no podemos buscar dentro de los números reales ya que cada número real al elevarlo al cuadrado siempre es positivo.
- Debemos entonces inventarnos un número nuevo cuyo cuadrado sea -1. Vamos a llamarlo **i**, **unidad imaginaria**.

¿Dónde representar este nuevo número?

- No puedo hacerlo en la recta real, tiene que estar fuera. Hagamos lo siguiente, dibujemos un eje perpendicular al eje real y coloquémosle ahí.
- Así, siguiendo la misma idea que se utiliza para representar los números reales, podríamos situar los puntos -i, 2i, 3i, ... en el eje vertical en el que hemos colocado a la unidad imaginaria:
- De esa manera se tendrían ya dibujados los números bi siendo b real. A todos estos números los llamaremos **imaginarios** y al eje vertical en el que se pueden representar lo llamaremos EJE IMAGINARIO.

Estos números imaginarios forman parte de un conjunto más grande que llamaremos **números complejos** y que serán objeto de estudio en este módulo.



Definición

El conjunto de los números complejos se define como el conjunto $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto complejo definido anteriormente. Es decir, $\mathbb{C} = \left(\mathbb{R}^2, +, *\right)$.

Adición de Complejos

Se define: $(a\ ,\ b) + (c\ ,\ d) = (a + c\ \ ,\ \ b + d)$

Ejemplo $(2\ ,\ 3) + (3\ ,\ 8) = (2 + 3\ \ ,\ 3 + 8)$

Multiplicación de Complejos

Se define: $(a\ ,\ b) * (c\ ,\ d) = (a \cdot c - b \cdot d\ ,\ a \cdot d + b \cdot c)$

Ejemplo $\left(3\ ,\ 5\right)*\left(2\ ,\ \frac{1}{2}\right) = \left(3\cdot 2\ -\ 5\cdot\frac{1}{2}\ ,\ 3\cdot\frac{1}{2}\ +\ 5\cdot 2\right) = \left(\frac{7}{2}\ ,\ \frac{23}{2}\right)$

Vamos a definir ahora los inversos para estas dos operaciones:

- **Inverso Aditivo (opuesto)**:

Dado $\left(a\ ,\ b\right)$ su opuesto es: $\left(-a\ ,\ -b\right)$

Ejemplo: Entonces $\left(-2\ ,\ 5\right)$ su inverso $\left(2\ ,\ -5\right)$. Observar que:

$$\left(-2\ ,\ 5\right)+\left(2\ ,\ -5\right)=\left(0,0\right)$$

- **Inverso Multiplicativo**:

Dado $\left(a\ ,\ b\right)\neq\left(0,0\right)$ su inverso es: $\left(\frac{a}{a^2+b^2}\ ,\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Ejemplo: Entonces $\left(-2\ ,\ 5\right)$ su inverso $\left(\frac{-2}{29}\ ,\ \frac{-5}{29}\right)$. Observar que:

$$\left(-2,5\right)*\left(\frac{-2}{29}\ ,\ \frac{-5}{29}\right)=\left(1,0\right)$$

Sustracción de complejos

La resta de dos complejos no es más que sumar al primero el opuesto del segundo

$$\left(a\ ,\ b\right)-\left(c\ ,\ d\right) = \left(a\ ,\ b\right) + \left(-c\ ,-d\right) = \left(a-c\ ,\ b-d\right)$$

Ejemplo

$$\left(10\ ,\ 12\right)-\left(8\ ,\ 15\right) = \left(10\ ,\ 12\right) + \left(-8\ ,\ -15\right) = \left(2\ ,\ -3\right)$$

División de complejos

El cociente de dos complejos no es más que multiplicar al primero el inverso del segundo siempre que éste no sea nulo

$$\left(a\ ,\ b\right)/\left(c\ ,\ d\right) =$$
$$= \left(a\ ,\ b\right) * \left(\frac{c}{c^2+d^2}\ ,\frac{-d}{c^2+d^2}\right) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\ ,\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

Ejemplo

$$(1 \;,\; 2)/(3 \;,\; 4) \;=\; (1 \;,\; 2) * \left(\frac{3}{25} \;,\; \frac{-4}{25}\right) \;=\; \left(\frac{11}{25} \;,\; \frac{2}{25}\right)$$

- **Producto por un número de la forma:** $(\lambda, 0)$

$$(\lambda \;,\; 0) * (a \;,\; b) \;=\; (\lambda\, a - 0b \;,\; 0a + \lambda\, b) \;=\; (\lambda\, a \;, \lambda b) \;=\; \lambda\, (a \;,\; b)$$

Luego podemos identificar a los números con segunda componente cero con los **números reales**.

$$(\lambda \;,\; 0) \equiv \lambda$$

Forma binómica

Hasta ahora hemos considerado los números complejos expresados en forma de "par ordenado" vamos a ver otra forma de expresar un número complejo.

Llamemos **unidad imaginaria** $i = (0, 1)$ es fácil ver que:

$$(a \;,\; b) \;=\; (a, 0) + (0, b) = \; (a, 0) + (b, 0) * (0, 1) \equiv a + bi$$

Ejemplo: Entonces

$$\left(-9 \;,\; +\frac{5}{6}\right) \quad \text{su forma binómica es} \quad -9 \;+\; \frac{5}{6} i$$

Es fácil ver que $i^2 = i * i = (0, 1) * (0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$.

Importante: *Para operar con números complejos dados en forma binómica se siguen las mismas reglas de las operaciones en el campo real teniendo en cuenta que* i^2 = -1

Entonces

$$(a \;+\; bi) + (c \;+ di) = (a + c\;) + (b + d) i$$

y para la multiplicación:

$$(a \;+\; bi)(c \;+ di) \;=\; ac + adi + bic + bdi^2$$

$$= ac \;-\; bd \;+ (ad + bc)\; i$$

Con esta nueva notación podemos escribir $\mathbb{C} = \left\{ a + bi \ / \ a,b \in \mathbb{R} \right\}$

Dado un número complejo $z = a + bi$ se llama **parte real** de z al valor real $\mathrm{Re}\left(z\right) = a$ y **parte imaginaria** al valor real $\mathrm{Im}\left(z\right) = b$. Por lo tanto,

$$z = \mathrm{Re}\left(z\right) + i\,\mathrm{Im}\left(z\right)$$

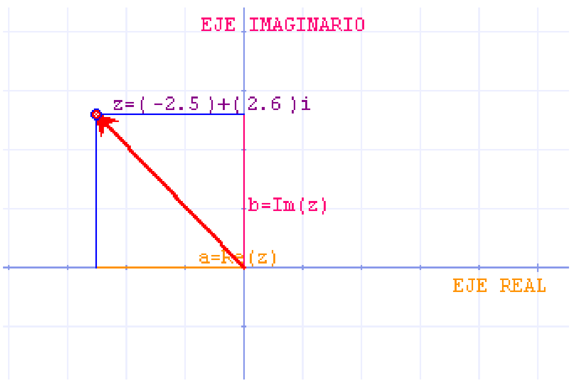
Si la parte real de un número complejo es cero se le llama **Imaginario puro** y si es cero la parte imaginaria se trata de un número real.

$$a + bi \quad \rightarrow \quad si \quad \begin{cases} a = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + bi = bi \quad \mapsto \quad \mathrm{Im}\,aginario\ Puro \\ b = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 0i = a \quad \mapsto \quad Que\ \ representa\ \ un\ \ N^{\circ}\ \ \mathrm{Re}\,al \end{cases}$$

Representación gráfica de números complejos

Fijado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, los números complejos pueden representarse mediante puntos de ese plano, haciendo corresponder a cada número complejo, un punto en el plano.

- El eje “ x ” lo llamaremos **Eje Real** y sobre él se representa la parte real del numero.
- Al eje “ y ” lo llamaremos **Eje Imaginario** y sobre él representaremos la parte imaginaria

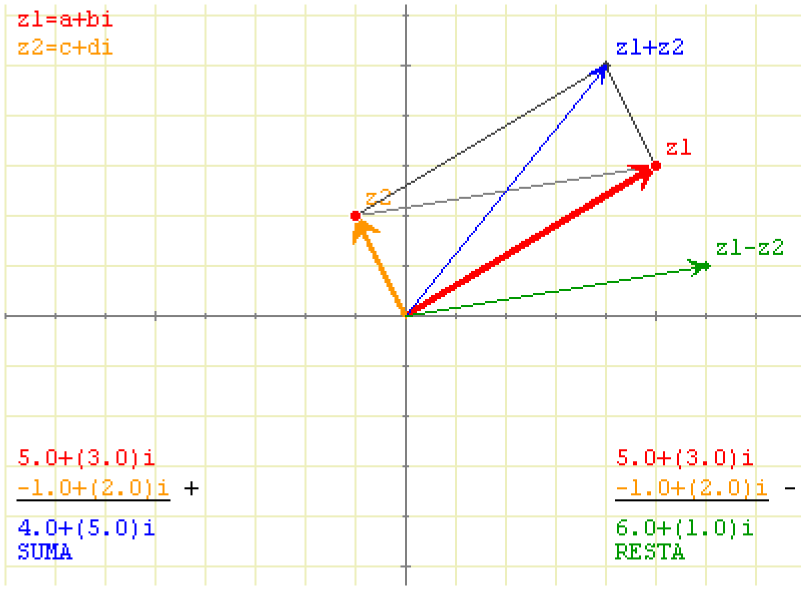


Siguiendo con el tema de la representación gráfica de un complejo, otra manera es la que se llama **Representación Vectorial**. A cada punto del plano le corresponde un Vector, de origen O y extremo Z, siendo O el origen de las coordenadas.

"A cada número complejo le corresponde un vector y a cada vector le corresponde un complejo"

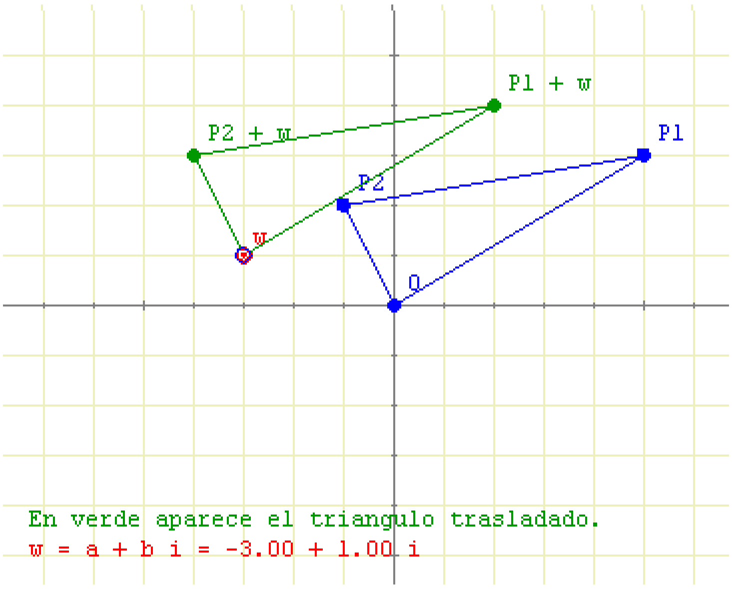
Interpretación geométrica de la suma

Dados dos complejos vectorialmente, la suma de ambos se realiza utilizando la regla del paralelogramo.



El gráfico muestra una interpretación geométrica de la suma vectorial de 2 números, aplicando la regla del paralelogramo.

Ejemplo: Suma como traslación: En el gráfico está representado el triángulo de vértices 0, P1 y P2 en azul y en verde el triángulo de vértices: w, w+P1, w+P2.



Ejercicio: Dar la interpretación vectorial de la resta.

Conjugado de un número complejo

Dado el número complejo $z = x + iy$ su **conjugado** es el número complejo $\bar{z} = x - yi$

Se verifican las siguientes propiedades:

(1) $\bar{\bar{z}} = z$

(2) $\bar{z} = z \;\Leftrightarrow\; z = x + 0\,i \in \mathbb{R}$

(3) $\bar{z} = -z \;\Leftrightarrow\; z = 0 + b\,i \;con\; b \in \mathbb{R}$

(4) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ $\qquad z - \bar{z} = i2\,\mathrm{Im}(z)$

(5) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

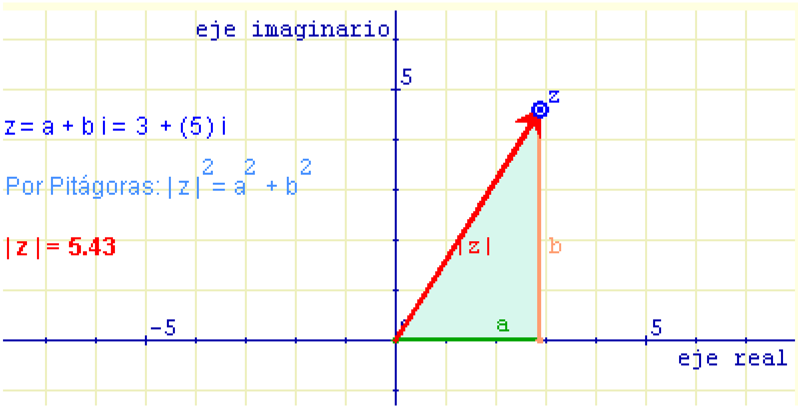
(6) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(7) $\overline{z^{-1}} = \left(\bar{z}\right)^{-1}$

Ejercicio: Probar estas propiedades del conjugado.

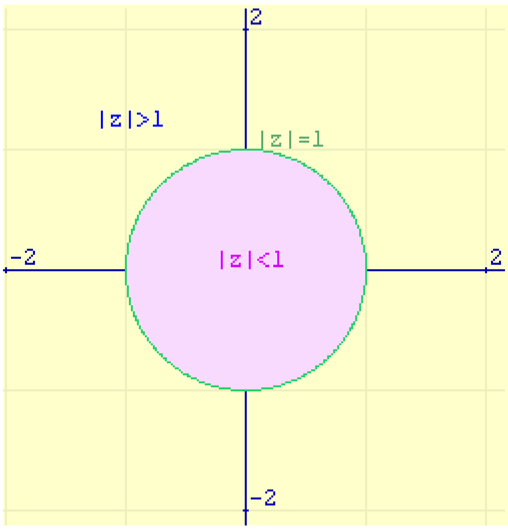
Módulo y argumento

Dado: $z = a + bi$ llamamos **módulo** de Z al número real positivo: $+\sqrt{x^2 + y^2}$



Y se expresa: $\left|Z\right| = \left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Interpretación del módulo como distancia: Si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $\left|z - w\right|$ representa la distancia entre z y w

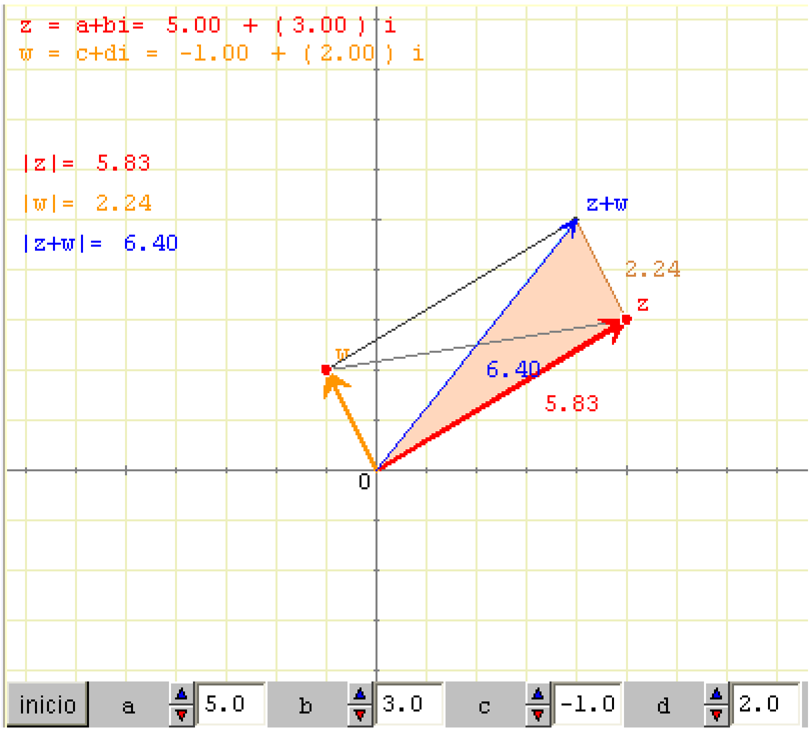


Propiedades del módulo: Si $z, w \in \mathbb{C}$

(1) $\left|z\right| \geq 0$, $\left|z\right| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(2) Desigualdad triangular: $\left|z + w\right| \leq \left|z\right| + \left|w\right|$

Demostración geométrica:



En un triángulo la longitud de uno de los lados es siempre menor que la suma de los otros dos lados.

(3) $\big||z|-|w|\big| \le |z-w|$

(4) $\left|\mathrm{Re}(z)\right| \le |z|$; $\left|\mathrm{Im}(z)\right| \le |z|$; $|z| \le |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

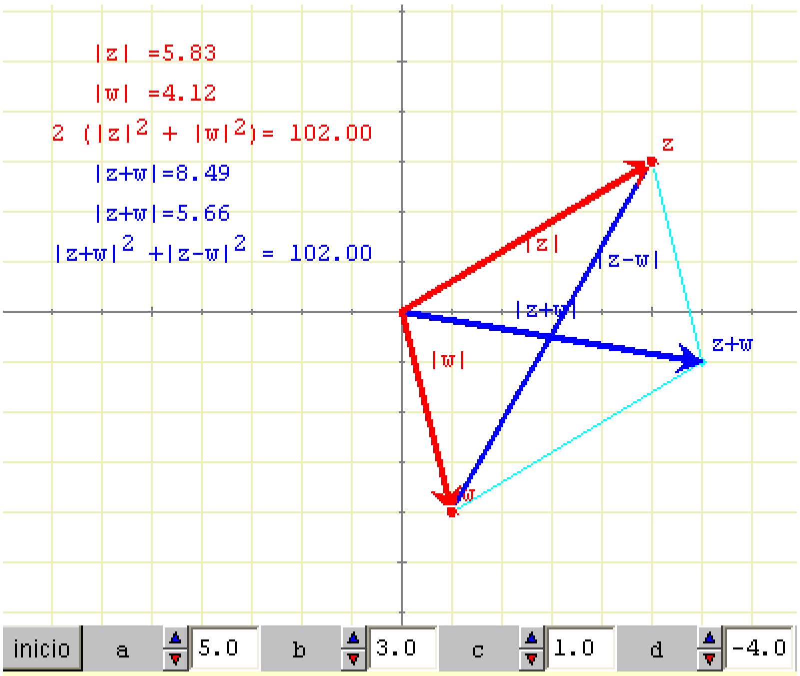
(5) $|z| = |\bar{z}|$

(6) $|z|^2 = z\,\bar{z}$

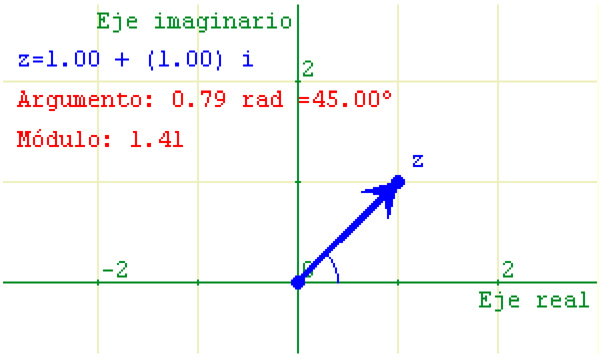
(7) $|z\,w| = |z|\,|w|$

(8) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

(9) Regla del paralelogramo: $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$



Ejercicio: Demostrar estas propiedades del módulo.

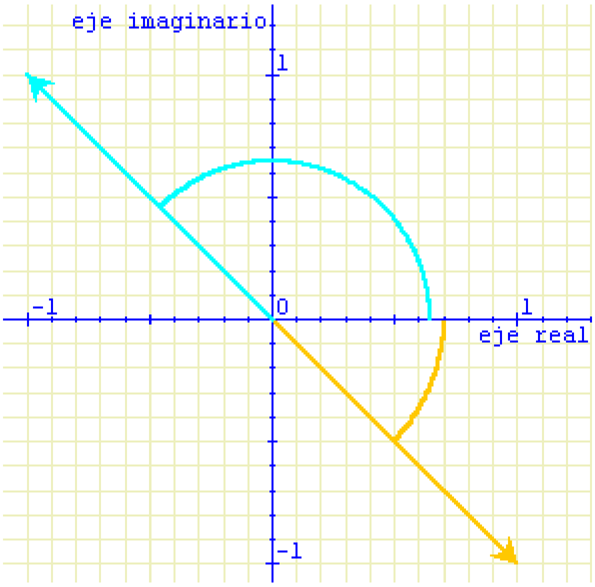


Por ultimo nos queda el **argumento** de un número complejo que lo definimos como la medida del ángulo **φ** en radianes formado por el semieje positivo de las x y el vector que representa al complejo.

Es decir, el argumento del número complejo no nulo $z = x + yi$ es cualquier número **φ** que verifique:

$$z = x + yi = \left|Z\right| \cos\varphi + i\left|Z\right| sen\varphi = \left|Z\right|\left(\cos\varphi + isen\varphi\right)$$

Como las funciones seno y coseno son periódicas de periodo 2π, el argumento de Z está definido salvo múltiplos de 2π. Con otras palabras hay una infinidad de argumentos de z, pero dos cualesquiera de ellos difiere en un múltiplo de 2π. Si $\phi \in (-\pi, \pi]$ se dice que el **argumento es principal**.



Para poder obtener φ de un número complejo dado en forma binómica, tenemos que tener en cuenta el cuadrante en el que se representa dicho número.

Dado: $Z = x + yi$ su argumento se obtiene por $\varphi = arc\ \ tg\left(\frac{y}{x}\right)$ siendo el signo de φ el mismo que el de y.

Entonces (ρ , φ) son las **coordenadas polares** de Z donde

$$\rho = |Z| \ \text{y} \ \ \varphi = \arg\ (Z)$$

Se escribe $z = \rho_\varphi$.

Forma trigonométrica de un número complejo

Vamos a ver ahora una nueva forma de representar un número complejo: su forma trigonométrica. Si tenemos: $z = x + y\ i$ su representación permite escribir

$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$

$$y = \rho \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Reemplazando por los segundos miembros de x e y en la forma binómica:

$$Z = x + y\,i \quad \Rightarrow \quad Z = \rho\,(\cos\,\varphi \;+\; sen\,\varphi\;\; i)$$

Operaciones en forma trigonométrica

Multiplicación: Consideramos

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i sen\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i sen\varphi_2)$$

Si multiplicamos estos dos números complejos:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - sen\varphi_1 sen\varphi_2) + (\cos\varphi_1 sen\varphi_2 + sen\varphi_1\cos\varphi_2)i]$$

Teniendo en cuenta las fórmulas del seno y del coseno de la suma se deduce que:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + sen(\varphi_1 + \varphi_2)i]$$

Por lo tanto,

El módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos y el argumento es la suma de sus argumentos.

División: Consideramos

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i sen\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i sen\varphi_2)$$

Si dividimos estos dos números complejos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\,sen\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\,sen\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\,sen\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\,sen\varphi_2)}{r_2} =$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + sen\varphi_1 sen\varphi_1) + (sen\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 sen\varphi_2)i]$$

Teniendo en cuenta las fórmulas del seno y del coseno de la diferencia se deduce que:

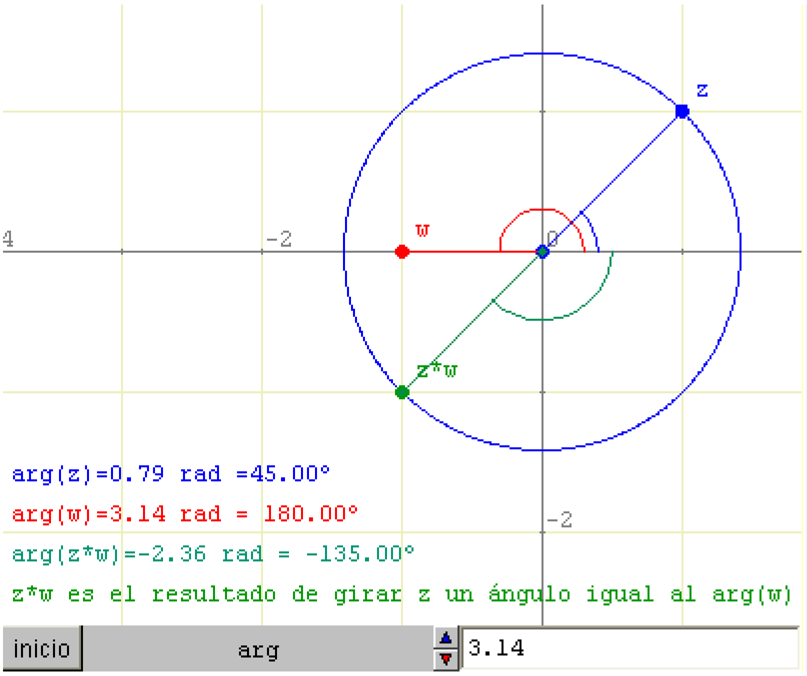
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + sen(\varphi_1 - \varphi_2)i]$$

Por lo tanto,

El módulo del cociente de dos números complejos es el cociente de sus módulos y el argumento es la diferencia de sus argumentos.

Interpretación geométrica del producto

- Multiplicar por un número complejo de módulo 1



- Multiplicar por un número complejo cualquiera: El afijo de z*w se obtiene girando el afijo de z un ángulo en radianes igual al argumento de w y al resultado hacer una dilatación de valor $|w|$

MULTIPLICACIÓN: Dados dos números complejos en forma polar:

$$z_1 = r_\varphi \qquad z_2 = s_\alpha$$

su producto es el número complejo

$$z_1 z_2 = (rs)_{\varphi+\alpha}$$

Ejemplo:

$$4_{\frac{\pi}{4}} \cdot 7_{\frac{\pi}{6}} = 28_{\frac{5\pi}{12}}$$

DIVISIÓN: Dados dos números complejos en forma polar:

$$z_1 = r_\varphi \qquad z_2 = s_\alpha$$

su cociente es el número complejo

$$\frac{z_1}{z_2} = (r / s)_{\varphi-\alpha}$$

Ejemplo:

$$\frac{6_{\frac{\pi}{3}}}{2_{\frac{\pi}{4}}} = 3_{\frac{\pi}{12}}$$

Potencias: Fórmula de Moivre

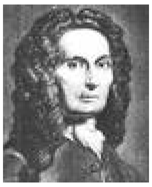
Consideramos z un número complejo de módulo r y argumento φ. Entonces podemos escribir:

$$z = r(\cos\varphi + i\,sen\varphi)$$

multiplicando z por sí mismo n veces se tendrá:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\,sen\varphi)]^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\,sen(n\varphi))$$

donde se ha utilizado que el resultado de multiplicar dos números complejos es otro número complejo de módulo el producto de los módulos de los factores y de argumento la suma de los argumentos de los factores. Esta fórmula se conoce con el nombre de **fórmula de Moivre.**


Abraham de Moivre (1667-1754)

Ejemplo: Si $z = 1 + i$ entonces

$$z^{24} = (1+i)^{24} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\Pi}{4} + i\,sen\frac{\Pi}{4}\right)\right]^{24}$$

$$z^{24} = (\sqrt{2})^{24}(\cos(6\Pi) + i\,sen(6\Pi)) = 2^{12}$$

Función exponencial. Forma exponencial.

Utilizando la **fórmula de Euler**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i sen\varphi \text{ siendo } \varphi \in \mathbb{R}$$

se define la **función exponencial** de $z = x + iy$ como

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i sen y\right)$$

A partir de la forma trigonométrica podemos encontrar la **forma exponencial** de un número complejo ya que

$$z = r\left(\cos\varphi + isen\varphi\right) = re^{i\varphi} \text{ siendo } r = \left|z\right|, \varphi = \arg\left(z\right)$$

PROPIEDADES.- Si $z, w \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes propiedades

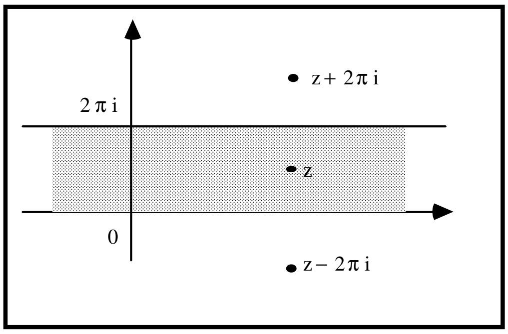
(i) $e^{z+w} = e^z e^w$ (ii) $e^0 = 1$ (iii) $e^z e^{-z} = 1$ ¡

(iv) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ (v) $\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ (vi) $\arg e^z = \mathrm{Im}\left(z\right)$

(vii) $\mathrm{Re}\left(e^z\right) = \mathrm{Re}\left(e^{a+bi}\right) = e^a \cos b$ (viii) $\mathrm{Im}\left(e^z\right) = \mathrm{Im}\left(e^{a+bi}\right) = e^a senb$

(ix) $\left(e^z\right)^{-1} = e^{-z}$

(x) La función exponencial es periódica de periodo $2\pi i$. Esta propiedad afirma que los valores que toma la función exponencial en la banda de la figura son los que toma fuera de ella.



Ejercicio: Demostrar las propiedades de la función exponencial.

Raíces enésimas

Mediante la fórmula de Moivre podemos calcular las potencias de base un número complejo y de exponente un número entero. Veamos ahora cómo calcular las potencias con exponente un número fraccionario. Si m/n es un número fraccionario, observamos que

$$w^{m/n} = (w^m)^{1/n}$$

- El valor de w^m se puede obtener por la fórmula de Moivre.
- El problema se reduce a calcular entonces las raíces n-ésimas de un número complejo: $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$.

Veamos cómo hacerlo empezando con un **ejemplo**: **imagina que quieres calcular las raíces sextas de -1.**

Tienes que determinar los números z tales que $z^6 = -1$. Si r es el módulo de z y φ su argumento utilizando la representación de los números complejos en forma trigonométrica se tendrá que cumplir la igualdad:

$$[r(\cos\varphi + i sen\varphi)]^6 = 1(\cos\Pi + i sen\Pi)$$

Utilizando la fórmula de Moivre para calcular las potencias de un número complejo

$$r^6(\cos 6\varphi + i sen 6\varphi) = 1(\cos\Pi + i sen\Pi)$$

Igualando los módulos y los argumentos

$$r^6 = 1 \qquad 6\varphi = \Pi + 2k\Pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto todos los números complejos de módulo $r = \sqrt[6]{1} = 1$ y argumento:

$$\varphi = \frac{\Pi + 2k\Pi}{6} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

son raíces sextas de -1.

Las raíces n-ésimas de un número complejo w son n números complejos que tienen de módulo la raíz n-ésima del módulo de z y por argumento tomando k valores enteros desde 0 hasta n-1.

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}_{\frac{\arg(w)+2k\Pi}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Observa que las raíces enésimas de un complejo de módulo r están distribuidas regularmente en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$.

Logaritmo neperiano

Se define el logaritmo neperiano de $z \in \mathbb{C}$ como el valor complejo w que cumple $e^w = z$. Si w = a + bi y z=r (cos ϕ + i sen ϕ) entonces

$$r = e^a$$
$$b = \phi + 2k\pi \qquad k \in Z$$

Se define el **logaritmo neperiano de un número complejo** $z \in \mathbb{C}$ como el valor complejo w tal que $e^w = z$.

Si $w = a + bi$ y $z = r(\cos\varphi + i sen\varphi)$ entonces para calcular el logaritmo neperiano de z se ha de encontrar los números reales a y b de forma que

$$e^{a+bi} = r(\cos\varphi + i sen\varphi)$$

es decir,

$$e^a(\cos b + i sen b) = r(\cos\varphi + i sen\varphi)$$

Igualando módulos y argumentos

$$r = e^a$$
$$b = \varphi + 2k\Pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto,

$$a = \log r \qquad b = \varphi + 2k\Pi \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$w = Log z = \log r + i(\varphi + 2k\Pi) \quad , k \in \mathbb{Z}$$

Notación.- Utilizaremos la notación de Log para el logaritmo neperiano complejo y log para el logaritmo neperiano real.

Esto significa que cada número complejo tiene infinitos logaritmos neperianos. Para cada valor de k se tiene una determinación o rama de la función logaritmo.

Esto significa que un número complejo tiene infinitos logaritmos neperianos. Para cada valor de k se tiene una determinación o rama de la función neperiano. Si k=0 se obtiene la ***rama principal***.

Potencias complejas

Si se tienen z^w con $z, w \in \mathbb{C}$ se define

$$z^w = e^{w \log z}$$

Conviene observar que como el logaritmo neperiano de un número complejo tiene infinitos valores, entonces existen infinitos valores para las potencias complejas. Se llamará principal a aquella que corresponde al valor principal de log z.

Logaritmo complejo

Podemos definir en este momento el logaritmo de un número complejo w cuando la base no es el número e sino otro número complejo z. Si $z, w \in \mathbb{C}$ se define el logaritmo en base z de w como

$$\log_z w = \frac{\log w}{\log z}$$

Nota: Se define igual que en $\mathbb{R}$.

$$\log_z w = t \Leftrightarrow z^t = w \Leftrightarrow t \log z = \log w \Leftrightarrow t = \frac{\log w}{\log z}$$

Funciones trigonométricas

De la misma forma que hemos ampliado al campo complejo las funciones exponencial y logaritmo en este apartado vamos a extender las funciones trigonométricas a los complejos.

En primer lugar observamos que si $a \in \mathbb{R}$ entonces se tiene

$$e^{ia} = \cos a + isena$$

$$e^{-ia} = \cos a - isena$$

Por lo tanto,

$$e^{ia} + e^{-ia} = 2\cos a$$

$$e^{ia} - e^{-ia} = i2sena$$

Extendiendo estas fórmulas al campo complejo definimos el **seno** y el **coseno complejos**

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

A partir del seno y el coseno queda definido también la **tangente y la cotangente**

$$tgz = \frac{senz}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} \quad si\ z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot gz = \frac{\cos z}{sen\ z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)} \quad si\ z \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

PROPIEDADES.- Si $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple

(i) $sen^2 z + \cos^2 z = 1$

(ii) $sen\left(z + w\right) = senz\cos\omega + \cos z\, senw$

(iii) $\cos\left(z + w\right) = \cos z\cos\omega - senz\, senw$

(iv) $sen\left(z\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

(v) $\cos\left(z\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

(vi) Las funciones seno y coseno son periódicas de periodo 2π :

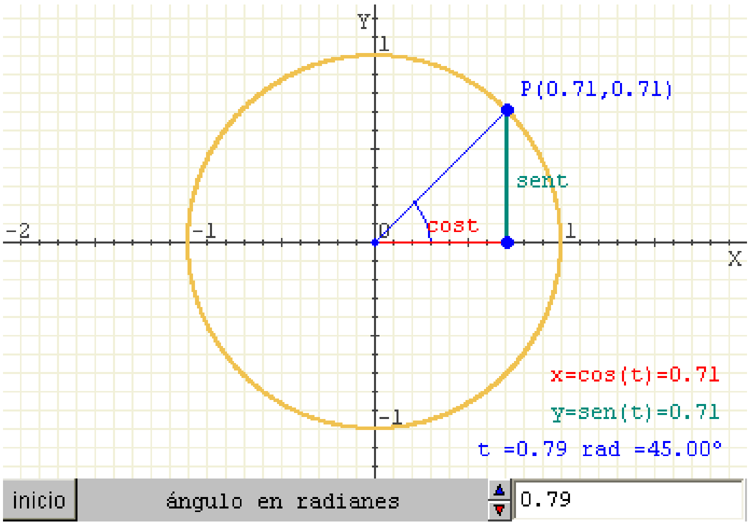
$$sen\left(z + 2k\pi\right) = sen\left(z\right)\ ,\ \cos\left(z + 2k\pi\right) = \cos\left(z\right)$$

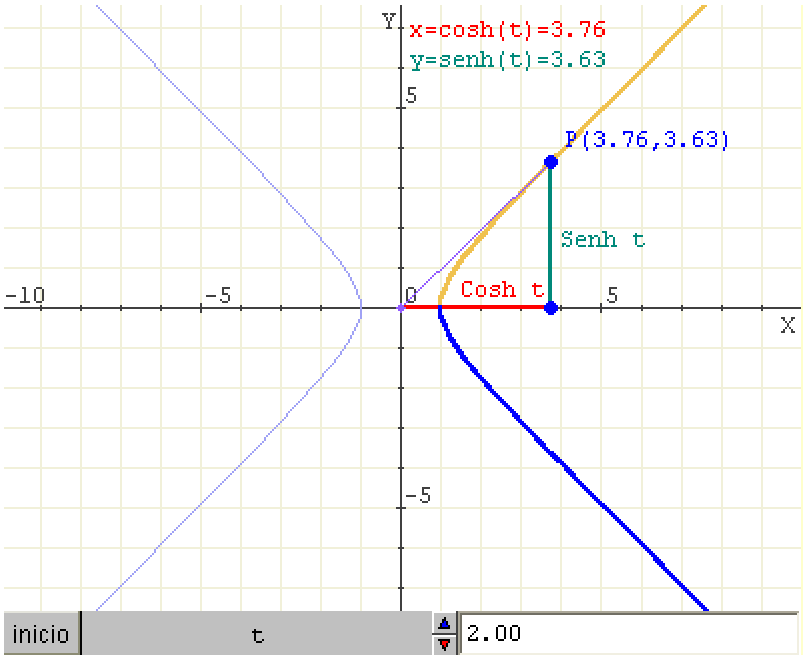
IMPORTANTE: Hay que hacer notar que aunque en $\mathbb{R}$ el seno y el coseno toman valores entre -1 y 1, en $\mathbb{C}$ no es cierto.

Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se pueden definir también por analogía con las funciones circulares, tomando como referencia una hipérbola equilátera unidad, x^2-y^2=1, en lugar de una circunferencia. De esta forma el seno hiperbólico es la razón entre la ordenada correspondiente y el semieje transverso de una hipérbola equilátera unidad.

En la figura se representa el seno y el coseno hiperbólico y su analogía con el seno y coseno trigonométricos.





Sea $t \in \mathbb{R}$ entonces las funciones hiperbólicas reales se definen de la forma:

$$Cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad Sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Extendiendo estas fórmulas al campo complejo definimos el **seno y el coseno hiperbólicos**. Si $z \in \mathbb{C}$ se define

$$Chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad Shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

A partir del seno y el coseno queda definido también la **tangente** y la **cotangente**

$$Thz = \frac{Shz}{Chz} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad si \;\; z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}i \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$Cothz = \frac{Chz}{Shz} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \quad si \;\; z \neq k\pi\, i \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Se verifican las fórmulas fundamentales como enuncia la proposición siguiente.

PROPOSICIÓN.- Si $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple

(I) $Ch^2 z - Sh^2 z = 1$

(ii) $Sh(z+w) = Shz\, Chw + Chz\, Shw$

(iii) $Ch(z+w) = Chz\, Chw + Shz\, Shw$

(iv) $Sh(z) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; z = k\pi i\, ,\; k \in \mathbb{Z}$

(v) $Ch(z) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; z = (2k+1)\frac{\pi}{2} i\, ,\; k \in \mathbb{Z}$

(vi) Las funciones seno y coseno hiperbólicos son periódicas de periodo $2\pi i$, es decir, se verifica $Sh(z + 2k\pi i) = Shz \quad Ch(z + 2k\pi i) = Chz\, ,\; k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio: Demostrar estas propiedades de las funciones hiperbólicas complejas.

Relación entre las funciones hiperbólicas y las funciones trigonométricas:

$$Ch(z) = \cos(iz) \qquad\qquad Sh(z) = -isen(iz)$$

Funciones polinómicas. Teorema Fundamental del Algebra

A menudo en la práctica necesitamos resolver ecuaciones polinómicas de la forma

$$p(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \quad con \quad a_i \in \mathbb{C}$$

Si se tiene el polinomio

$$p(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \quad con \quad a_i \in \mathbb{C},\;\; a_n \neq 0$$

- al número natural "n" se le llama **grado del polinomio** no nulo y
- al coeficiente "a_n" **coeficiente director**.

En el estudio que realizaremos de los polinomios nos centraremos principalmente en el cálculo de sus raíces.

Se dice que un número complejo a es **raíz del polinomio**

$$p(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

si $p(a) = a_o + a_1 a + a_2 a^2 + ... + a_n a^n = 0$

Ejemplo: Dado el polinomio $p(z) = 1 + z^2$ el punto $a = i$ es raíz ya que $p(i) = 1 + i^2 = 0$

PROPOSICIÓN.- El número complejo "a" es raíz del polinomio

$$p(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

si y solamente si dicho polinomio es divisible por $q(z) = z - a$.

PROPOSICIÓN.- Sea $p(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ un polinomio con todos los coeficientes reales. Entonces si z_o es una raíz compleja también lo es su conjugada.

TEOREMA (FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA).- Un polinomio

$$p(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

con coeficientes en $\mathbb{C}$ se puede escribir de la forma

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_r)^{k_r} \qquad \text{con } k_1 + k_2 + ... + k_r = n$$

(k_i es la multiplicidad de la raíz z_i)

Observación: Este teorema se expresa a menudo diciendo que un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ de grado n en una indeterminada tiene n raíces complejas. Sin embargo este teorema no da ningún método para su cálculo.

Se conocen fórmulas generales para calcular las raíces de un polinomio de grado dos, tres y cuatro, y se ha demostrado la imposibilidad de obtener fórmulas generales para el cálculo de las raíces de polinomios de grado mayor o igual a cinco.

Nota: Si detectas algún error o errata ponte en contacto con la profesora para su corrección.