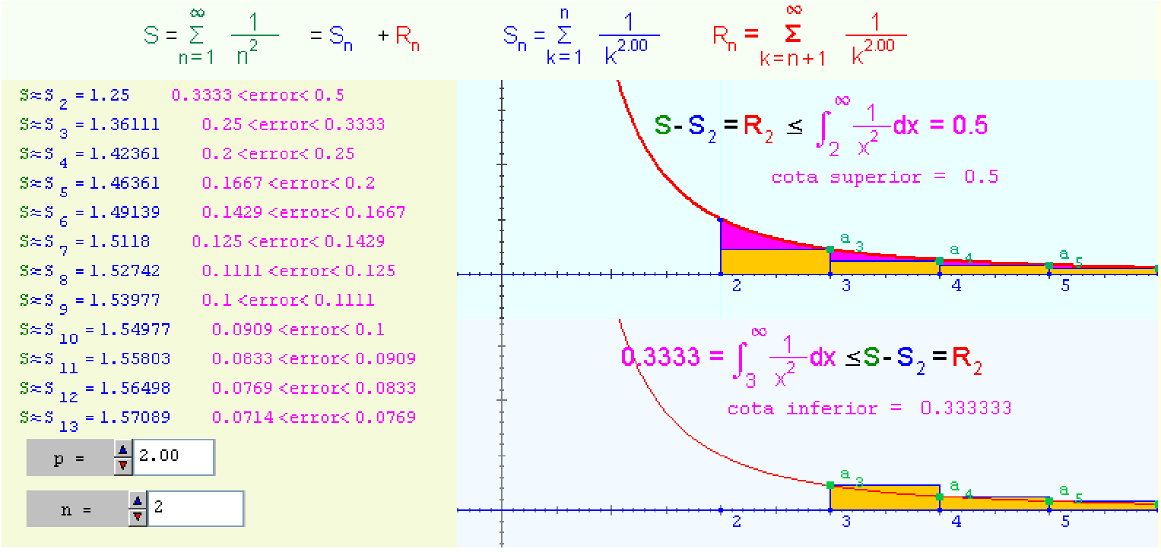
Laboratorio: Estimación resto enésimo



¿QUÉ ERROR SE COMETE AL SUSTITUIR EL VALOR DE LA SUMA DE UNA SERIE CONVERGENTE POR LA SUMA PARCIAL K-ÉSIMA?

Supongamos que tenemos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ que es convergente por el criterio integral y cumpliendo que la función $f(x)$ con $f(n)=a_n$ es continua, decreciente y positiva en $(1,\infty)$. Entonces el resto de orden k se puede acotar por los siguientes valores:

$$\boxed{\int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots \le \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx} \quad (1)$$

Nota: Se define $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^{M} f(x)\,dx$

Se tiene que:

$$\boxed{\text{cota inferior} \le S - S_k = R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \le \text{cota superior}} \quad \text{con} \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{cota inferior} = \int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx \\ \text{cota superior} = \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx \end{array}}$$

Consideramos la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. En este caso $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Si sustituimos el valor de la serie por la suma parcial k-sima el error que se comete es el valor de $R_k = a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots$

- Escribir para esta serie el valor de
  - Cota superior $\boxed{\int_k^{\infty} f(x)\,dx}$:
  - Cota inferior $\boxed{\int_{k+1}^{\infty} f(x)\,dx}$:

En el siguiente ejercicio contestaremos a las siguientes preguntas considerando la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

- ¿Qué error se comete al sustituir el valor de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por S_k ?
- ¿Cuántos términos tienes que considerar para que al sustituir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ por S_k el error sea menor que 10^{-2} ?

1 Rellena la siguiente tabla haciendo los cálculos y comprobando el resultado en Lemat

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$	Cota Inferior de R_k	Cota superior de R_k	Valor aproximado de la suma (valor de S_k)	Error = valor exacto – aproximado = $R_k = S - S_k = \frac{\pi^2}{6} - S_k$
Número de términos a sumar k=10				
Número de términos a sumar k=15				

2 Realiza los cálculos para rellenar la siguiente tabla en la que se han considerado series convergentes. La última columna, la del Error, se deberá rellenar únicamente para las dos primeras series en las que se conoce el valor exacto de la suma infinita.

Serie	Cota Inferior de S_k para k=10, 20, 100	Cota superior de S_k para k=10, 20, 100	Valor aproximado de la suma (valor de S_k)	Error = valor exacto – aproximado = $R_k = S - S_k$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$				
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ [1] Ver observación				
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+5}$				
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$				

[1] Observación: Para obtener el valor de la suma descompón a_n en fracciones simples. Calcula después la suma parcial enésima y luego su límite.

Laboratorio: Series alternadas

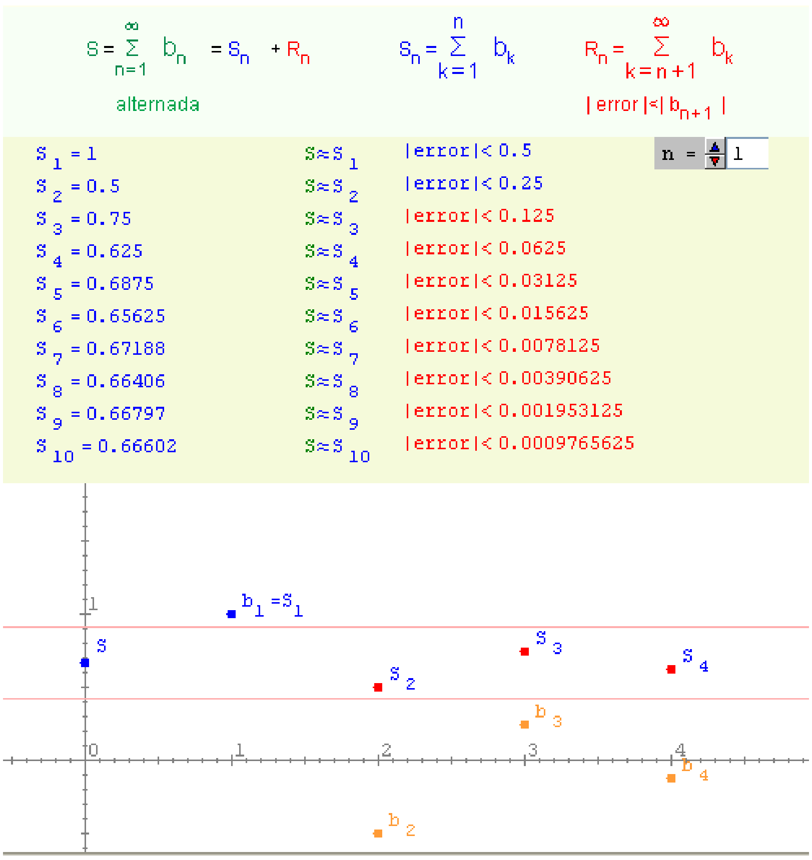
Las series alternadas son de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + \ldots. \qquad (a_n > 0)$$

TEOREMA DE LEIBNIZ: La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \ (a_n > 0)$ converge si

(a) la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente

(b) se verifica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.



Estimación del error de sustituir la suma de la serie por la suma parcial enésima:

Supongamos que se tiene la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \ (a_n > 0)$ convergente verificando

(c) la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente

(d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces el resto n-ésimo es

$$R_n = S - S_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} + \dots)$$

como la sucesión es monótona decreciente el valor absoluto del resto n-ésimo es:

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3} + \dots = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0}\dots$$

es decir,

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Obsérvese que este error será:

- por exceso si el primer término despreciado es negativo
- por defecto si el primer término despreciado es positivo.

3

Determinar el error que se comete al tomar como suma de la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (n^2+1)}{3^n}$ la suma de los tres primeros términos. ¿Entre qué valores se puede considerar que está el valor exacto de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (n^2+1)}{3^n}$?

En el botón Ejemplo 1 puedes ver cómo obtener el error.

Puedes visualizar los valores de la suma parcial enésima pulsando en el botón Laboratorio e introducir como término de la sucesión: ((-1)^n)*(n^2+1)/(3^(n))