Matemáticas 1

RESUMEN TEORÍA:

Sucesiones y Series

Elena Álvarez Sáiz

Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación

Universidad de Cantabria

SUCESIONES EN $\mathbb{R}$

Prerrequisitos:

- Desigualdades de números reales
- Conceptos generales de funciones: dominio, cotas, crecimiento, …
- Conocimiento de las propiedades de las funciones elementales: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y del valor absoluto.
- Cálculo de límites, indeterminaciones y regla de L'Hopital
- Cálculo de derivadas y estudio del crecimiento de una función
- Métodos de demostración: inducción y reducción al absurdo.

Objetivos:

1. Tener claros los siguientes conceptos:
   - Qué es una sucesión
   - Sucesión acotada, sucesión monótona, sucesión convergente/divergente/oscilante
   - Relación entre acotación, monotonía y convergencia de una sucesión
   - Propiedades de los límites de sucesiones
   - Órdenes de magnitud de una sucesión:
     - Sucesiones del mismo orden
     - Sucesiones equivalentes
     - Sucesión de orden superior/inferior

2. Saber hacer:
   - Estudiar la convergencia de una sucesión

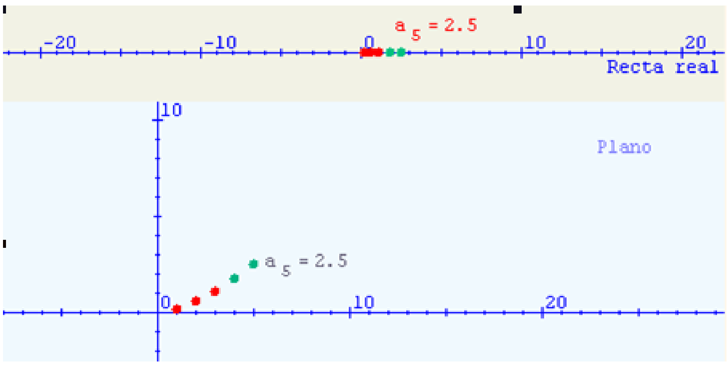
- Técnicas de límites
- Regla del sándwich o Teorema del encaje
- El producto de un infinitésimo por una sucesión acotada es un infinitésimo
- Sucesiones recursivas

- Determinar el orden de magnitud de una sucesión
- Comparar el orden de infinitud de una sucesión

DEFINICIONES BÁSICAS

Dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son iguales si $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión admite una representación en la recta real y en el plano:



Sucesiones monótonas

Definiciones:

A) Una sucesión (a_n) se denomina **monótona creciente** si verifica:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$$

esto es si se cumple $a_n \le a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

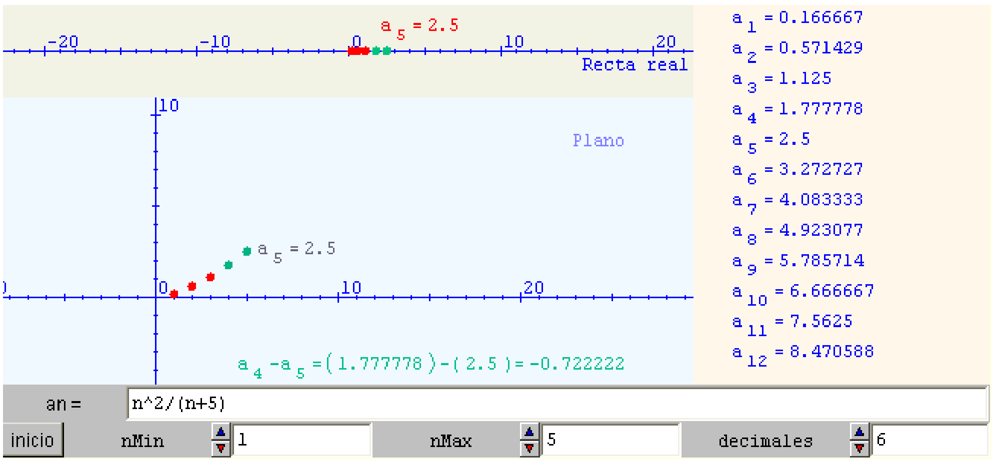
Si verifica $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se llama **estrictamente creciente**.

B) Análogamente, una sucesión (a_n) se denomina **monótona decreciente** si se cumple

$$a_n \ge a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si verifica $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se llama **estrictamente decreciente**.

C) Una sucesión se denomina **monótona** si es monótona creciente o monótona decreciente.



Applet Laboratorio Sucesiones

Ejemplos :

- La sucesión -1, -2, 3, -4, -5, 6, -7, -8, 9 ... no es monótona.
- La sucesión de término general $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ tampoco es monótona.
- La sucesión de término general $a_n = n$ es monótona creciente y también estrictamente creciente.
- La sucesión -1, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2 ... es monótona creciente, pero no es estrictamente creciente.
- La sucesión de término general $a_n = -n^2$ es monótona decreciente y es también estrictamente decreciente.

- La sucesión $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\ldots$ es monótona decreciente, sin embargo no es estrictamente decreciente.

Nota práctica:

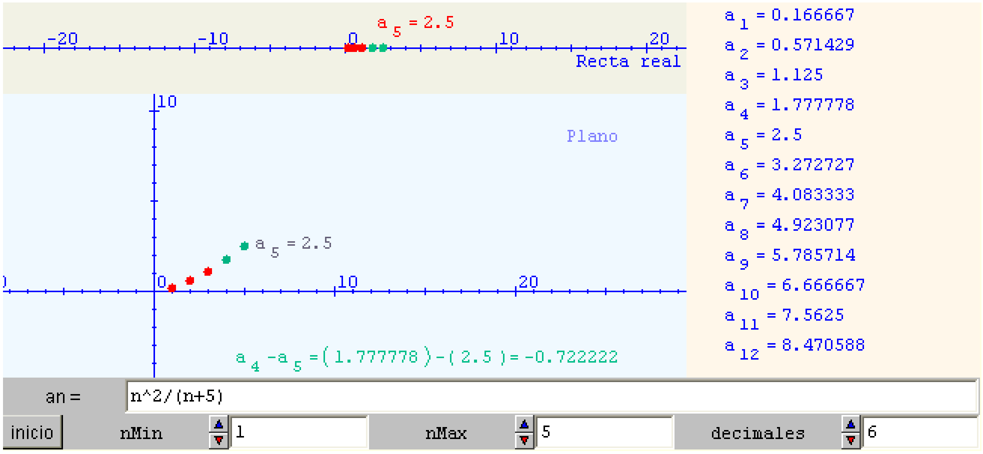
- En algunos casos, para probar que una sucesión es monótona creciente resulta útil probar que $a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y para sucesiones de términos positivos también se puede demostrar probando que se cumple:

$$- \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Análogamente, para las sucesiones monótonas decrecientes se probará que $a_{n+1} - a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, o bien, si es de términos positivos, que verifica

$$- \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Teniendo en cuenta que una sucesión es una aplicación de los números naturales en los reales, para ciertas sucesiones, se puede utilizar técnicas de cálculo diferencial para estudiar la monotonía. Bastará considerar la función resultado de cambiar n por x en el término general de la sucesión. Si $a_n = f(n)$ y $f'(x) > 0$ (respectivamente $f'(x) < 0$) para $x > n_o$ entonces a_n es creciente (respectivamente) para $x > n_o$.



Applet Laboratorio Sucesiones

Sucesiones acotadas.

A) Decimos que un número real k es **cota superior** de la sucesión (a_n) si verifica

$$a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se denomina **supremo** a la menor de las cotas superiores. Si el supremo es un término de la sucesión se denomina **máximo**.

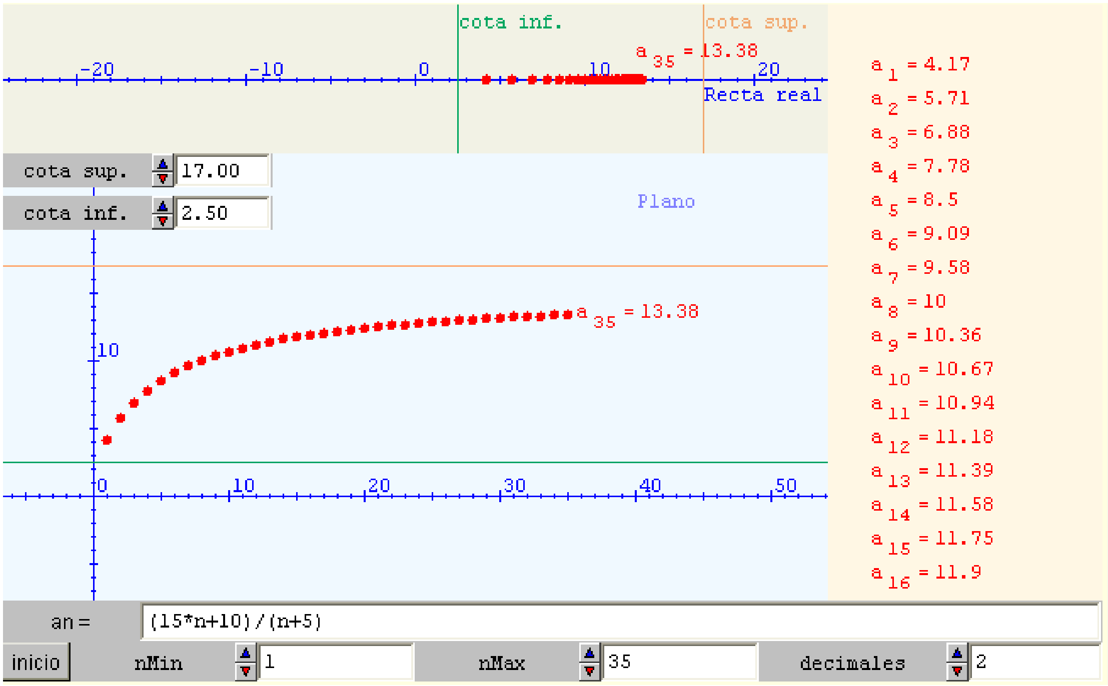
Análogamente, dicho número k será **cota inferior** de la sucesión (a_n) si verifica

$$k \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Llamamos **ínfimo** a la mayor de las cotas inferiores. Si el ínfimo es un término de la sucesión se denomina **mínimo**.

B) Una sucesión (a_n) decimos que está **acotada superiormente** si tiene alguna cota superior. De forma análoga, diremos que la sucesión está acotada inferiormente si tiene alguna cota inferior.

C) Una sucesión (a_n) decimos que es **acotada** si está acotada superior e inferiormente.



Applet Laboratorio Sucesiones

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

Decimos que el límite de una sucesión $\left(a_n\right)$ es L, y lo escribimos así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

o también

$$a_n \to L$$

si es posible conseguir que $\left| a_n - L \right|$ sea tan pequeño como queramos, sin más que asignarle a n valores tan grandes como sea necesario. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \textit{existe}\ N_o \in \mathbb{N}\ \textit{tal que} \left| a_n - L \right| < \varepsilon \quad \forall n > N_0$$

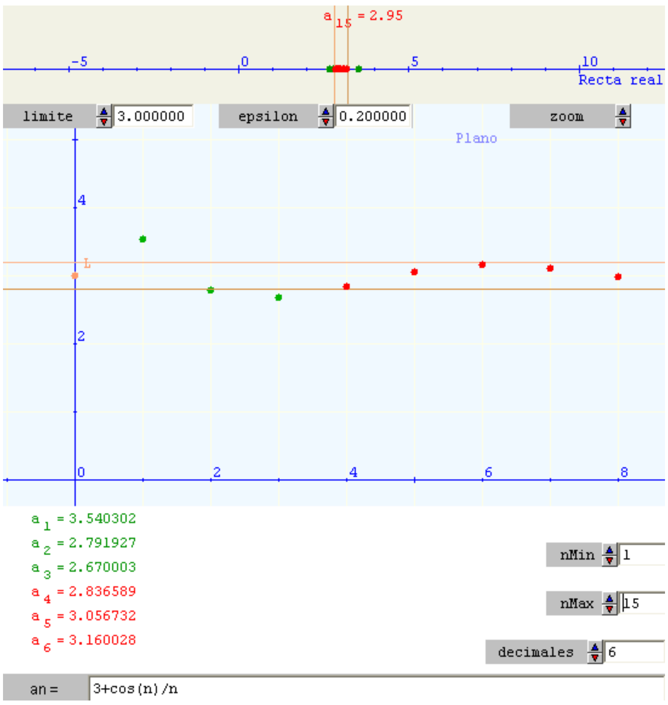
La definición anterior significa que si queremos que los términos de la sucesión se alejen de L una distancia menor que ε, lo podemos conseguir para todos los términos posteriores a un cierto número natural N_o. Cuanto más pequeño sea ε más grande habrá que tomar el valor de N_o.

La definición anterior se lee " límite cuando n tiende a infinito de a_n igual a L". También se puede escribir

$$\lim\ a_n = L$$

pues n sólo puede tender a infinito.

Las sucesiones que tienen límite se denominan **convergentes**.

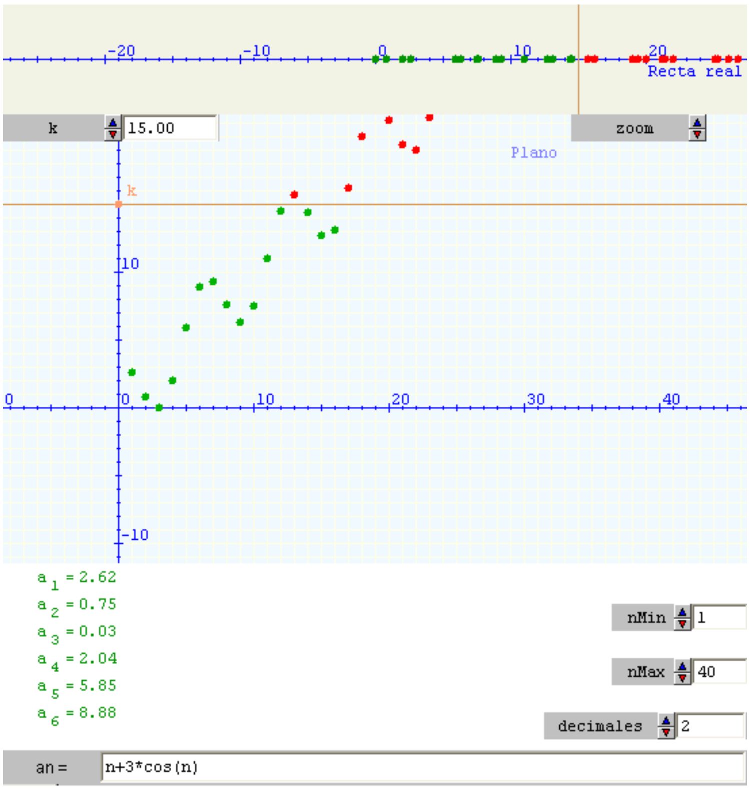


Applet Laboratorio Sucesiones

Sucesiones divergentes:

La sucesión (a_n) **tiende a infinito** (∞) si cualquiera que sea el número real k fijado, por grande que este sea, podemos conseguir que los términos de la sucesión superen dicho valor sin más que tomar valores de n mayores que un número natural N_0. Simbólicamente esto puede escribirse así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad tal\ que \quad a_n > k \quad \forall n > N_0$$



Applet Laboratorio Sucesiones

La sucesión (a_n) **tiende a menos infinito** $(-\infty)$ si cualquiera que sea el número real k fijado, por grande que este sea, podemos conseguir que los términos de la sucesión sean menores que –k, sin más que tomar valores de n mayores que un número natural N_0. Simbólicamente esto puede escribirse así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad tal\ que \quad a_n < -k \quad \forall n > N_0$$

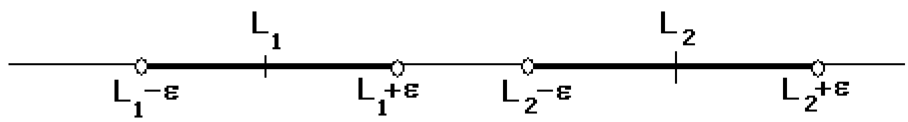
Unicidad del límite: Si la sucesión (a_n) tiene límite, finito o no, este es único.

Demostración:

Sea (a_n) una sucesión convergente y supongamos que tiene dos límites L_1 y L_2, siendo $L_1 < L_2$. A partir de un cierto valor n_0, todos los términos de la sucesión deben pertenecer, simultáneamente, a los entornos

$$(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon) \quad y \quad (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$$

lo cual es imposible en cuanto tomemos valores $\varepsilon \leq \dfrac{L_2 - L_1}{2}$.



Sucesiones oscilantes

Existen otras sucesiones que no tienen límite, pero tampoco tienden a infinito ni a menos infinito. Veamos algunos casos

Ejemplos : La sucesión cuyos primeros términos son los siguientes

$$1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 5,\ \frac{1}{6},\ 7,\ldots$$

Esta sucesión no es convergente, pero tampoco tiende a ∞ ni a $-\infty$. Los términos impares se hacen infinitamente grandes a medida que n crece. Sin embargo, los términos pares tienden a 0, para n suficientemente grande. Se dice que esta sucesión no tiene límite o bien que su carácter es oscilante.

Ejemplos : La sucesión de término general $a_n = (-1)^n \cdot n$, cuyos primeros términos son:

-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8,...

Los términos de esta sucesión tampoco se acercan a un número concreto. Tienden a ∞ los términos pares y tienden a $-\infty$ los términos impares. Por tanto, tampoco tiene límite.

Como conclusión, las sucesiones de los dos ejemplos anteriores se denominan **oscilantes**.

Resumen: Las sucesiones se clasifican según la existencia o no de límite en los siguientes tipos:

Convergentes	tienden a un número finito L
No convergentes	**Divergentes** $\begin{cases} \text{tienden a } \infty \\ \text{tienden a } -\infty \end{cases}$ **Oscilantes**

Propiedades de los límites: Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\lambda a_n\right) = \lambda a$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n b_n\right) = ab$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ $si\ b \neq 0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n\right)^{b_n} = a^b$ siempre que $a^b \neq 0^0$.

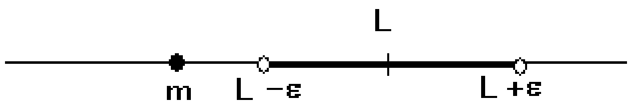
Indeterminaciones: $\infty - \infty$ $\quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0\infty \quad 1^{\infty} \quad 0^0 \quad \infty^0$

Teorema (Acotación): Toda sucesión (a_n) convergente es acotada.

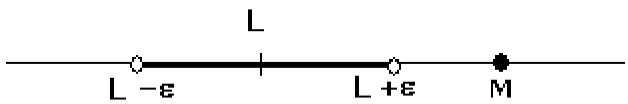
Demostración:

Para demostrar que una sucesión está acotada, tenemos que demostrar que está acotada superior e inferiormente.

Si la sucesión (a_n) es convergente, tomamos $\varepsilon = 1$, entonces todos los términos de la sucesión pertenecen, a partir de uno de ellos, al entorno (L-ε, L+ε); en consecuencia. Consideramos el valor más pequeño de los términos de la sucesión que no están en ese intervalo y de L-ε Si llamamos m a ese valor todos los términos de la sucesión serán mayores que m.



Consideramos M el valor más grande de los términos de la sucesión que no están en el intervalo (L-ε, L+ε) y el valor L-ε, es fácil ver que todos los términos de la sucesión son menores que M.



En conclusión, la sucesión (a_n) está acotada, ya que hemos encontrado una cota inferior (m) y una cota superior (M) de dicha sucesión.

Observación: El recíproco del teorema anterior no es cierto: la sucesión 1, 2, 1, 2, 1, 2,... es acotada y, sin embargo, no es convergente.

Teorema (Weierstrass): Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Toda sucesión monótona y no acotada es divergente.

Convergente $\Rightarrow$ Acotada	Convergente $\Leftarrow$ Acotada y Monótona
Divergente $\Rightarrow$ No acotada	Divergente $\Leftarrow$ No acotada y Monótona
(No son ciertos los recíprocos)	(No son ciertos los recíprocos)

Número e

El número **e** es un número irracional de gran importancia en matemáticas superiores. Podemos definirlo como el límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Puede probarse que esta sucesión es monótona y acotada por lo que aplicando el teorema de Weierstrass se concluye que es convergente. El valor al que converge es el número e.

Se trata de un número irracional cuyas diez primeras cifras decimales son: 2’7182818284…

CÁLCULO DE LÍMITES

Propiedades de los límites de sucesiones reales

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ con $a,b \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (2) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$ (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ $si\ b \neq 0$

(5) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = a^b$ siempre que $a^b \neq 0^0$.

Indeterminaciones

$\infty - \infty$ $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ 0∞ 1^∞ 0^0 ∞^0

Criterios de comparación

Teorema del encaje: Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes al mismo número real L entonces si se tiene otra sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ verificando $a_n \leq x_n \leq b_n$ para todo índice n salvo un número finito (es decir para todo n a partir de un cierto índice N) entonces la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a L.

Teorema: Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión divergente a infinito y para todo índice n salvo un número finito se verifica $a_n \leq b_n$ entonces $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es divergente a infinito.

Infinitésimos e infinitos equivalentes

Definición (Infinitésimo).- Se dice que a_n es un infinitésimo si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Definición (Infinito).- Se dice que a_n es un infinito si $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

PROPIEDADES DE LOS INFINITÉSIMOS

1) La suma de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo.

2) Se verifica $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3) Si (a_n) es un infinitésimo y (b_n) es una sucesión acotada superiormente en valor absoluto, entonces, la sucesión producto de ambas $(a_n \cdot b_n)$ es convergente y se cumple

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$$

Definición (Sucesiones del mismo orden y asintóticamente equivalentes).-

- Se dice que a_n y b_n infinitésimos (infinitos) son del mismo orden si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- En el caso particular de que k=1 se dicen asintóticamente equivalentes.

Notación.- Cuando a_n y b_n infinitésimos (infinitos) son del mismo orden se escribe $a_n = \mathrm{O}(b_n)$.

PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN.- El límite de una sucesión convergente o divergente no se altera al sustituir uno de sus factores o divisores por otro asintóticamente equivalente.

INFINITESIMOS EQUIVALENTES	INFINITOS EQUIVALENTES: Si $n \to \infty$
$a_n \to 1 \; entonces \; \log(a_n) \approx a_n - 1$	$n! \approx e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ (Fórmula de Stirling)
$a_n \to 0 \; entonces \; \log(1 + a_n) \approx a_n$	$a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_1 n + a_o \approx a_p n^p$
$a > 0 \; entonces \; \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \approx \dfrac{\log a}{n}$	$\log\left(a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_1 n + a_o\right) \approx \log\left(a_p n^p\right)$
$a_n \to 0 \; entonces \; sen a_n \approx a_n$	$1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k \approx \dfrac{n^{k+1}}{k+1}$
$a_n \to 0 \; entonces \; tg\, a_n \approx a_n$	
$a_n \to 0 \; entonces \; a_n \approx arcsen\, a_n \approx arctg\, a_n$	
$a_n \to 0 \; entonces \; 1 - \cos a_n \approx \dfrac{a_n^2}{2}$	

Definición (Infinitésimos e infinitos de orden superior).- Se dice que a_n es un infinitésimo de orden superior respecto de b_n ó que b_n es un infinito de orden superior respecto de a_n, según se trate de infinitésimos o infinitos, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Potencial-exponencial	Factorial	Exponencial	Potencial	Logaritmo
$n^{a \cdot n}$ (a>0)	n!	b^n (b>1)	n^c (c>0)	$(\log_q n)^p$ (q>1, p>0)

Tabla.- El orden de los infinitos disminuye de izquierda a derecha

CRITERIO DE STOLZ

Si

- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son infinitésimos siendo monótona
- ó $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente

En el caso de que exista el siguiente límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

Consecuencias:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (Criterio de la media aritmética)
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (Criterio de la media geométrica)

Límites de expresiones racionales

Si se trata de una sucesión cociente entre expresiones polinómicas, así

$$a_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \ldots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \ldots + b_q}$$

se resuelve dividiendo numerador y denominador por n^k, siendo k el grado del polinomio de menor grado. En resumen, se cumple que:

- Si p>q, $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (depende de los signos de a_0 y b_0)
- Si p=q, $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{a_0}{b_0}$
- Si p < q, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Esta regla dice que el valor del límite lo marca el término de mayor grado de ambos polinomios.

Límites de expresiones irracionales

Se resuelven multiplicando y dividiendo por la expresión radical "conjugada".

Límites de la forma ∞^0, 0^0, 1^∞

Para calcular este tipo de límites se puede tomar logaritmos, de tal forma que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n \log a_n}$$

Observación: En el caso particular de que la indeterminación sea del tipo 1^∞ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ luego,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n \log a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n (a_n - 1)}$$

SERIES EN $\mathbb{R}$

Prerrequisitos:

- Conceptos sobre sucesiones vistos en el tema anterior
- Cálculo de primitivas inmediatas

Objetivos:

1. Tener claros los siguientes conceptos:

- Serie y suma parcial enésima
- Convergencia, divergencia de una serie
- Orden de magnitud de la suma parcial enésima
- Suma aproximada de una serie

2. Saber hacer:

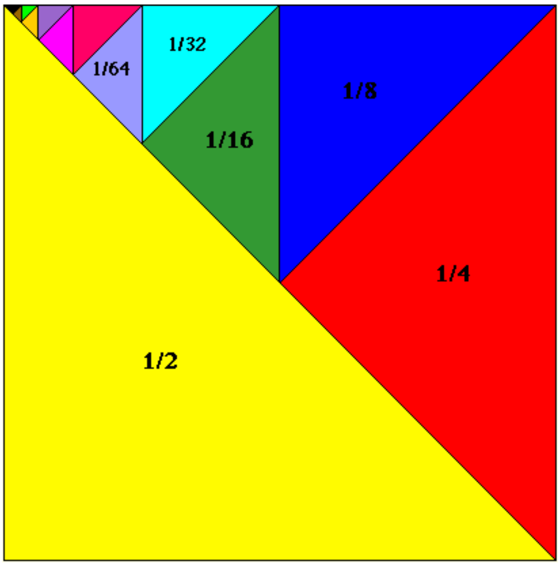
- Reconocer las series geométricas y determinar su carácter
- Reconocer las series armónica generalizada y determinar su carácter
- Estudiar la convergencia de series de términos positivos mediante los criterios del cociente y de la raiz
- Estudiar la convergencia de series alternadas con el criterio de Leibniz
- Estudiar la convergencia de series de términos cualesquiera mediante la convergencia absoluta
- Hallar la suma aproximada de una serie con una cota del error prefijada

Sumas infinitas

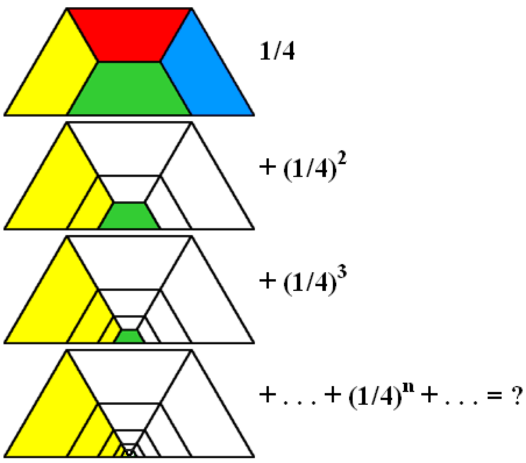
Ejemplo 1: Imagina un cuadrado de lado unidad y considera la suma de las áreas coloreadas

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....$$

¿A la vista de la figura cuál crees que es el valor de su suma?



Ejemplo 2: ¿Cuánto es el área de color amarillo?



También puedes pensar en el área de los triángulos naranjas del dibujo siguiente:

Ejemplo 3: Imagina el número $1/3$ se escribe en forma decimal periódico como $1/3 = 0,\widehat{3}$ donde se entiende que el 3 se repite infinitas veces. Es decir,

$$1/3 = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + ...$$

que abreviadamente podemos poner como:

$$1/3 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[3\cdot(0,1)^n\right]$$

pero, ¿qué significa exactamente la suma infinita? Está claro que no podemos sumar infinitos números. Esta expresión significa que si se suma más y más términos, la suma se va aproximando cada vez más a $1/3$.

Definiciones

Dada una sucesión infinita de números reales $\{a_n\}$ se define:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Su **suma parcial n-ésima** es:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Consideramos la sucesión de sus sumas parciales: $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tendrá:

- Si $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **convergente** entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Se dirá entonces que S es la suma de la serie.

- Si $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **divergente** entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

- Si $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **oscilante** entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es oscilante.

El **resto n-ésimo** de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$$

Es fácil ver que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$$

Propiedades de las series

Propiedad 1: Si a una serie se la suprime o añade un número finito de términos su carácter no se ve alterado.

Propiedad 2: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes y convergen respectivamente a los números reales A y B entonces:

- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$
- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = A \cdot B$ observar que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n) \neq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda A$

Propiedad 3 (Condición necesaria de convergencia): Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

IMPORTANTE.- Se trata de una condición necesaria pero no suficiente. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ cumple la condición necesaria de convergencia y, sin embargo, es divergente.

SERIES NOTABLES

- **Serie geométrica**: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \quad a \neq 0$. Se cumple:

  Si $|r| < 1$ la serie converge y además $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$. En general $\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = \frac{a\ r^k}{1-r}$.

  Si $r > 1$ la serie diverge.

- **Serie armónica generalizada**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\quad p > 0$. Se cumple:

  Si $0 < p \leq 1$ la serie diverge

  Si $p > 1$ la serie converge.

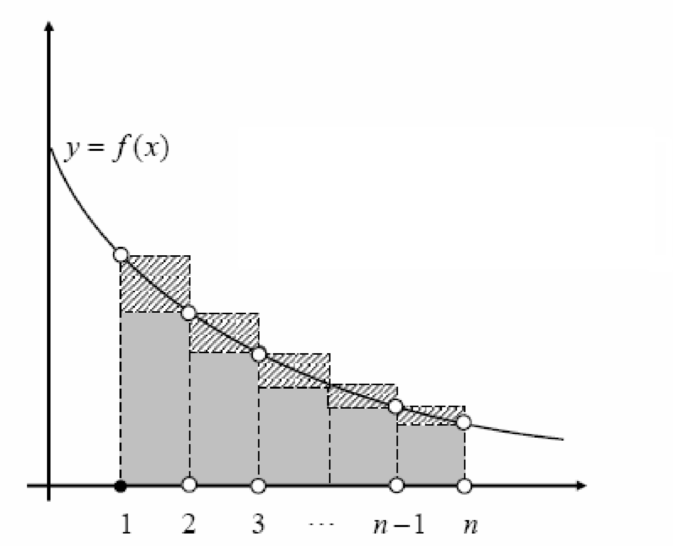
CONVERGENCIA DE SERIES DE TÉRMINOS NO NEGATIVOS

Una serie de términos no negativos o bien converge o bien diverge ya que la sucesión de sus sumas parciales es monótona.

$$s_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{no\ negativo} \geq S_n$$

Suma parcial n-ésima

- En general para una función continua f decreciente y positiva en $[1,\infty)$ se verifica



$$\int_1^n f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < f(1) + \int_1^n f(x)dx$$

Por lo tanto la sucesión $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ verifica que

$$\int_1^n f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$$

- Si la función es continua, creciente y positiva en $[1,\infty)$ se verifica

$$\int_1^n f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^n f(x)\,dx + f(n)$$

Criterio integral

Si f es positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$ y $a_n = f(n)$ entonces:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

tienen el mismo carácter.

Criterio de comparación

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series de términos positivos verificando

$a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ salvo un número finito

entonces:

(a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también es convergente

(b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también es divergente.

Criterios de comparación por paso al límite

Se consideran las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Entonces

(a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ ambas series tienen el mismo carácter

(b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(c) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Criterio del cociente: Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \text{ ó } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

entonces si

(a) Si $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

(b) Si $L > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

Criterio de la raíz: Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ entonces si

(c) Si $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

(d) Si $L > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

SUMA APROXIMADA: SERIES DE TERMINOS NO NEGATIVOS

Supongamos que tenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de la que conocemos que es convergente pero no sabemos obtener el valor exacto de la suma. Entonces si sustituimos el valor de la suma S por la suma parcial n-ésima S_n se nos plantean dos problemas:

(a) ¿Qué error cometo cuando utilizo la aproximación $S \approx S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$?

(b) ¿Cuántos términos tengo que considerar para que la diferencia entre S y S_n sea menor que un cierto valor, es decir,

$$\left|S - S_n\right| < valor$$

Ambas cuestiones quedan resueltas si consigo acotar el resto n-ésimo:

$$\left|R_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + ...\right| < \text{cota}$$

Encontrada una cota se tendrá resuelto el problema (a) si bien esta cota debe elegirse de forma adecuada. Para el segundo problema dado el error permitido bastará encontrar el índice n que verifica la siguiente relación:

$$\left|R_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + ...\right| < \text{cota} < \text{error}$$

Es importante hacer notar que la cota dependerá de n y además que debe elegirse con cuidado para que no sea una acotación excesiva que no nos dé ninguna información.

Estimación del error por el criterio integral

Supongamos que $f(n) = a_n$ para todo n natural, donde f es una función continua, decreciente y positiva en el intervalo $[1,\infty)$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx$ existe y es finito. Entonces el resto de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumple que:

$$0 \le R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n \le \lim_{k\to\infty}\int_n^k f(x)dx$$

SERIES ALTERNADAS

Son de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + ... \quad (a_n > 0)$$

TEOREMA DE LEIBNIZ: La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n \ (a_n > 0)$ converge si

(a) la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente

(b) se verifica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Estimación del error de sustituir la suma de la serie por la suma parcial enésima:

Supongamos que se tiene la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n \ (a_n > 0)$ convergente verificando

(a) la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces el resto n-ésimo es

$$R_n = S - S_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots)$$

como la sucesión es monótona decreciente el valor absoluto del resto n-ésimo es:

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3} + \ldots = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0}\ldots$$

es decir,

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Obsérvese que este error será:

- por exceso si el primer término despreciado es negativo
- por defecto si el primer término despreciado es positivo.

Series de términos cualesquiera

Una serie de términos cualesquiera, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, es **absolutamente convergente** si es convergente la serie de sus valores absolutos, es decir, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

TEOREMA: Si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente.

Si una serie es convergente pero no es absolutamente convergente se dice condicionalmente convergente.

Nota: Si detectas algún error o errata ponte en contacto con la profesora para su corrección.