Estructuras de datos y algoritmos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

1. Introducción
2. Estructuras de datos lineales
3. Estructuras de datos jerárquicas
4. *Grafos y caminos*
5. Implementación de listas, colas, y pilas
6. Implementación de mapas, árboles, y grafos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

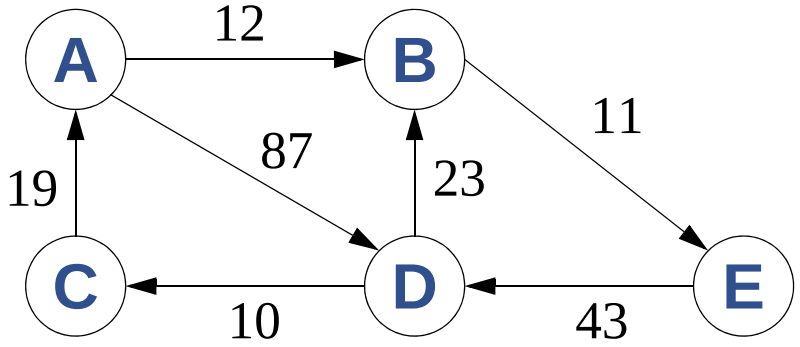
4. Grafos y Caminos

- 4.1. Concepto de grafo
- 4.2. Definiciones
- 4.3. La interfaz de las aristas
- 4.4. La interfaz de los grafos
- 4.5. Cálculo de caminos mínimos sin pesos
- 4.6. Cálculo de caminos mínimos con pesos positivos
- 4.7. Cálculo de caminos mínimos con pesos negativos
- 4.8. Cálculo de caminos en grafos acíclicos

4.1 Grafos

Un *grafo* es una estructura de datos que almacena datos de dos tipos:

- ***vértices*** **o nudos, con un valor almacenado**
- ***aristas*** **o arcos: cada una conecta a un vértice con otro, y puede tener un valor almacenado**
  - **una arista es un par de vértices (*v,w*)**
  - **si el par está ordenado, se dice que el grafo es *dirigido* o que es un *digrafo***



Notas:

Los **grafos**, constituyen estructuras de datos en las que se pueden expresar relaciones de conexión entre diversos elementos denominados vértices. Cada conexión se representa por un dato llamado arista

Los grafos tienen gran cantidad de aplicaciones; por ejemplo:

- Representación de circuitos electrónicos analógicos y digitales
- Representación de caminos o rutas de transporte entre localidades
- Representación de redes de computadores.

Uno de los problemas más importantes en los grafos es el de encontrar el camino de coste mínimo.

4.2. Definiciones

- ***Adyacente***: se dice que *w* es adyacente a *v* si existe la arista (*v*,*w*)
  - en un grafo dirigido, no es lo mismo que *v* sea adyacente a *w* que al revés
- ***Camino***: secuencia de vértices tales que cada uno es adyacente al anterior
- ***Peso*** o ***coste***: las aristas pueden contener datos y uno de ellos puede ser el coste o peso asociado a esa arista.
  - se usa para determinar el coste de recorrer el camino
- ***Longitud del camino***: nº de aristas que tiene
- ***Coste de un camino***: la suma de los pesos de sus aristas
- ***Camino simple***: es aquel en que todos los vértices son distintos, excepto quizás el primero y el último

Definiciones (cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

- *Ciclo*: es un camino de longitud al menos 1 que empieza y acaba en el mismo vértice
- *Grafo dirigido acíclico*: es un grafo dirigido sin ciclos
- *Grafo denso*: es aquel que tiene un gran número de aristas
  - cercano al número de vértices, *V*, al cuadrado
- *Grafo disperso*: es aquel en que el número de aristas *E* es pequeño $E<<V^2$
  - es el tipo de grafo más habitual
  - intentaremos optimizar las operaciones del grafo para este caso

4.3. La interfaz de las aristas

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Los vértices del grafo se suelen numerar para trabajar con ellos más cómodamente

- disponen de un identificador entero

Las aristas son objetos que contienen

- el identificador del vértice origen
  - en ocasiones este dato no se almacena, pues se averigua a partir del grafo
- el identificador del vértice destino
- un contenido
  - el peso, en el caso de los grafos con pesos
  - opcionalmente, más datos

4.3. La interfaz de las aristas

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Operaciones

operación	argumentos	retorna	errores
constructor	idOrigen, idDestino, peso, ...	Arista	
idOrigen		entero	
idDestino		entero	
contenido		Contenido	

La clase Arista

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
package adts;

public class Arista<A>
{
    public Arista (int origen, int destino,
            A contenido) {...}

    public int destino() {...}

    public int origen() {...}

    public A contenido() {...}

}
```

4.4. La interfaz abstracta de los grafos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Operaciones del grafo:

operación	argumentos	retorna	errores
constructor		Grafo	
nuevaArista	elemOrigen, elemDestino, contArista		
idVertice	elemento	entero	NoExiste
contenido	entero	Elemento	IdIncorrecto
listaAristas	entero	List<Arista>	IdIncorrecto
numVertices		entero	
numAristas		entero	

El elemento que se guarda en los vértices debe implementar

- `hashCode()` e `equals()`

Notas:

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

- *constructor*: Crea el grafo vacío
- *nuevaArista*: Inserta una nueva arista con peso a partir de las descripciones de sus vértices. Si los vértices son nuevos, los añade al grafo
- *idVertice*: Retorna el identificador del vértice indicado. Lanza **`NoExiste`** si el vértice no pertenece al grafo
- *contenido*: Retorna el contenido del vértice cuyo identificador se indica. Lanza **`IdIncorrecto`** si ese identificador no pertenece al grafo
- *listaAristas*: Retorna la lista de aristas del vértice de identificador **`idVertice`**. Lanza **`IdIncorrecto`** si ese identificador no pertenece al grafo
- *numVertices*: Retorna el número de vértices
- *numAristas*: Retorna el número de aristas

La interfaz Java de los grafos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
package adts;
import java.util.*;
public interface Grafo<V,A>
{
    Arista nuevaArista (V vertice1, V vertice2,
                        A contenidoArista);
    int idVertice(V vertice)
        throws NoExiste;
    V contenido(int idVertice)
        throws IdIncorrecto;
    List<Arista<A>> listaAristas(int idVertice)
        throws IdIncorrecto;
    int numVertices();
    int numAristas();
}
```

Ejemplo con grafos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

1. Escribir un método para recorrer todos los arcos de un grafo y mostrarlos en la pantalla

2. Escribir un método al que se le pase un camino, como una lista de valores de vértices, y nos calcule su coste o peso total

4.5. Cálculo de caminos mínimos sin pesos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

El problema del cálculo del camino mínimo se define como

- **Encontrar el camino de menor coste desde un vértice dado Origen (*O*) hasta cualquier otro vértice del grafo**
- **Cuando no hay pesos, el coste es la longitud del camino**

Tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo:

- **ruta más rápida para un trasporte**
- **camino más corto para un e-mail en una red de computadores**

Resolución del problema

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Resolveremos el problema calculando los caminos mínimos a otros vértices

- el camino desde *O* a sí mismo es de longitud 0
- *procesar O*: buscamos los vértices cuyo camino mínimo desde *O* es de longitud 1
  - son los vértices adyacentes a *O*
- *procesar vértices adyacentes a O*: buscamos los vértices cuyo camino mínimo desde *O* es de longitud 2
  - son los vértices aún no visitados que son adyacentes a los vértices del paso anterior
- en el paso *i*, buscamos los vértices cuyo camino mínimo desde *O* es de longitud *i*
  - vértices aún no visitados adyacentes a los del paso anterior

Resolución del problema

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

En este algoritmo se garantiza que la primera vez que se visita un vértice se ha hecho por el camino mínimo

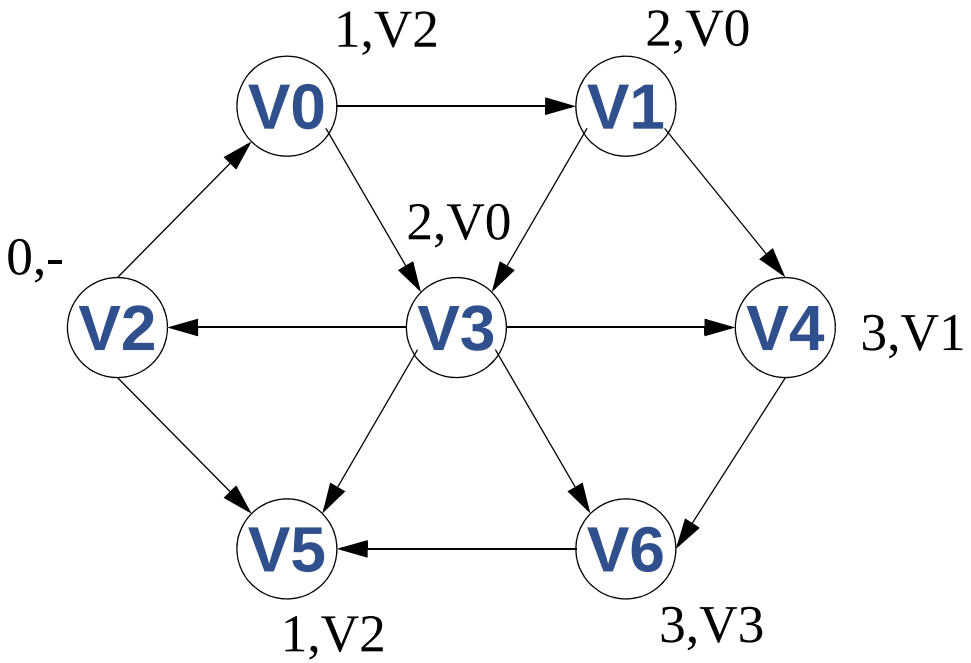
Organización de los datos

- **Necesitamos guardar en cada vértice el hecho de que lo hemos *visitado* o no**
- **Para *recordar el camino*, podemos anotar en cada vértice cuál es el vértice desde el que procede el camino**
- **Necesitamos almacenar el conjunto de vértices a *procesar***
  - **podemos usar una cola**

Como cada arista se recorre como máximo una vez, el coste de este algoritmo en el peor caso es O(E), siendo E el número de aristas

Ejemplo

En el grafo siguiente se han anotado los sucesivos valores de longitud del camino y vértice anterior, suponiendo el origen= *V2*



Pseudocódigo del camino mínimo

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
método caminoMinimoSinPesos (Grafo g,
     idVertice origen, destino)
retorna Camino

   // inicializaciones
   Cola<idVertice> procesar:= nueva Cola vacía;
   idVertice anterior[]:= nuevo array[numVertices]
   boolean visitado[]:= nuevo array[numVertices]=
        false para todas sus casillas

   procesar.inserta(origen)
   visitado[origen]:=true
   anterior[origen]:=-1 // para indicar que no tiene
```

Pseudocódigo del camino mínimo (cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
mientras procesar no esta vacío hacer
  idVertice v:=procesar.extraer()
  Lista adj:=g.listaAristas(v)
  para cada arista a de adj hacer
    idVertice dest:=a.destino;
    si no visitado[dest] entonces
      anterior[dest]:=v
      si dest==destino entonces
        retorna caminoDe(origen,destino,anterior);
      fsi
      visitado[dest]:=true;
      procesar.inserta(dest);
    fsi
  fpara
fmientras
```

Pseudocódigo del camino mínimo (cont.)

```
    indicar error (el destino no ha sido hallado)
fmétodo

método caminoDe(idVertice origen, destino,
                idVertice[] anterior)
retorna Camino
    Camino cam:= nuevo camino vacío
    idVertice v:=destino
    mientras anterior[v]!=-1 hacer
        cam.inserta(v)
        v:=anterior[v];
    fmientras
    cam.inserta(origen);
    retorna cam;
fmétodo
```

La clase CaminoSinPesos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Operaciones del camino:

operación	argumentos	retorna	errores
constructor	Grafo	Camino	
inserta	idVertice		
vertice	entero	idVertice	NoExiste
longitud		entero	
muestra			

- ***constructor***: retorna un camino vacío
- **`inserta`**: inserta los vértices del camino empezando por el final
- **`vertice`**: retorna el vértice *i*-ésimo
- **`longitud`**: retorna la longitud del camino

Implementación en Java

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
import adts.*;
import java.util.*;
/**
 *  Clase que contiene algoritmos para la resolución
 *  del problema de caminos mínimos en grafos
 */
public class Caminos
{
  public static <V,A> CaminoSinPesos
    caminoMinimoSinPesos
       (Grafo<V,A> g, int origen, int destino)
         throws NoExiste,IdIncorrecto
  {
```

Implementación en Java (cont.)

```
// inicializaciones
LinkedList<Integer> procesar=
    new LinkedList<Integer>();
int[] anterior= new int[g.numVertices()];
boolean[] visitado=
    new boolean[g.numVertices()];
// todas las casillas valen vale false por omisión
// en Java

procesar.addLast(new Integer(origen));
visitado[origen]=true;
anterior[origen]=-1; // para indicar que no tiene
```

Implementación en Java (cont.)

```
while (!procesar.isEmpty()) {
    int v=procesar.removeFirst().intValue();
    List<Arista<A>> adj=g.listaAristas(v);
    for (Arista<A> a:adj) {
      int dest=a.destino();
      if (!visitado[dest]) {
        anterior[dest]=v;
        if (dest==destino) {
          // hemos encontrado el camino mínimo
          return caminoDe
            (origen,destino,anterior,g);
         }
         visitado[dest]=true;
         procesar.addLast(dest);
      } // if
```

Implementación en Java (cont.)

```
            } // for
        } // while
        // el destino no ha sido hallado)
        throw new adts.NoExiste();
    } // método
```

Implementación en Java (cont.)

```
   private static CaminoSinPesos caminoDe
     (int origen, int destino, int[] anterior, Grafo g)
   {
     CaminoSinPesos cam= new CaminoSinPesos(g);
     int v=destino;
     while (anterior[v]!=-1) {
        cam.inserta(v);
        v=anterior[v];
     }
     cam.inserta(origen);
     return cam;
   } // método
} // clase
```

4.6. Cálculo de caminos mínimos con pesos positivos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

En este caso tendremos en cuenta el coste de recorrer cada arista

- **el camino mínimo ya no es necesariamente el de menor longitud**
- **al ser los pesos positivos, no es posible rebajar el coste recorriendo aristas adicionales a las ya recorridas en el camino**

Resolveremos el problema con el algoritmo de *Dijkstra*

Es como en el caso anterior

- **recorremos los vértices adyacentes, en el orden de camino mínimo**
- **pero cuando hemos visitado un vértice, si encontramos un camino de menor coste hay que anotar el nuevo camino**

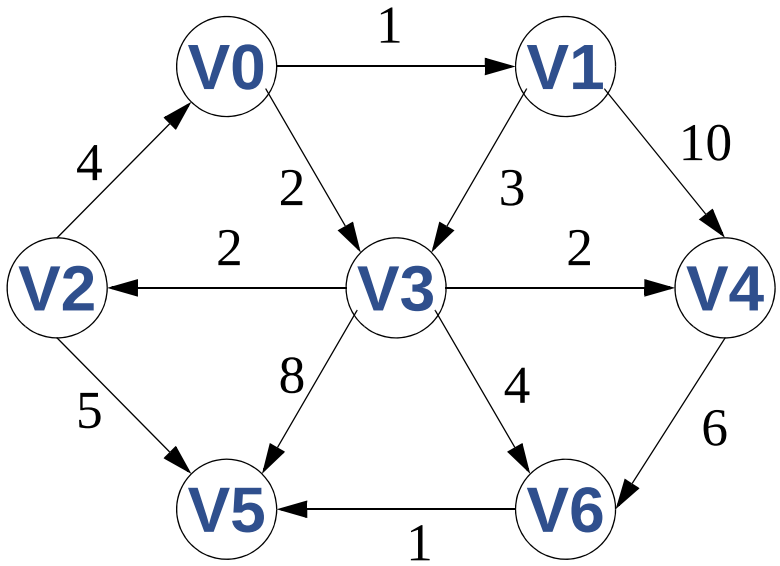
Cálculo de caminos mínimos con pesos positivos (cont.)

En este algoritmo ya no se garantiza que la primera vez que se visita un vértice se ha hecho por el camino mínimo

- **debemos procesar todos los vértices antes de dar la solución**

Por ejemplo, el camino {*V2,V0,V1,V4*} tiene un peso de 15

- **pero el camino {*V2,V0,V3,V4*}, que se encuentra posteriormente, tiene un peso de 8**



Organización de los datos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

- Necesitamos guardar en cada vértice el peso del camino mínimo encontrado hasta el momento (*D*; infinito si no se ha visitado)
- Igual que antes, para recordar el camino, podemos anotar en cada vértice cuál es el vértice desde el que procede el camino
- Necesitamos saber para cada vértice si ha sido procesado o no
- Necesitamos almacenar el conjunto de vértices a procesar
  - deben procesarse en orden de peso del camino mínimo encontrado hasta el momento (*D*), comenzando por el menor
  - una cola de prioridad, donde la prioridad es *D*, es eficiente
  - podemos usar una cola de prioridad con posibilidad de modificar la prioridad de un elemento
  - o podemos volver a insertar el elemento, con el nuevo coste, y descartar los elementos ya procesados

Eficiencia

El tamaño de la cola de prioridad puede ser como máximo E (el número de aristas)

Como mucho hay E inserciones y eliminaciones

Las operaciones en la cola de prioridad son O(log n)

La eficiencia total es O(E log E),

Teniendo en cuenta que $E <= V^2$ el coste es a O(E 2log V) = O(E log V), siendo V el número de vértices

Implementación del camino mínimo con pesos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Objeto almacenado en la cola de prioridad

```
clase SubCamino
   atributos
      IdVertice dest;
      real peso;
   fatributos

   método constructor (IdVertice dest, real peso)
      this.dest=dest; this.peso=peso;
   fmétodo
   método compareTo(Subcamino otro) retorna entero
      retorna this.peso.compareTo(otro.peso)
   fmétodo
fclase
```

Pseudocódigo del camino mínimo con pesos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
método caminoMinimoConPesos (Grafo g,
    idVertice origen, destino)
retorna Camino
  // inicializaciones
  ColaPrioridad<SubCamino> procesar:=
      nueva ColaPrioridad vacía;
  idVertice anterior[]:= nuevo array[numVertices]
  real peso[]:= nuevo array[numVertices]=
       infinito para todas sus casillas
  boolean procesado[]:= nuevo array[numVertices]=
       false para todas sus casillas
  procesar.inserta(origen)
  peso[origen]:=0; // para no hacer ciclos
  anterior[origen]:=-1 // para indicar que no tiene
```

Pseudocódigo del camino mínimo con pesos (cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
mientras procesar no esta vacio hacer
  idVertice v:=procesar.extraer()
  si no procesado[v] entonces
    procesado[v]:=true;
    Lista adj:=g.listaAristas(v)
    para cada arista a de adj hacer
      idVertice dest:=a.destino;
      real p:=a.peso;
      si peso[dest]>peso[v]+p entonces
        anterior[dest]:=v
        peso[dest]:=peso[v]+p;
        procesar.inserta
          (nuevo Subcamino(dest,peso[dest]);
      fsi
    fpara
```

Pseudocódigo del camino mínimo (cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
    fsi
  fmientras
  si peso[destino]==infinito entonces
     indicar error (el destino no ha sido hallado)
  si no
     retorna caminoDe(origen,destino,anterior,peso)
  fsi
fmétodo

// CaminoDe es parecido al anterior,
// pero anota también el peso del camino
```

Implementación en Java

```
/**
 * Algoritmo del calculo del camino mínimo con pesos
 */
public static <V> CaminoConPesos caminoMinimoConPesos
    (Grafo<V,Double> g, int origen, int destino)
     throws NoExiste, IdIncorrecto
{
  // inicializaciones
  PriorityQueue<SubCamino> procesar=
      new PriorityQueue<SubCamino>();
  int[] anterior= new int[g.numVertices()];
  double[] peso= new double[g.numVertices()];
  boolean[] procesado= new boolean[g.numVertices()];
  // valor por omisión false para todas sus casillas
```

Implementación en Java (cont.)

```
// dar valor infinito a todas las casillas de peso
for (int i=0; i<peso.length; i++) {
   peso[i]=Double.POSITIVE_INFINITY;
}

procesar.add(new SubCamino(origen,0.0));
peso[origen]=0.0; // para no hacer ciclos
anterior[origen]=-1; // para indicar que no tiene

// bucle para procesar vértices
while (! procesar.isEmpty()) {
  int v=procesar.remove().dest;
  if (! procesado[v]) {
    procesado[v]=true;
```

Implementación en Java (cont.)

```
        List<Arista<Double>> adj=g.listaAristas(v);
        for (Arista<Double> a: adj) {
          int dest=a.destino();
          double p=a.contenido().doubleValue();
          if (peso[dest]>peso[v]+p) {
            anterior[dest]=v;
            peso[dest]=peso[v]+p;
            procesar.add
               (new SubCamino(dest,peso[dest]));
          }
        } // for
      } // if
    } // while
```

Implementación en Java (cont.)

```
    if (Double.isInfinite(peso[destino])) {
      throw new NoExiste();
    } else {
      return caminoDe
          (origen,destino,anterior,peso[destino],g);
    }
}
```

Implementación en Java (cont.)

```
/**
 * Método para formar el camino con pesos
 */
private static CaminoConPesos caminoDe(int origen,
    int destino, int[] anterior, double peso, Grafo g)
{
  CaminoConPesos cam= new CaminoConPesos(g,peso);
  int v=destino;
  while (anterior[v]!=-1) {
    cam.inserta(v);
    v=anterior[v];
  }
  cam.inserta(origen);
  return cam;
}
```

4.7. Cálculo de caminos mínimos con pesos negativos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Cuando las aristas tienen pesos negativos el algoritmo de *Dijkstra* no funciona correctamente

- una vez que un vértice ***v*** ha sido procesado puede existir un camino de vuelta desde otro vértice ***u*** con coste negativo
- en ese caso el nuevo camino puede ser de coste menor
- tendríamos que procesar ***v*** de nuevo, porque los vértices afectados desde ***v*** también variarían

Además, pueden aparecer ciclos de coste negativo

- en ese caso el camino más corto está indefinido
- el problema no tiene solución
- el algoritmo debe detectar este caso

Solución al problema

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Usaremos una solución similar a las anteriores

- será bastante menos eficiente
- podemos usar una cola simple, en lugar de una cola de prioridad

Cuando se modifica el camino mínimo de un vértice, deberá procesarse de nuevo

Para detectar ciclos negativos, anotaremos el número de veces que hemos visitado cada vértice

- si se visita más de V (número de vértices) veces, esto indica que hay un ciclo negativo

La eficiencia será $O(E\,V)$, porque hay que recorrer cada arista un máximo de V veces

Organización de los datos

- Necesitamos guardar en cada vértice el *peso* del camino mínimo encontrado hasta el momento (*D*; infinito si no se ha visitado)
- Para recordar el camino anotaremos en cada vértice cuál es el vértice *anterior* en el camino
- Necesitamos saber para cada vértice cuántas veces ha sido *visitado*
- Necesitamos almacenar el conjunto de vértices a *procesar*
  - podemos usar una cola sencilla
- Por eficiencia, podemos anotar si un vértice *está en la cola* o no
  - así, si ya está en la cola no lo volveremos a añadir cuando modificamos su camino mínimo

Pseudocódigo del camino mínimo con pesos negativos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
método caminoMinimoConPesosNegativos (Grafo g,
    idVertice origen, destino)
retorna Camino
  // inicializaciones
  Cola<IdVertice> procesar:= nueva Cola vacía;
  idVertice anterior[]:= nuevo array[numVertices];
  real peso[]:= nuevo array[numVertices]=
       infinito para todas sus casillas
  entero visitado[]:= nuevo array[numVertices]=
       0 para todas sus casillas
  boolean estaEnLaCola[]:= nuevo array[numVertices]=
       false para todas sus casillas
  procesar.inserta(origen)
  peso[origen]:=0; // para no hacer ciclos
  anterior[origen]:=-1 // para indicar que no tiene
```

Pseudocódigo del camino mínimo con pesos negativos (cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
mientras procesar no esta vacio hacer
  idVertice v:=procesar.extraer()
  estaEnLaCola[v]:=false;
  Lista adj:=g.listaAristas(v)
  para cada arista a de adj hacer
    idVertice dest:=a.destino;
    real p:=a.peso;
    si peso[dest]>peso[v]+p entonces
      visitado[dest]++;
      si (visitado[dest]>g.numVertices()) entonces
         lanza CicloNegativo
      fsi
      anterior[dest]:=v
      peso[dest]:=peso[v]+p;
```

Pseudocódigo del camino mínimo con pesos negativos (cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
            si no estaEnLaCola(dest) entonces
               estaEnLaCola[dest]:=true;
               procesar.inserta(dest);
            fsi
         fsi
      fpara
   fmientras
   si peso[destino]==infinito entonces
      indicar error (el destino no ha sido hallado)
   si no
      retorna caminoDe(origen,destino,anterior,peso)
   fsi
fmétodo

// CaminoDe es igual al anterior
```

Implementación en Java

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
/**
 * Algoritmo del camino mínimo con pesos negativos
 */
public static <V> CaminoConPesos
    caminoMinimoConPesosNegativos
       (Grafo<V,Double> g, int origen, int destino)
       throws NoExiste, IdIncorrecto, CicloNegativo
{
  // inicializaciones
  LinkedList<Integer> procesar=
     new LinkedList<Integer>();
  int numVertices=g.numVertices();
  int[] anterior= new int[numVertices];
  double[] peso= new double[numVertices];
```

Implementación en Java (cont.)

```
int[] visitado= new int[numVertices];
// valor por omisión es 0 para todas sus casillas
boolean[] estaEnLaCola= new boolean[numVertices];
// valor por omisión false para todas sus casillas

// dar valor infinito a todas las casillas de peso
for (int i=0; i<peso.length; i++) {
  peso[i]=Double.POSITIVE_INFINITY;
}
procesar.addLast(new Integer(origen));
peso[origen]=0.0; // para no hacer ciclos
anterior[origen]=-1; // para indicar que no tiene
visitado[origen]++;
```

Implementación en Java (cont.)

```
// bucle para procesar vértices
while (! procesar.isEmpty()) {
  int v=procesar.removeFirst().intValue();
  estaEnLaCola[v]=false;
  List<Arista<Double>> adj=g.listaAristas(v);
  for (Arista<Double> a: adj) {
    int dest=a.destino();
    double p=a.contenido().doubleValue();
    if (peso[dest]>peso[v]+p) {
      visitado[dest]++;
      if (visitado[dest]>numVertices) {
        throw new CicloNegativo();
      }
      anterior[dest]=v;
      peso[dest]=peso[v]+p;
```

Implementación en Java (cont.)

```
            if (!estaEnLaCola[dest]) {
              estaEnLaCola[dest]=true;
              procesar.addLast(new Integer(dest));
            }
          }
        } // for
      } // while
      if (Double.isInfinite(peso[destino])) {
         throw new NoExiste();
      } else {
         return caminoDe
            (origen,destino,anterior,peso[destino],g);
      }
   }
```

4.8. Cálculo de caminos en grafos acíclicos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Los grafos acíclicos son aquellos que no contienen ciclos

- **En este caso el problema del camino mínimo es más sencillo**
  - **incluso con pesos negativos**
- **Si seguimos el orden apropiado, una vez que visitamos un vértice para asignarle un camino mínimo, ya no hace falta visitarlo más**
  - **el orden apropiado para este caso es el orden topológico**

El orden topológico

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

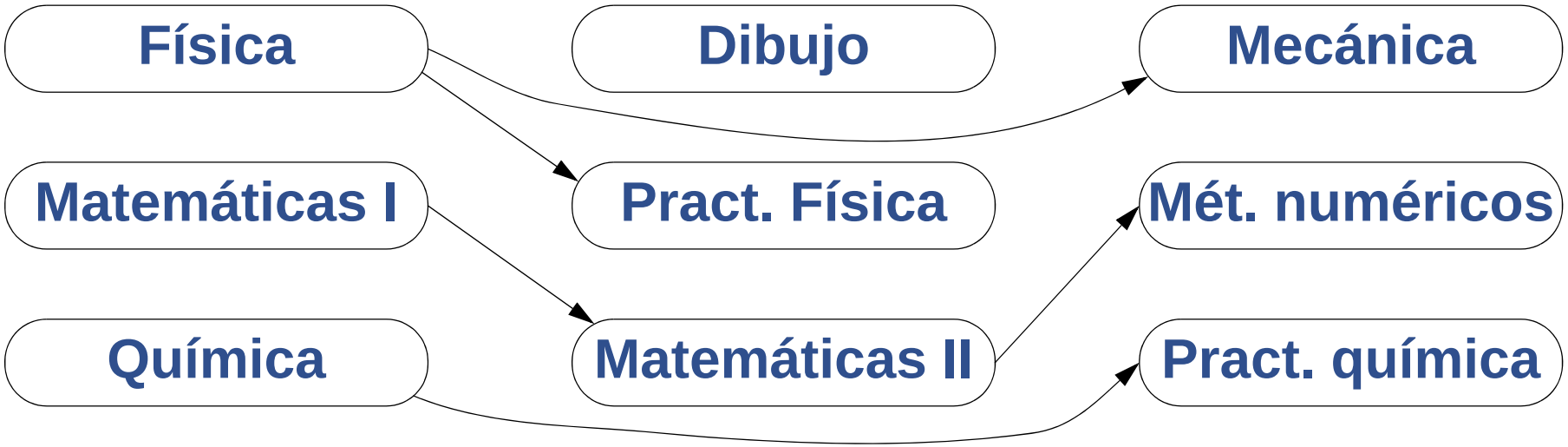
Un *orden topológico* ordena los vértices del grafo de modo que si hay un camino entre dos vértices *u* y *v*, entonces *v* aparece después de *u* en la ordenación

- **no puede haber un orden topológico si el grafo tiene ciclos**
  - **entre dos vértices *u* y *v* que pertenecen a un ciclo, siempre hay un camino de *u* a *v* y de *v* a *u***
  - **ello hace imposible la ordenación topológica**

Ejemplo de orden topológico

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

El siguiente grafo muestra la estructura de asignaturas "llave" en un plan de estudios



Para matricularse hay que seguir un orden topológico

- **por ejemplo: Física, Matemáticas I, Dibujo, Prácticas de Física, Química, Mecánica, Métodos Numéricos, Prácticas de química**

Estrategia para hallar un orden topológico

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Repetir estos pasos:

- **Elegir un vértice que no tenga aristas de entrada y listarlo**
- **Borrar (imaginariamente) ese vértice y todas sus aristas del grafo**

Este algoritmo funciona pues si no hay vértices sin aristas de entrada es porque hay ciclos

Implementación del orden topológico

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Para implementar este algoritmo definimos el *grado de entrada* de un vértice como el número de aristas de entrada que tiene

- **Calcularemos el grado de entrada de cada vértice**
- **Cuando "borramos" una arista, lo que hacemos en realidad es restar una unidad al grado de entrada de los vértices destino**

Implementación del orden topológico cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Organización de los datos

- Metemos en una cola todos los vértices no procesados de grado de entrada cero
- Sacamos los vértices de la cola uno por uno, los listamos, y "borramos sus aristas"
- Cuando se reduce a cero el grado de entrada de un vértice lo metemos en la cola
- Si la cola se queda vacía sin haber procesado todos los vértices es que hay un ciclo

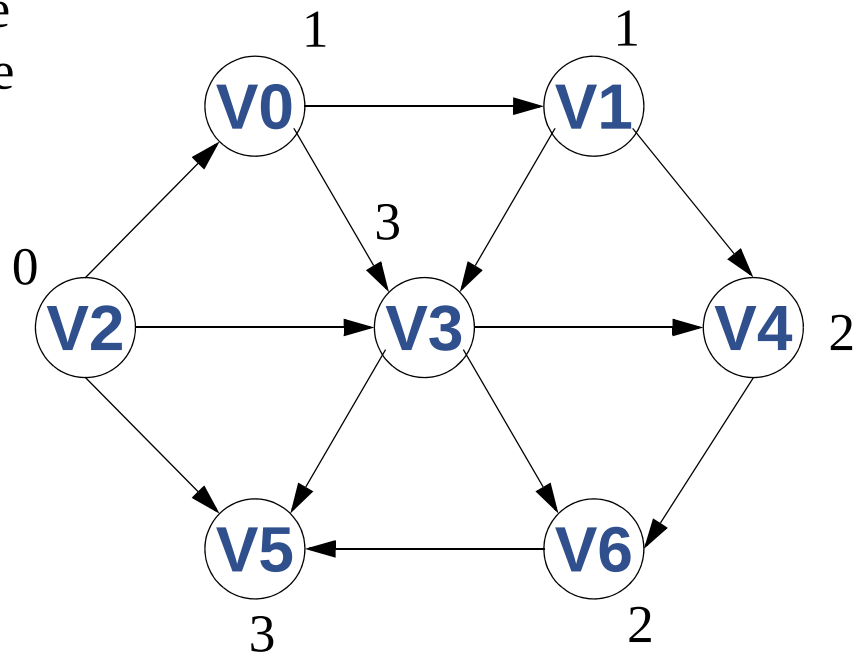
Eficiencia

- El tiempo depende del número de aristas, pues como máximo recorremos cada una sólo una vez

Ejemplo

Aplicar el algoritmo anterior para calcular un orden topológico en este ejemplo

Se muestra el grado de entrada de cada vértice



Pseudocódigo del orden topológico

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
método calculaGradoEntrada(Grafo g)
retorna entero[]
   entero[] grado:= nuevo array[g.numVertices()]:=
     0 para todas sus casillas
   para v desde 0 hasta g.numVertices()-1 hacer
      Lista<Arista> ady:=g.listaAristas(v);
      para cada Arista a de ady hacer
         grado[a.destino()]++;
      fpara
   fpara
   retorna grado;
fmétodo
```

Pseudocódigo del orden topológico (cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
método ordenTopologico(Grafo g) lanza HayCiclos
   entero[] grado:= calculaGradoEntrada(g);
   Cola<IdVertice> procesar := nueva Cola vacía
   entero procesados:=0;
   // insertar en la cola vértices de grado cero
   para v desde 0 hasta g.numVertices()-1 hacer
      si grado[v]==0 entonces
         procesar.inserta(v);
      fsi
   fpara
   // bucle principal
   mientras procesar no esta vacío hacer
      procesados++;
      IdVertice v=procesar.extraer();
      listar v;
```

Pseudocódigo del orden topológico (cont.)

```
        // procesar las aristas de v
        Lista<Arista> ady:=g.listaAristas(v);
        para cada Arista a de ady hacer
            idvertice dest=a.destino;
            grado[dest]--;
            si grado[dest]==0 entonces
                procesar.inserta(dest);
            fsi
        fpara
    fmientras
    si procesados!=g.numVertices() entonces
        lanza HayCiclos
    fsi
fmétodo
```

Aplicación del orden topológico al cálculo de caminos mínimos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Aplicaremos un algoritmo similar al de *Dijkstra*, pero procesando los vértices en un orden topológico

- **cuando procesamos un vértice sabemos que su peso de camino mínimo no va a cambiar**
  - **por el orden topológico, no hay aristas que lleguen al vértice desde otros vértices no procesados**
- **los vértices procesados antes de llegar al origen son inalcanzables desde éste**
  - **por ello, no influyen en la distancia**

Organización de los datos

- Necesitamos guardar en cada vértice el peso del camino mínimo encontrado hasta el momento (*D*; infinito si no se ha visitado)
- Para recordar el camino, podemos anotar en cada vértice cuál es el vértice desde el que procede el camino
- No necesitamos almacenar el conjunto de vértices a procesar
  - bastará seguir el orden topológico

Eficiencia

- La de calcular el orden topológico + recorrer todas las aristas= O(E)
- Igual a la del cálculo de caminos mínimos sin pesos

Pseudocódigo del camino mínimo en grafos acíclicos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
método caminoMinimoAciclico (Grafo g,
    idVertice origen, destino)
lanza HayCiclos, NoExiste, IdIncorrecto
retorna Camino
  // inicializaciones
  idVertice anterior[]:= nuevo array[numVertices]
  real peso[]:= nuevo array[numVertices]=
       infinito para todas sus casillas
  peso[origen]:=0; // para no hacer ciclos
  anterior[origen]:=-1 // para indicar que no tiene

  entero[] grado:= calculaGradoEntrada(g);
  Cola<IdVertice> procesar := nueva Cola vacía
  entero procesados:=0;
```

Pseudocódigo del camino mínimo en grafos acíclicos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
// insertar en la cola los vértices de grado cero
para v desde 0 hasta g.numVertices()-1 hacer
    si grado[v]==0 entonces
       procesar.inserta(v);
    fsi
fpara
// bucle principal
mientras procesar no esta vacío hacer
    procesados++;
    IdVertice v=procesar.extraer();
    // procesar las aristas de v
    Lista<Arista> ady:=g.listaAristas(v);
    para cada Arista a de ady hacer
       idVertice dest=a.destino;
       grado[dest]--;
```

Pseudocódigo del camino mínimo en grafos acíclicos (cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
        si grado[dest]==0 entonces
           procesar.inserta(dest);
        fsi

        si peso[v]!=infinito entonces
           real p:=a.peso;
           si peso[dest]>peso[v]+p entonces
             anterior[dest]:=v
             peso[dest]:=peso[v]+p;
           fsi
        fsi

     fpara
  fmientras
```

Pseudocódigo del camino mínimo en grafos acíclicos (cont.)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

```
   si procesados!=g.numVertices() entonces
       lanza HayCiclos
   fsi

   si peso[destino]==infinito entonces
      lanza NoExiste
   si no
      retorna caminoDe(origen,destino,anterior,peso)
   fsi

fmétodo

// CaminoDe es igual al de Dijkstra
```

Implementación en Java

```
/**
 * Calcular el camino mínimo en un grafo acíclico
 */
public static <V> CaminoConPesos caminoMinimoAciclico
    (Grafo<V,Double> g, int origen, int destino)
    throws NoExiste, IdIncorrecto, HayCiclos
{
  int anterior[]= new int[g.numVertices()];
  double[] peso= new double[g.numVertices()];
  // dar valor infinito a todas las casillas de peso
  for (int i=0; i<peso.length; i++) {
      peso[i]=Double.POSITIVE_INFINITY;
  }
  peso[origen]=0.0; // para no hacer ciclos
  anterior[origen]=-1; // para indicar que no tiene
```

Implementación en Java (cont.)

```
int[] grado= calculaGradoEntrada(g);
LinkedList<Integer> procesar =
    new LinkedList<Integer>();
int procesados=0;
// insertar en la cola vértices de grado cero
for (int v=0; v<g.numVertices(); v++) {
  if (grado[v]==0) {
    procesar.addLast(new Integer(v));
  }
}
// bucle principal
while (!procesar.isEmpty()) {
  procesados++;
  int v=procesar.removeFirst().intValue();
```

Implementación en Java (cont.)

```
// procesar las aristas de v
List<Arista<Double>> ady=g.listaAristas(v);
for (Arista<Double> a: ady) {
   int dest=a.destino();
   grado[dest]--;
   if (grado[dest]==0) {
     procesar.addLast(new Integer(dest));
   }
   if (!Double.isInfinite(peso[v])) {
     double p=a.contenido().doubleValue();
     if (peso[dest]>peso[v]+p) {
        anterior[dest]=v;
        peso[dest]=peso[v]+p;
     }
   }
```

Implementación en Java (cont.)

```
      }
    }
    if (procesados!=g.numVertices()) {
        throw new HayCiclos();
    }
    if (Double.isInfinite(peso[destino])) {
        throw new NoExiste();
    } else {
        return caminoDe
          (origen,destino,anterior,peso[destino],g);
    }
}
```