Tema 3: Cambio de plano de proyección. Giro. Abatimiento.

Concepto del artificio de los cambios de plano y su justificación en el Sistema Diédrico.

Se ha visto en los temas precedentes cual es el fundamento de este sistema de representación y cómo se representan los elementos básicos: el punto, la recta y el plano y la interdependencia entre ellos. Seguidamente se van a estudiar unas transformaciones geométricas básicas: **cambios de plano, giros y abatimientos**, que son de gran utilidad en la resolución de ejercicios y problemas que se plantean en la representación diédrica (y en otros sistemas).

El objeto de aplicar estas herramientas de dibujo es el situar las entidades geométricas con las que se trabaja de la forma más favorable, es decir, si se desea conocer cómo es un triángulo dado por sus proyecciones, se trata de colocarlo, por el procedimiento que se elija, paralelo a un plano de proyección y así se apreciará su forma real.

Los diferentes problemas que se puedan plantear, es posible resolverlos aplicando cualquiera de las tres herramientas indicadas, si bien unas resultarán más sencillas que otras. Así pues, se elige el procedimiento a seguir que a cada cual le resulte más sencillo.

En este tema se aborda el cambio de plano de proyección, que consiste en elegir un plano vertical u horizontal diferente al que se tiene en la representación. Para visualizarlo con claridad se estudia como afecta el Cambio de Plano a un punto; entendido este concepto, el Cambio de Plano de la recta es el de dos puntos de ella y el del plano se obtiene por medio de tres puntos. Es preciso tener en cuenta que cuando se aplica el cambio de plano se está cambiando uno sólo de los planos de proyección.

La representación que resulta de aplicar el cambio de plano se denomina vista auxiliar.

Representación del punto tras el cambio de plano.

a) Cambio de plano vertical o vista auxiliar vertical.

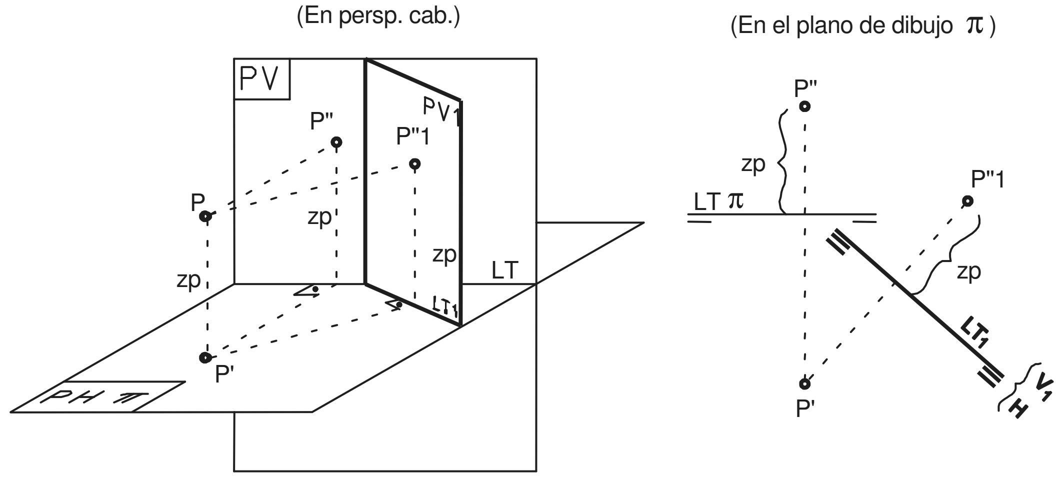


Figura 1. Cambio de plano vertical.

La figura 1 representa la perspectiva del cambio de plano vertical. En el plano de dibujo, se dispone de las proyecciones P’ P’’, indicándose el cambio de plano a realizar mediante la línea LT1, la cual señala el nuevo plano vertical de referencia de los nuevos planos de proyección. Esta línea, a la que se llama también línea de tierra, se indica con dos trazos gruesos en sus extremos, estando éstos hacia la proyección horizontal, poniendo a un lado de dicha LT la leyenda:

V1, que señala el nuevo vertical y se escribe sobre la LT.
H , señala al horizontal, el cual no se ha modificado.

Para efectuar el cambio de plano se procede así:

- Se determina un plano horizontal de referencia (π ó línea de tierra, LT)
- La nueva proyección vertical, debe estar en la perpendicular a la nueva línea de tierra LT1.
- En la perspectiva se observa que la proyección horizontal P’ no varía y que dado que el plano horizontal no se modifica, la cota no se altera, por consiguiente <u>la nueva proyección vertical conserva la misma cota</u>. Esta nueva proyección se la denomina con el subíndice 1.

Siguiendo estas ideas básicas, realizar los cambios de plano planteados en la figura 2.

Nota: Es preciso tener en cuenta que el criterio del alejamiento (+) y cota (+) se mantiene y se debe llevar con cuidado en cada cambio de plano efectuado.

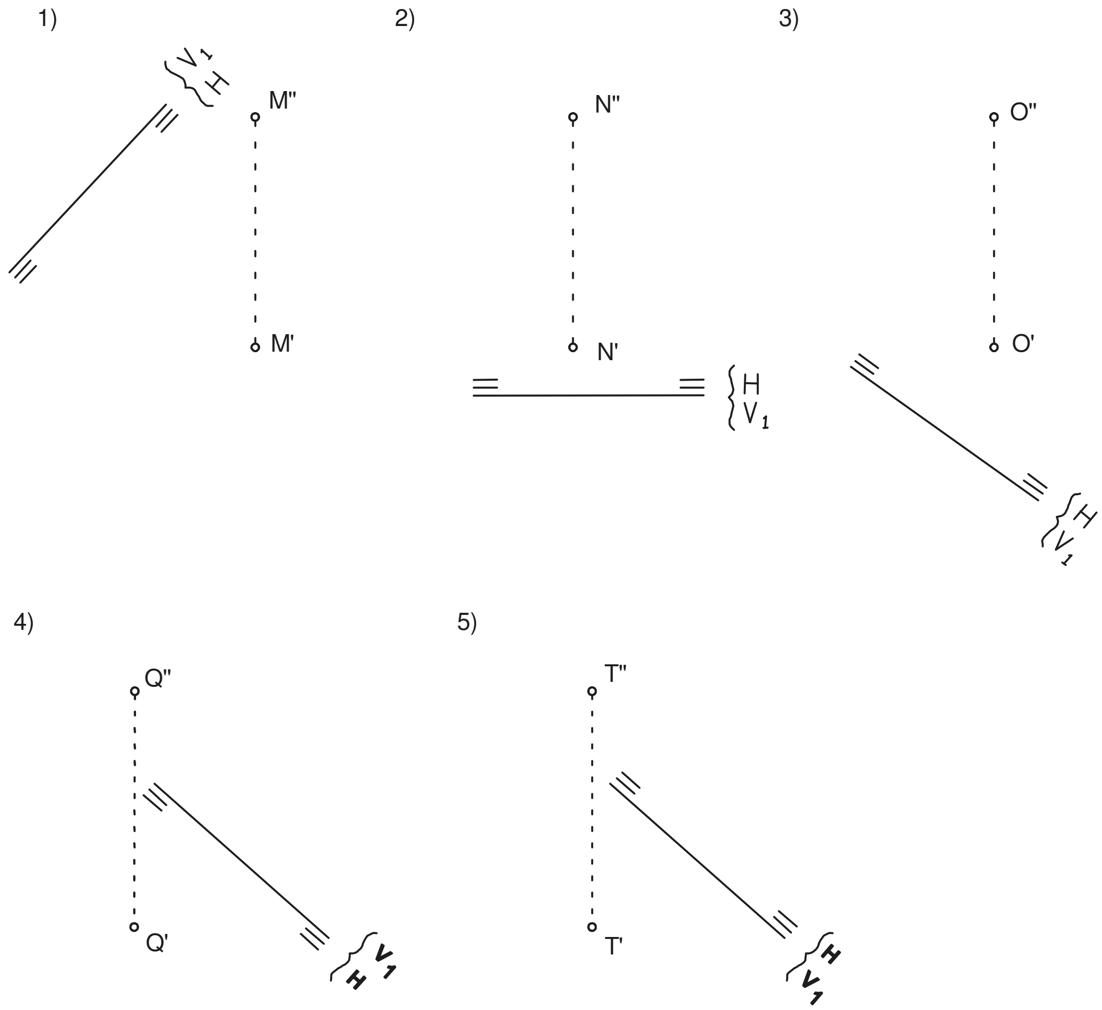


Figura 2. Ejercicios sobre cambio de plano vertical de un punto, o vista auxiliar vertical.

Obsérvese que la diferencia entre los cambios de plano de los puntos Q y T propuestos, está en el sentido de visualización elegido según se aprecia en la perspectiva de la figura 3.

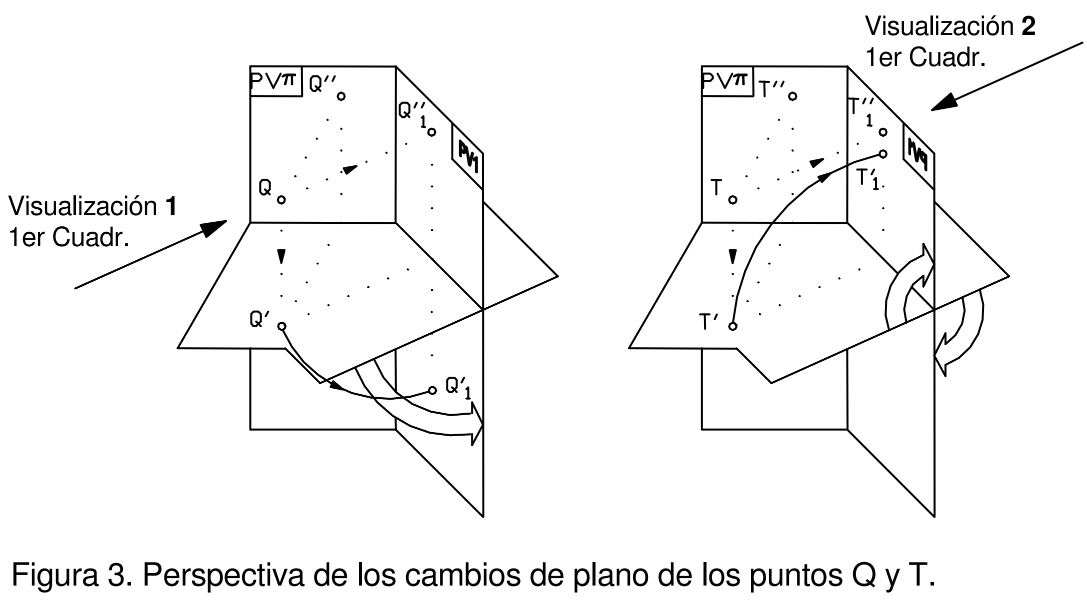


Figura 3. Perspectiva de los cambios de plano de los puntos Q y T.

b) Cambio de plano horizontal o vista auxiliar horizontal.

En este caso se cambia el plano horizontal, que se indica mediante la nueva línea de tierra con dos trazos en sus extremos hacia el lado de la proyección horizontal (con alejamientos positivos) como en el caso anterior, pero para señalar que se cambia el plano horizontal, en la leyenda se indica H1, (Figura 4b y 4 c).

(En persp. cab.) (En el plano de dibujo π)

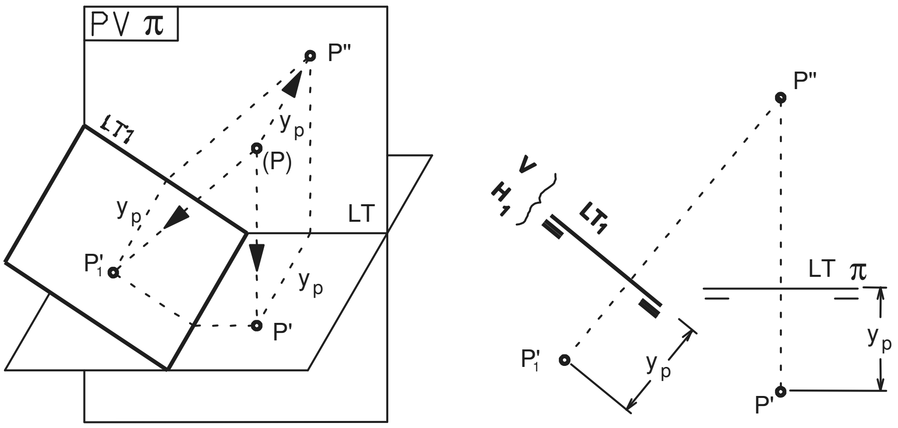


Figura 4: Cambio de plano horizontal o vista auxiliar horizontal.

La nueva proyección horizontal del punto o vista auxiliar horizontal se obtiene siguiendo los pasos (figura 4 c):

- Se sitúa un plano vertical de referencia o línea de tierra en la posición que se considere conveniente.
- La proyección horizontal está en la perpendicular desde M'' a la nueva LT1.
- En la perspectiva se observa como la proyección vertical se conserva ya que no varía el vertical de proyección y además la nueva proyección horizontal M'_1 conserva el alejamiento.

Como aplicación se pueden resolver los ejercicios de la figura 5.

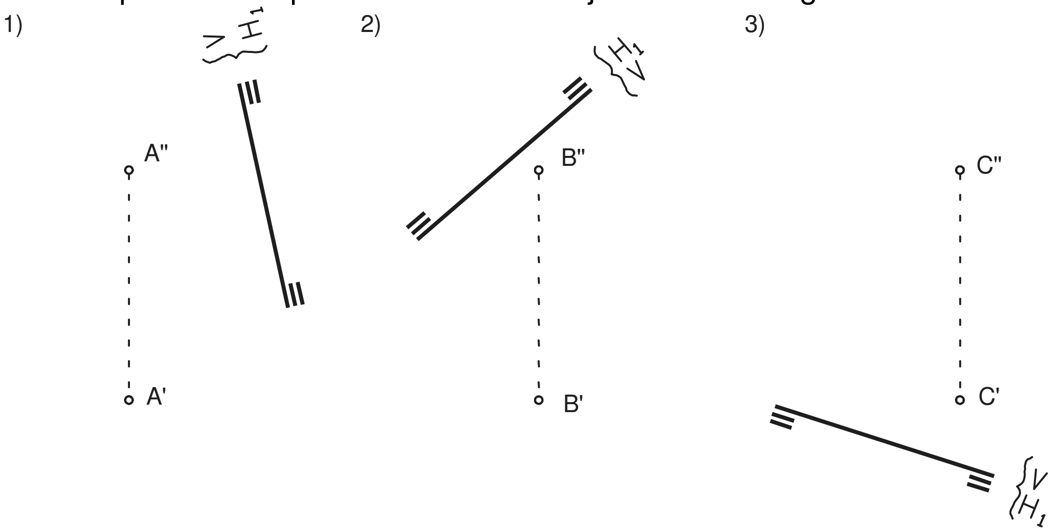


Figura 5. Ejercicios sobre cambio de plano horizontal de un punto.

Representación de la recta tras el cambio de plano o vista auxiliar de la recta.

Bien entendido el cambio de plano del punto, la recta se obtiene realizando el cambio de plano de dos puntos de ella.

Así, la vista auxiliar vertical de la recta que se propone en la figura 6a, se resuelve siguiendo los pasos ya señalados en el caso del punto. Para ello se toma el plano de referencia π y los puntos 1 y 2 de r (el punto 1 se elige por comodidad en el plano de referencia π) a los cuales se les aplica el cambio. La vista auxiliar r''_1 pedida se obtiene uniendo $1''_1$ y $2''_1$.

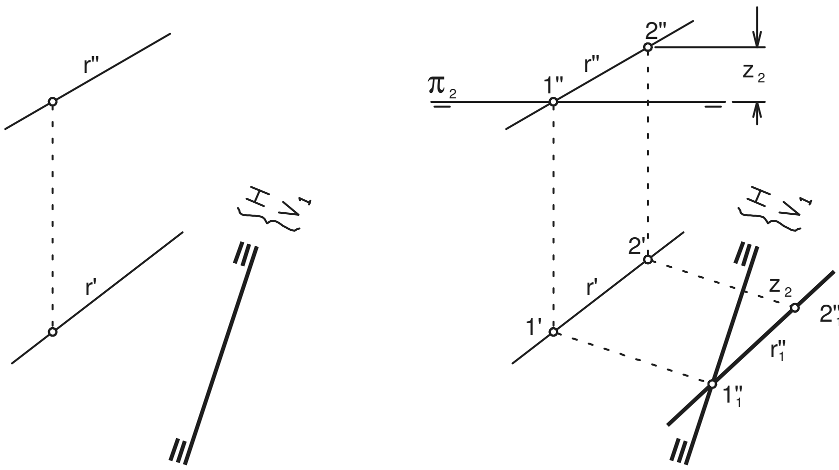
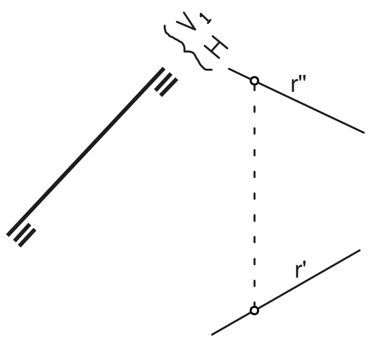


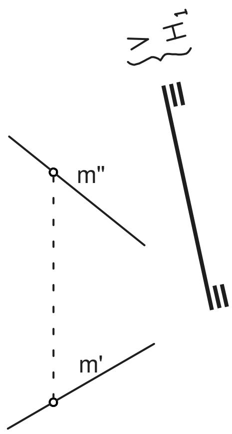
Figura 6. Vista auxiliar de la recta. Planteamiento y resolución.

Se plantean en la figura 7 diversos ejercicios para la obtención de vistas auxiliares de rectas.

1)



2)



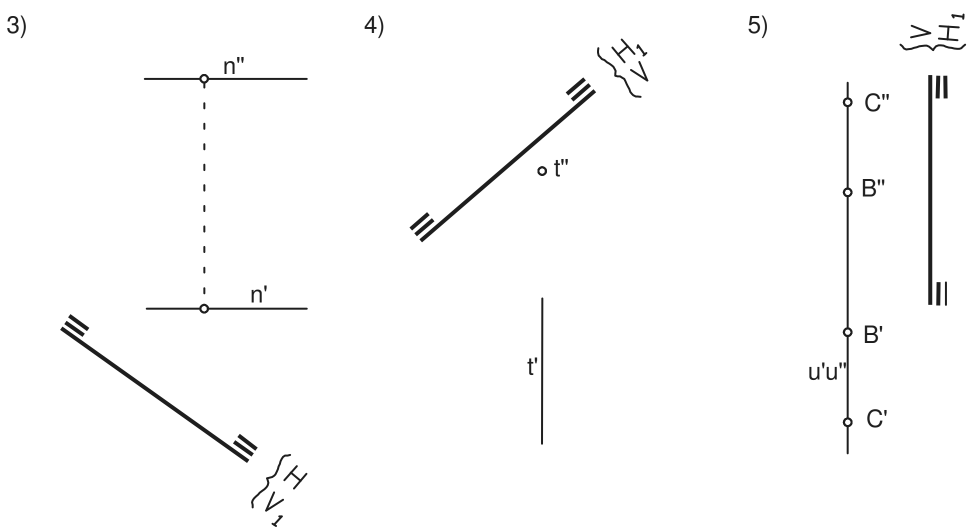


Figura 7. Ejercicios sobre vistas auxiliares de la recta.

Aplicación: transformar una recta cualquiera en paralela a uno de los planos de proyección y ésta en perpendicular a otro.

El cambio de plano de una recta es de gran aplicación cuando se trata de:

1. Situarla en posición paralela a un plano de proyección, con lo cual se conoce su verdadera magnitud.
2. Y con otro cambio de plano adicional, situarla de punta, permitiendo resolver problemas, como la obtención de la mínima distancia de dos rectas, o situar planos de perfil.

Mediante el siguiente ejercicio se va a mostrar el procedimiento a seguir en su resolución (figura 8):

Obtener la verdadera magnitud de la recta **r** y situarla de punta (perpendicular a uno de proyección).

Pueden seguirse dos caminos:

I) 1º Primera vista auxiliar: Situar **r** paralelo al vertical.
2º Segunda vista auxiliar: Situar **r** perpendicular al horizontal.

II) 1º Primera vista auxiliar: Situar **r** paralelo al horizontal.
2º Segunda vista auxiliar: Situar **r** perpendicular al vertical.

El primero de los caminos indicados, desarrollado con detalle es:

1º. Primera vista auxiliar: Situar **r** paralelo al vertical.
Se visualiza en la figura 8, el cambio de plano vertical a realizar, de modo que este sea paralelo a r, para lo cual la nueva LT debe ser paralela a r'.

En el plano de dibujo (figura 8) una línea paralela al vertical tiene su proyección horizontal perpendicular a la dirección de proyección, por lo que la nueva LT ha de ser paralela a dicha proyección horizontal, quedando la vista vertical auxiliar de s paralela al vertical.

2º Segunda vista auxiliar: Situar **r** perpendicular al horizontal.

Situarla de punta requiere un segundo cambio de plano (figura 8), esta vez horizontal. Para ello se consideran las proyecciones horizontal y la vista auxiliar vertical r''_1 con su respectiva LT de referencia (girando la figura puede verse en la forma que habitualmente se está acostumbrado).

Esta tercera LT es perpendicular a la proyección de la recta que está en VM, r''_1, y se indica con tres tracitos en sus extremos. La nueva proyección horizontal resultante r'_1, es un punto, pues la recta es proyectante sobre el horizontal.

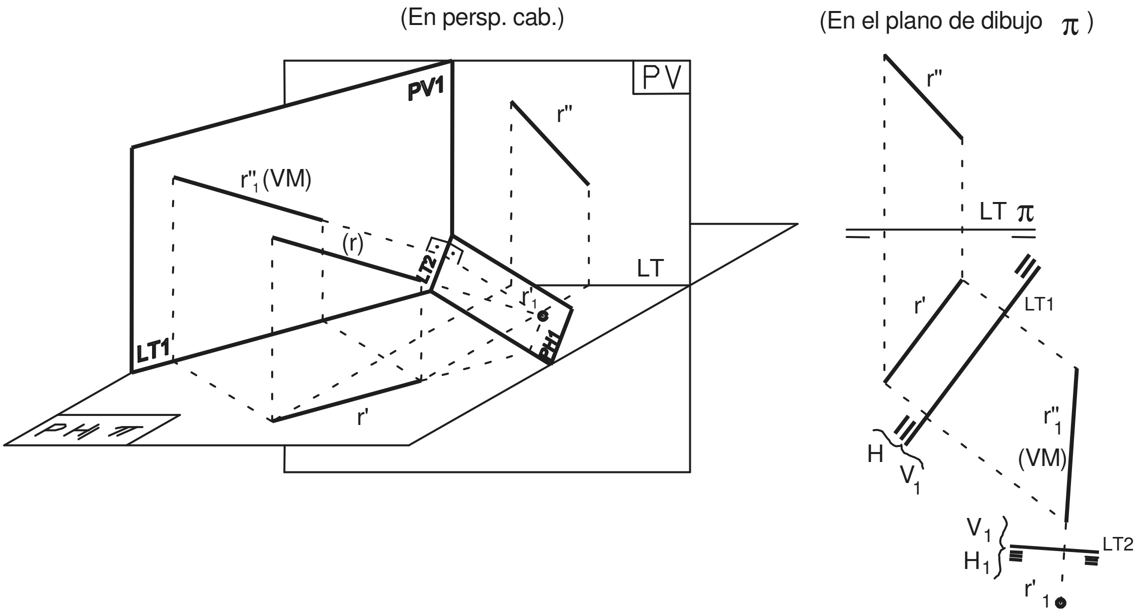


Figura 8: Primera vista auxiliar: Situar **r** paralelo al vertical. Segunda vista auxiliar: Situar **r** perpendicular al horizontal.

El segundo de los caminos se resuelve sobre el plano de dibujo en la figura 9, siguiendo el orden inverso, es decir, el primer cambio de plano es el del horizontal, quedando así, esta nueva proyección en VM. El segundo cambio de plano se efectúa con la LT perpendicular a la nueva proyección horizontal, quedando la recta proyectante sobre el vertical.

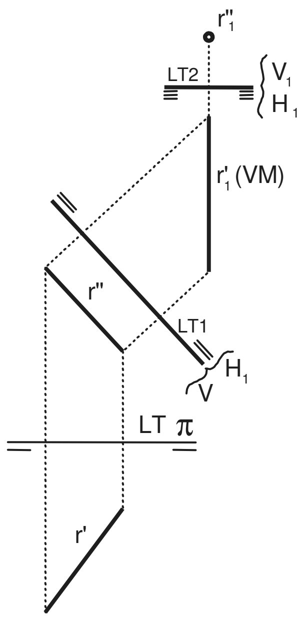


Figura 9. Situar la recta **s** perpendicular al vertical de proyección.

Representación de formas planas tras el cambio de plano.

En el sistema diédrico el plano está dado por puntos, rectas o ambos, por lo cual el cambio de plano de formas planas es el que resulta de aplicarlo a cada uno de sus elementos.

Aplicación: transformar un plano oblicuo en perpendicular a uno de los de proyección.

Se va a aplicar el cambio de plano o vista auxiliar para situarlo perpendicular a uno de proyección, para ello se va a tener en cuenta la siguiente apreciación (figura 10): en un plano proyectante sobre el vertical, las horizontales del plano son perpendiculares al vertical. Es decir la LT es perpendicular a las h'del plano. Y, análogamente si es proyectante sobre el horizontal, la LT es perpendicular a las v '' del plano.

Por tanto, para situar un plano:

1. Perpendicular al vertical, se hace un cambio de plano vertical con la nueva LT perpendicular a una horizontal h' de dicho plano. En la figura 10 se obtiene la vista auxiliar vertical del plano α(r,h) de forma que quede proyectante sobre dicha vista.

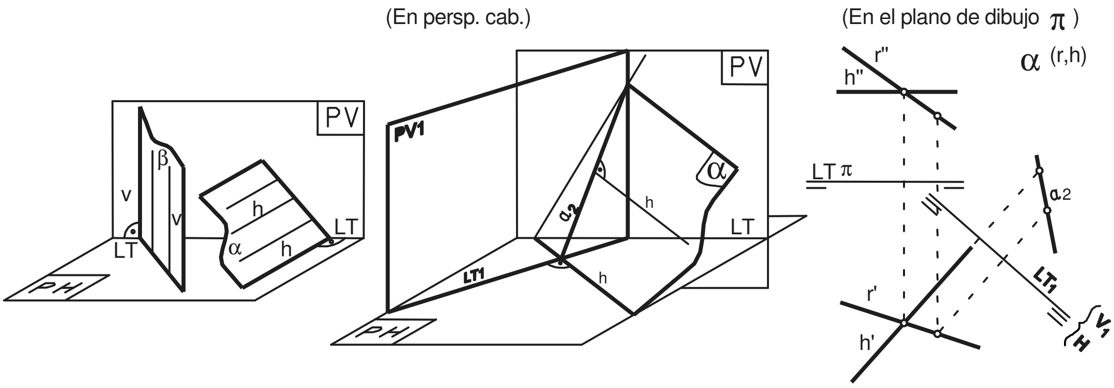


Figura 10. Situar el plano α(r,h) proyectante sobre el vertical de proyección.

2. Perpendicular al horizontal, (figura 11) se hace un cambio de plano horizontal con la nueva LT perpendicular a una paralela al vertical de dicho plano.

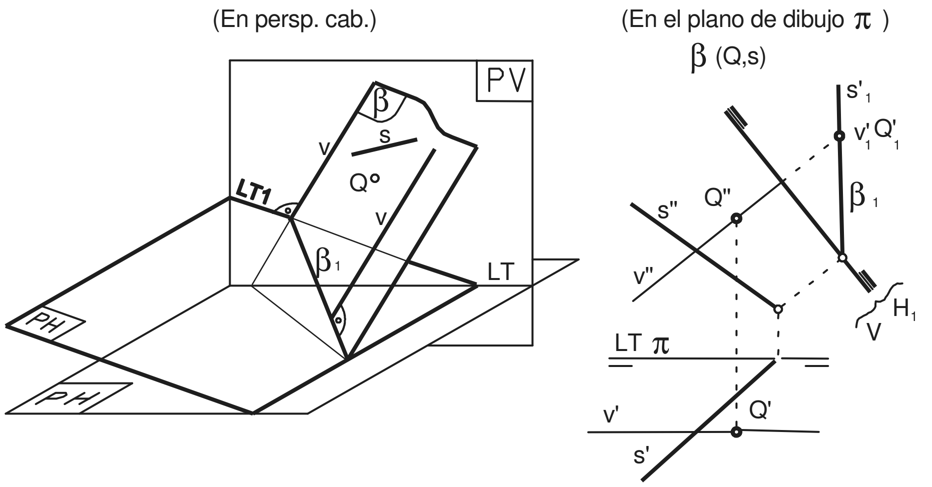


Figura 11. Situar β(Q,s) proyectante sobre el horizontal de proyección.

Cambios sucesivos de los planos de proyección. Aplicaciones:
a) Verdadera magnitud de formas planas contenidas en un plano perpendicular a uno de los de proyección y en plano oblicuo.
b) Vistas auxiliares simples y dobles.
c) Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

a) Verdadera magnitud de formas planas.

Para obtener la VM de formas planas, un procedimiento a seguir es colocar el plano que la contiene, paralelo a uno de proyección. Para ello se van a mostrar las siguientes situaciones:

a1) Verdadera magnitud de formas planas contenidas en un plano perpendicular a uno de los de proyección.

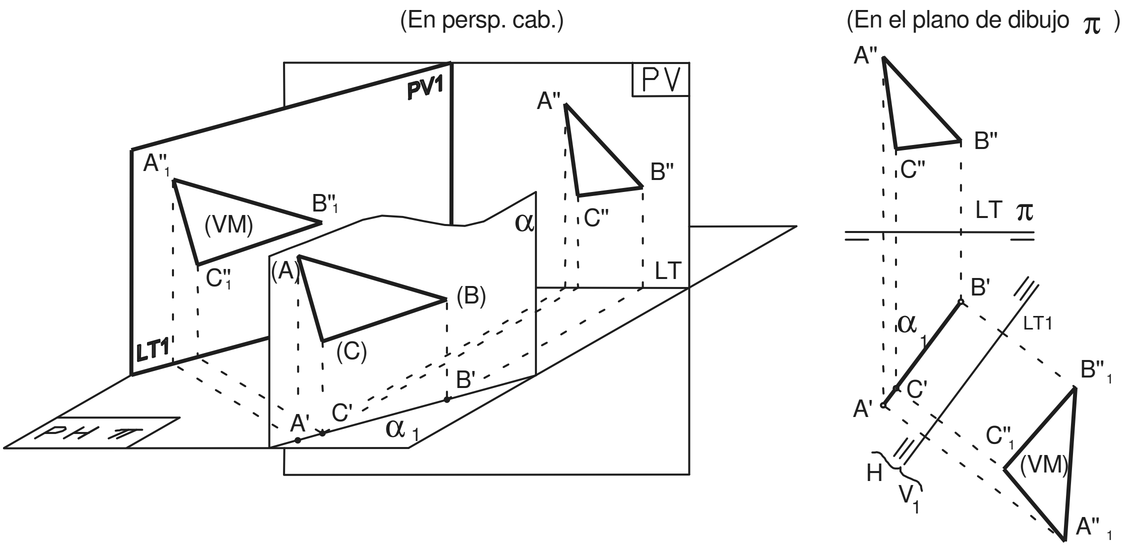


Figura 12: Obtención de la verdadera magnitud de una figura contenida en plano proyectante, mediante una vista auxiliar.

Este caso se resuelve mediante un solo cambio de plano (figura 12): del horizontal si el plano es perpendicular al vertical, quedando paralelo a este o del vertical si es perpendicular al horizontal. La figura queda en verdadera magnitud en la vista auxiliar que se ha obtenido.

a2) Verdadera magnitud de formas planas contenidas en un plano oblicuo.

Este, que es el caso general, se resuelve realizando dos cambios de plano sucesivos, para lo cual hay dos alternativas, siendo igual tomar una que otra:

<u>Una</u>: El primer cambio de plano es el del horizontal que sitúa el plano perpendicular al horizontal y seguidamente se cambia el plano vertical quedando paralelo a él y todos los elementos que contiene quedan representados en verdadera magnitud.

Los pasos seguidos en la resolución del ejercicio de la figura 13, en la que se pide obtener la verdadera magnitud del triángulo ABC, son:

- 1^{r} C.P. horizontal, dejando $\alpha \perp$ al horizontal.
    - LT1 perpendicular a v'', quedando A', B', C' alineados en la traza de α(A,B,C).
- 2º C.P. vertical, dejando α // al nuevo vertical.
    - LT2 // a la traza de α, es decir a A'_1, B'_1, C'_1, resultando ABC en verdadera magnitud.

      Nota: este segundo cambio de plano se realiza considerando las proyecciones horizontal A'_1, B'_1, C'_1, y vertical A'', B'', C''.

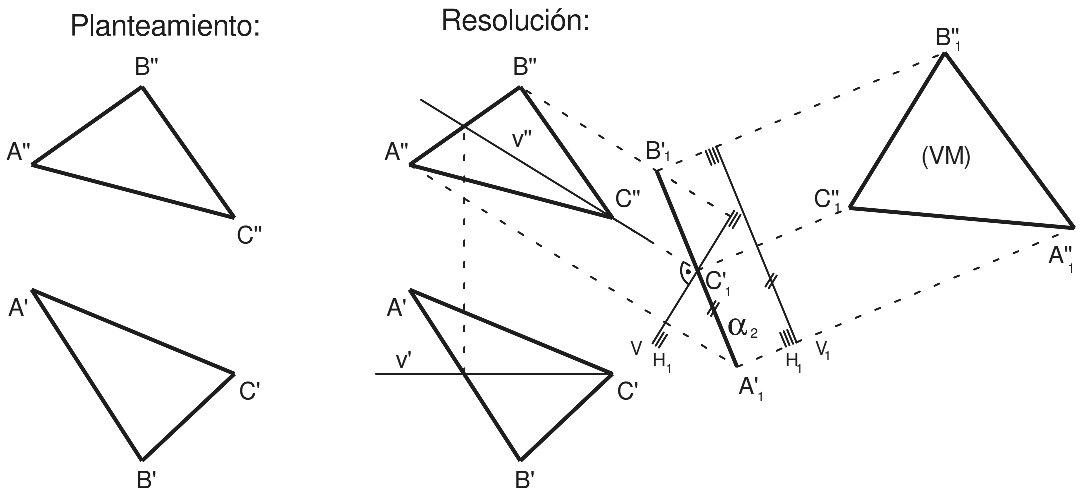


Figura 13: Verdadera magnitud de la forma plana A, B, C.

<u>Otra</u>: El primer cambio es el del vertical, que coloca el plano perpendicular al vertical y a continuación se cambia el plano horizontal, quedando paralelo a él y todos lo elementos que contiene aparecen representados en verdadera magnitud (figura 14).

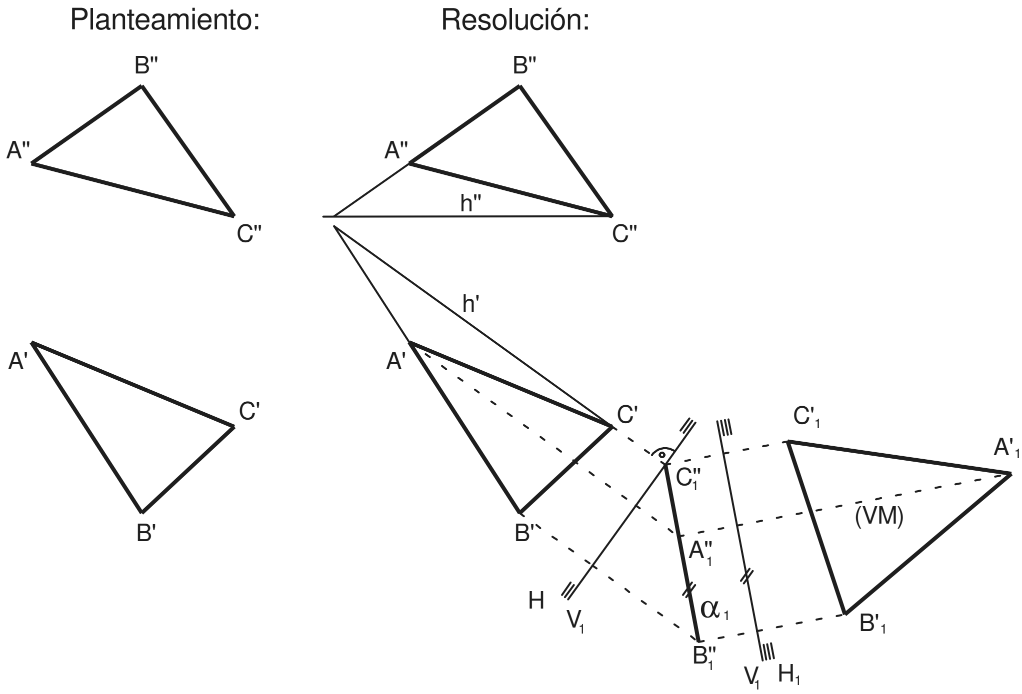


Figura 14: Verdadera magnitud de la forma plana A, B, C.

b) Vistas auxiliares simples y dobles.

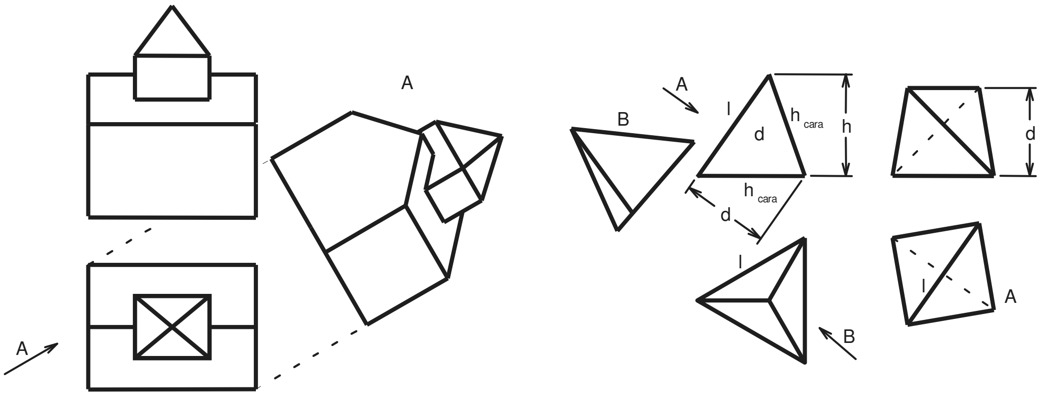
La aplicación inmediata que esto tiene en el dibujo técnico, es la obtención de vistas auxiliares de piezas u objetos, que por su forma, es interesante que sean observados desde puntos de vista diferentes al horizontal y vertical de proyección que se han elegido para representarla.

Usualmente la posición de las piezas se elige de modo que la mayoría de sus caras y formas geométricas estén orientados según los planos de proyección, es decir, que tengan la posición más favorable para su representación. Pero es frecuente que algunas partes de las piezas sea conveniente observarlas desde posiciones diferentes, mediante vistas auxiliares:

<u>Simples</u>: cuando basta un solo cambio de plano, por ser perpendicular a uno de proyección (figura 15).

<u>Dobles</u>: cuando son precisos dos cambios de plano, por ser un plano oblicuo (figura 16).

Siguiendo las Normas UNE de dibujo técnico (figuras 15, 16), se indica la vista auxiliar mediante una flecha que indica la dirección de visualización, a la que se denomina con una letra mayúscula, la vista auxiliar se sitúa de forma conveniente, poniendo a su lado el nombre que se le ha dado. Debe haber, al menos, una vista completa de la pieza y las que tienen formas desfavorables, se pueden interrumpir con una línea de rotura.



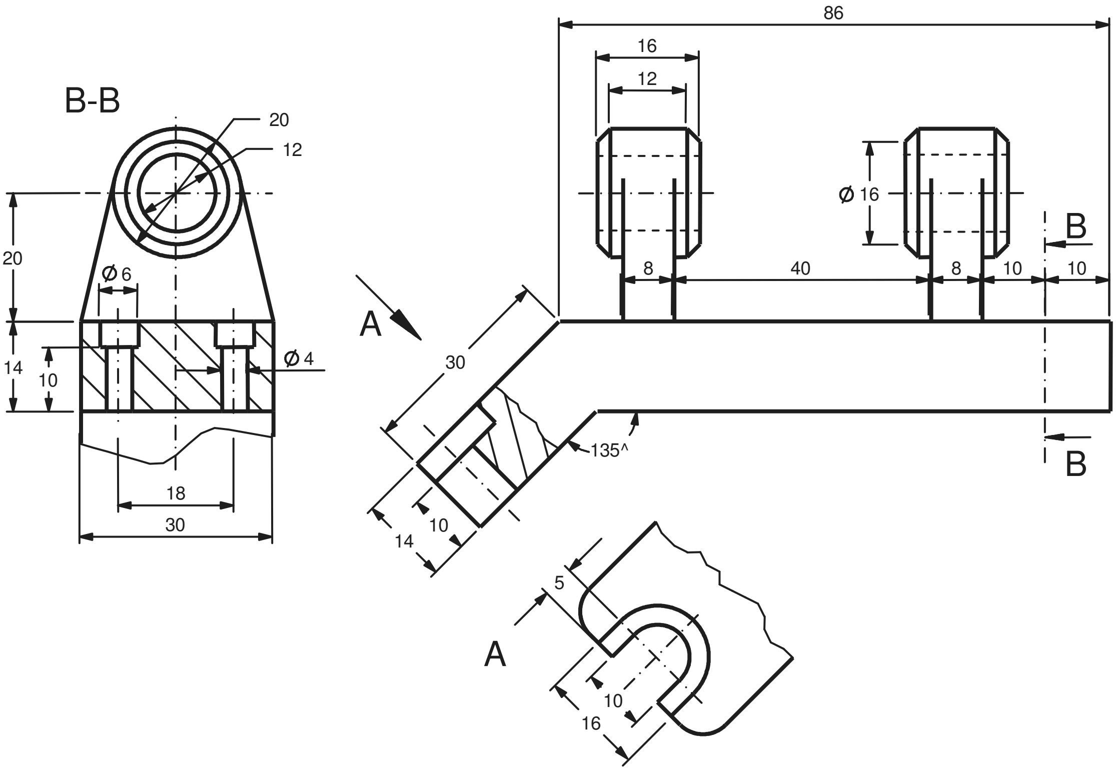


Figura 15: Vista auxiliar simple.

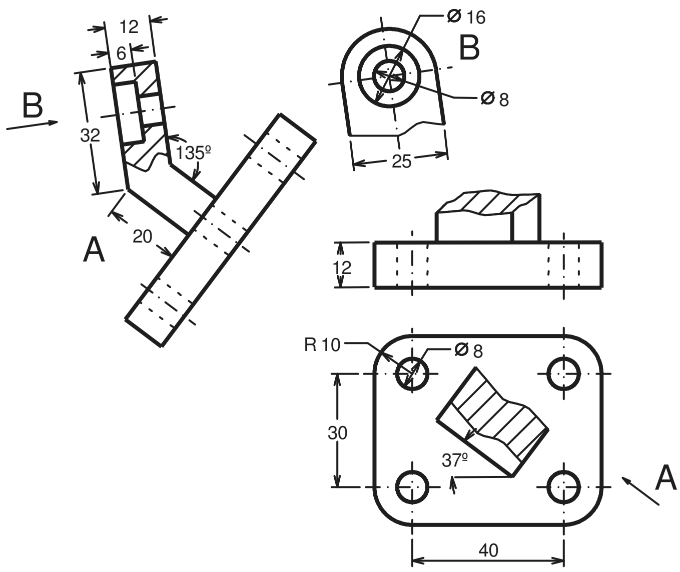


Figura 16: Vista auxiliar doble.

c) Perpendicular común a dos rectas que se cruzan. Mínima distancia.

Esta aplicación permite obtener la mínima distancia de dos rectas que se cruzan. Se pueden dar dos casos:

c1) Una de las rectas es perpendicular a un plano de proyección (por ejemplo el horizontal).

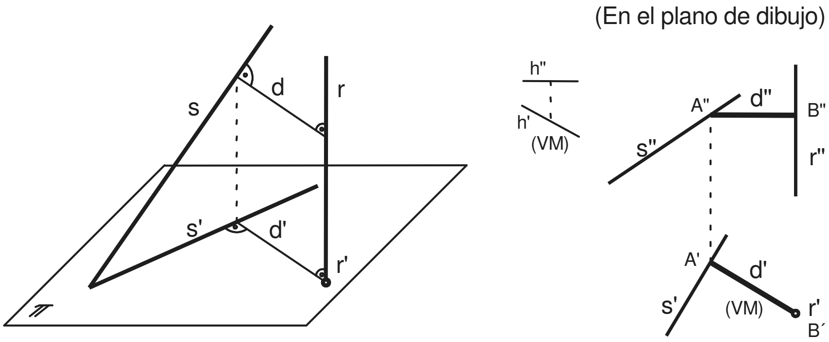


Figura 17: Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan, siendo una de ellas proyectante.

Dado que r es perpendicular al horizontal (figura 17), su proyección horizontal es el punto r' y toda perpendicular a r es paralela al horizontal, también la mínima distancia d, que está en verdadera magnitud.

Por otra parte (se verá posteriormente) aunque la perpendicularidad, en general, no se conserva en la proyección, si una de las rectas es paralela al plano de proyección (como la distancia d) la perpendicularidad si se conserva en dicha vista, por lo cual d' y s' son perpendiculares.

Por consiguiente, los pasos a seguir son:

1º La mínima distancia d (=A,B) es la perpendicular a s' por r' y está en verdadera magnitud por ser paralela al de proyección.

2º Por A'' en s'', se traza d'', perpendicular a r'', ya que d es paralela al horizontal, obteniéndose el otro extremo de la distancia d en r, el punto B.

Si la recta fuese perpendicular al vertical, se procede análogamente.

c2) Caso general.

Este caso se presenta cuando ambas rectas son oblicuas y se resuelve reduciéndolo al anterior mediante un cambio de plano, haciendo que una de las rectas quede perpendicular a uno de los de proyección (figura 18).

Pasos:

1º Cambio de plano para que una de las rectas quede paralela a uno de los planos de proyección (de las cuatro posibilidades, se elige n // al htal).

2º Segundo cambio de plano para colocar n perpendicular al horizontal, quedando n'_1 en un punto (**m** también se cambia de plano).

3º La mínima distancia se resuelve como se indicó en el caso anterior.

4º Se deshacen los cambios de plano, para llevar la mínima distancia a las proyecciones iniciales.

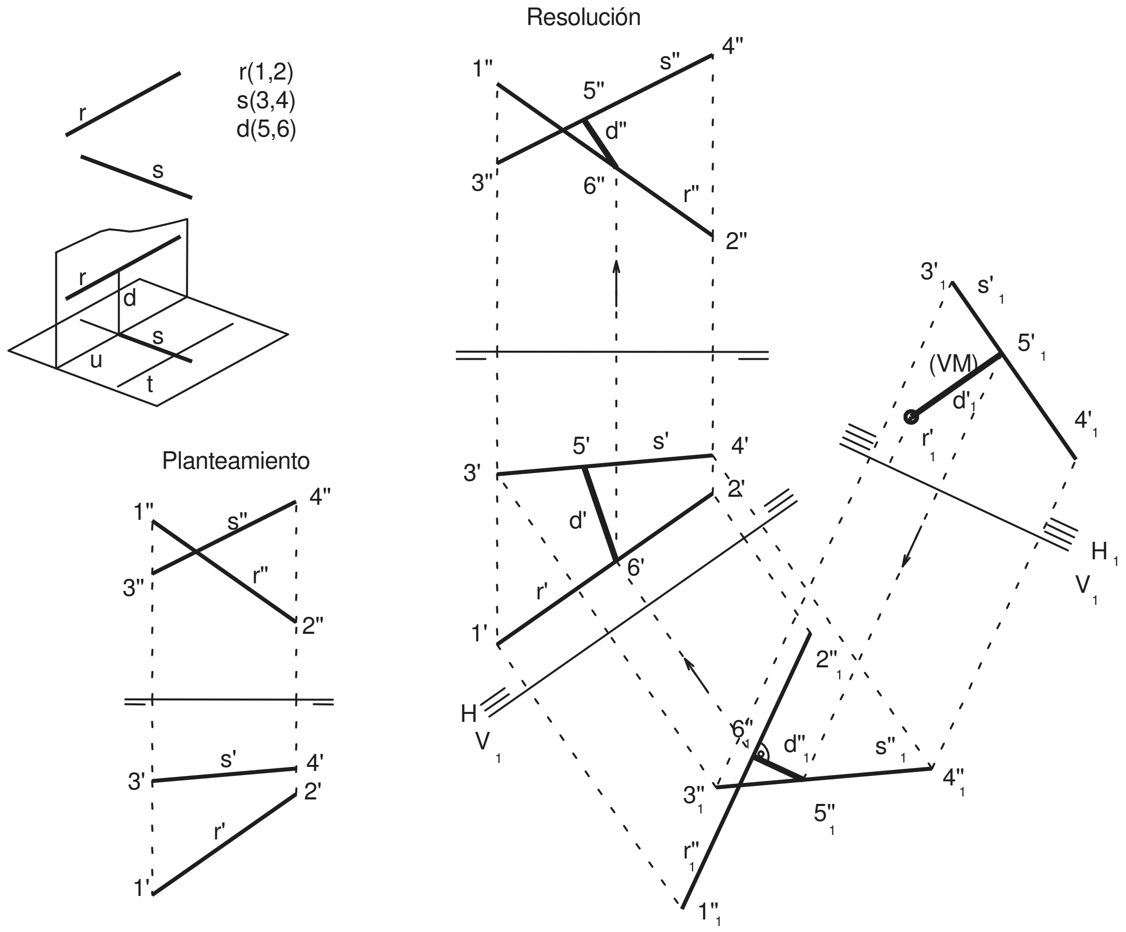


Figura 18: Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.

Giros.

Estudio de giros. Es otra de las herramientas que facilita la resolución de problemas, buscando situar los elementos geométricos de forma favorable para el reconocimiento de las magnitudes que se desean conocer. Es la trayectoria de un punto al girar respecto a un eje. Se empieza analizando el giro del punto respecto a un eje perpendicular a un plano de proyección, para ver que el giro de la recta es el giro de dos de sus puntos y el del plano es el giro de puntos, o puntos y rectas del plano.

a) Giro del punto con respecto a un eje perpendicular al horizontal. Se trata de girar el punto P, 120º en sentido antihorario, según el eje e, perpendicular al horizontal.

El giro se realiza en el espacio en el plano δ, paralelo al horizontal a la altura del punto P (figura 19). El centro del arco de circunferencia que se realiza en el giro es I (δ ∩ e). En el plano de dibujo se resuelve con sencillez, siguiendo los pasos:

1. En el horizontal de proyección, e' es un punto (por ser e proyectante) y coincide con el centro del arco de giro I' siendo el giro similar al del punto P en el espacio. Por consiguiente P'_g está en el arco de circunferencia de centro e' y radio e'-P'.

2. La proyección vertical del punto girado P''_g, queda sobre P'_g (en la dirección de proyección) y con la misma cota que P' (ya que el giro es en el plano horizontal).

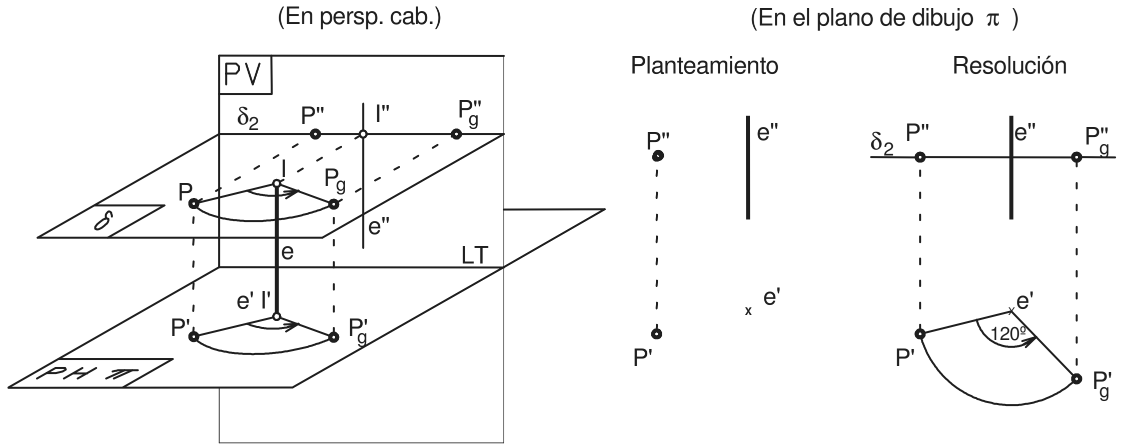


Figura 19. Giro del punto con respecto a un eje perpendicular al horizontal.

b) Giro del punto con respecto a un eje perpendicular al vertical (figura 20). Se plantea girar el punto P alrededor del eje e perpendicular al vertical, 120º en sentido horario.

En el espacio, el giro del punto P se da en el plano paralelo al vertical ε, que contiene a P, mediante un arco de circunferencia de centro I (ε ∩ e). Esta operación se reproduce de forma análoga sobre el vertical de proyección (por ser paralelo a ε) mediante un arco de circunferencia de centro I’’(≡e’’) y de radio I’’-P’’. P'_g es la proyección horizontal de P''_g y tiene el mismo alejamiento de P’ (ya que ε es paralelo al vertical).

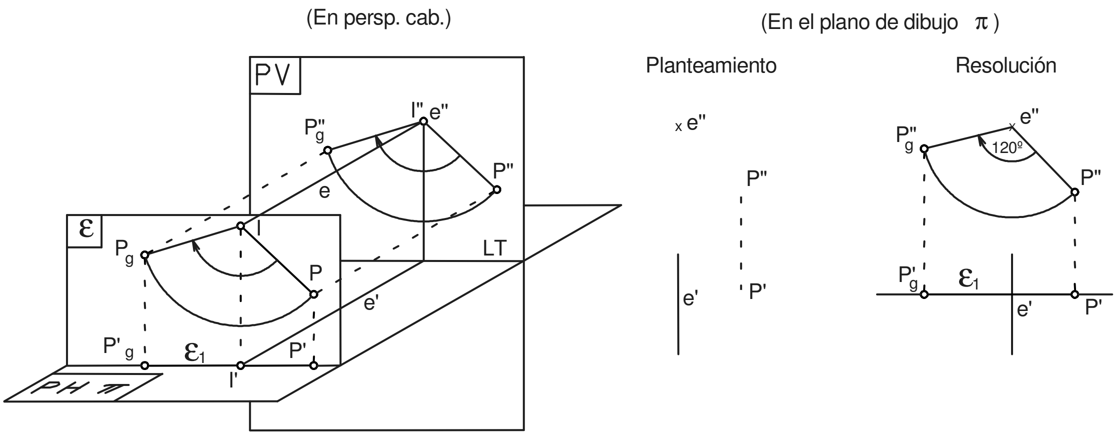


Figura 20. Giro del punto con respecto a un eje perpendicular al vertical.

Giro de la recta.

El proceso a seguir consiste en tomar dos puntos de la recta y girarlos, teniendo el cuidado de que el ángulo y el sentido sea el mismo. Sin embargo, se puede abreviar un poco, girando el punto de la recta más próximo el eje, es decir, la mínima distancia entre las rectas y el eje, (figura 21).

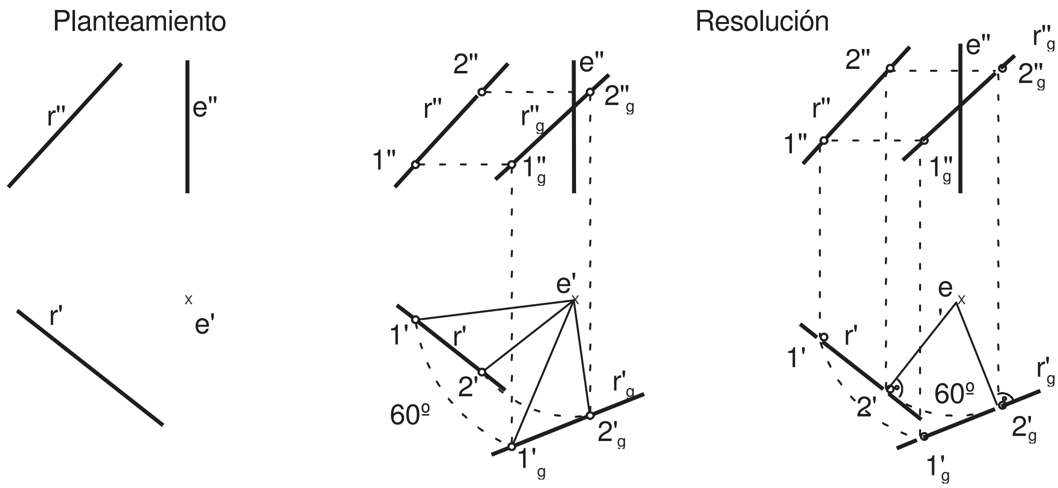


Figura 21. Girar la recta r 60º en sentido trigonométrico (antihorario).

El interés por aplicar el giro a una recta es, a menudo, obtener la verdadera magnitud de un segmento (figura 22), para lo cual se ha de poner éste paralelo a uno de los de proyección. Esta operación se simplifica eligiendo un eje que corte a la recta, ya que el punto intersección no cambia en el giro, con lo que basta girar un punto de la recta.

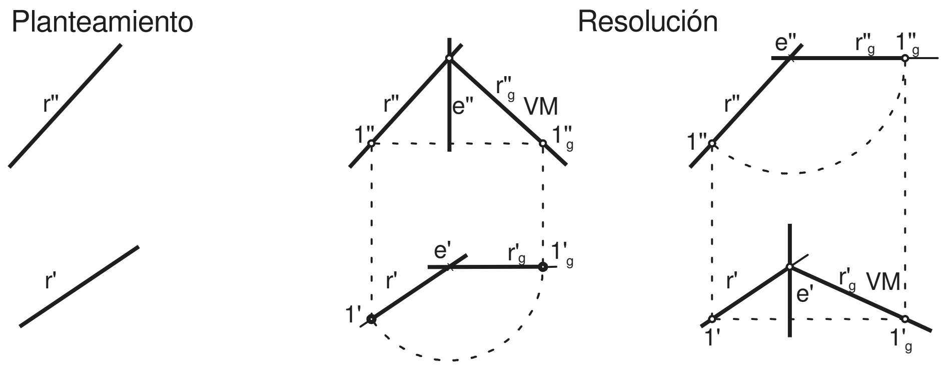


Figura 22. Obtención de la V.M. de un segmento mediante giro.

Giro de formas planas. Aplicaciones.

Girar formas planas tiene por objeto principalmente, el situarlo de perfil o el obtener su verdadera magnitud, tras un segundo giro. (Este procedimiento, por ser más engorroso que el cambio de plano o el abatimiento, no se aplica tanto). Esto se ilustra en el ejemplo de la figura 23, en que se realiza un primer giro para colocar el plano perpendicular a uno de proyección, para lo cual se gira una horizontal del plano hasta dejarla perpendicular al vertical (o una // al vertical hasta dejarla ⊥ al horizontal). Se elige convenientemente un eje perpendicular al horizontal. Un segundo giro, permite colocarlo, paralelo al otro plano de proyección, en el cual queda en V.M.

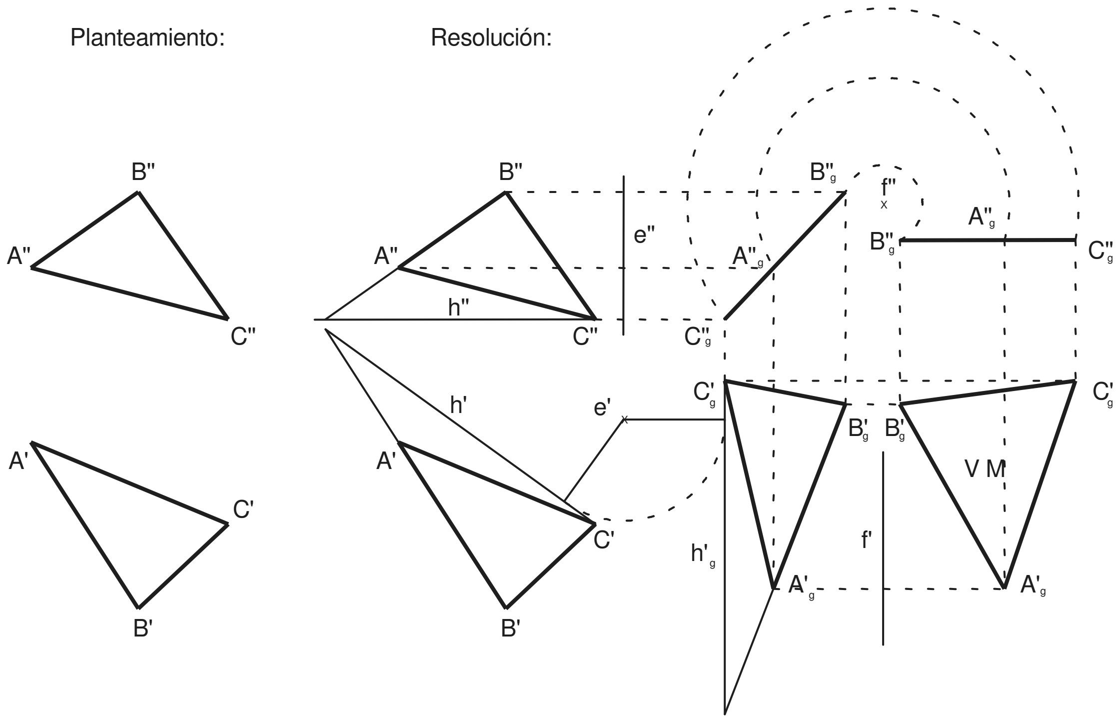


Figura 23. Obtención de la V.M. del triángulo ABC, mediante giros.

Giro de objetos.

El giro de un objeto permite visualizarlo en posiciones diferentes, con resultados similares al cambio de plano (figuras 15 y 24).

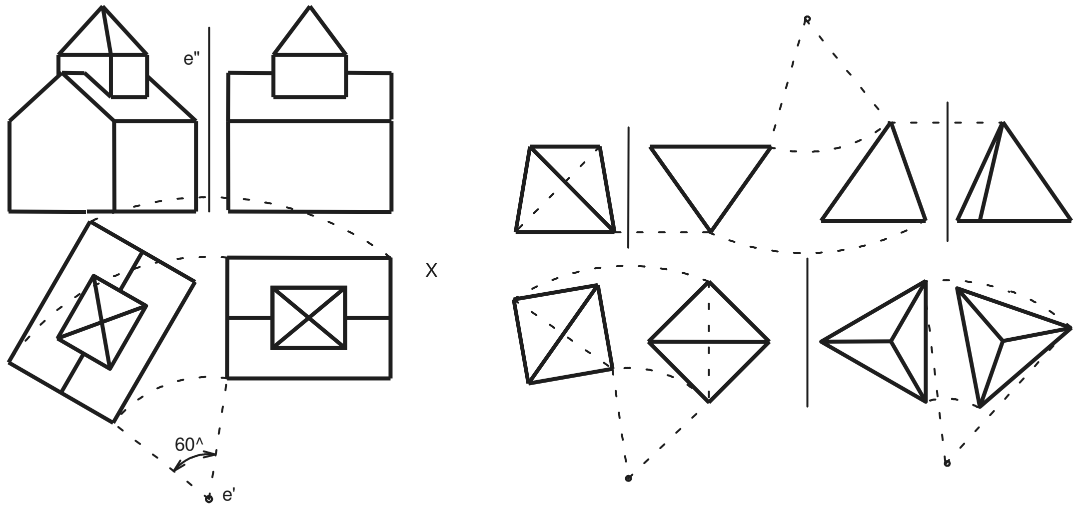


Figura 24. Giro de objetos.

Estudio del abatimiento.

Abatir un plano sobre otro, es girarlo hasta que coinciden, tomando como eje de giro, o charnela, la intersección entre ambos. A diferencia del cambio de plano y del giro, en que la operación se realiza sobre todos los elementos de la figura tridimensional, el abatimiento afecta a los elementos que hay en el plano que se está abatiendo (figura 25).

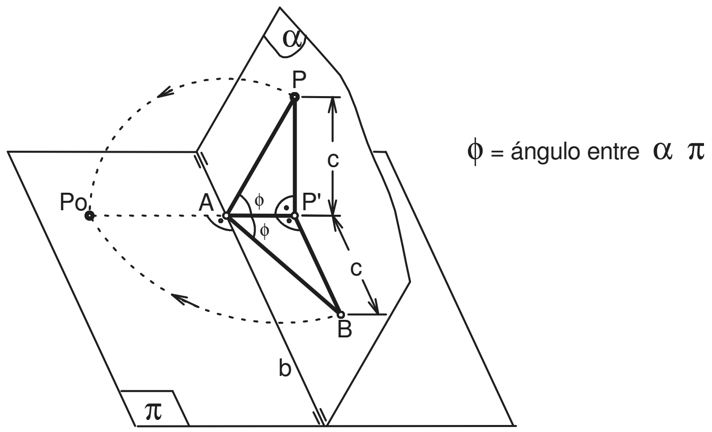


Figura 25. Abatimiento del punto P€α.

Observando la figura 25, que muestra el abatimiento del P€α(r,s), se aprecian los siguientes elementos:
- El plano π de referencia, sobre el cual se abate, que puede ser horizontal o vertical.

- La charnela b, o eje de giro del plano α.
- El radio de giro A-P, del arco que sigue el punto P a P_o en su abatimiento.

Este giro se realiza en el espacio, así pues se trata de realizar esta operación en el plano de dibujo.

Considerando que π es un plano de referencia horizontal, se ve que:
- P-P’ es la cota de P respecto a π.
- La charnela b es la horizontal de α que se encuentra en π (b=α∩π)
- El triángulo PP’A, es rectángulo en P’ y se puede dibujar sobre el horizontal, situando B en la // a la charnela b por P’, a la distancia P-P’, siendo APP’=ABP’.

Por consiguiente AP = AB, que está sobre el plano de proyección y permite trazar el arco para abatir el punto P, sabiendo que P’ y P_o están en la misma perpendicular a la charnela.

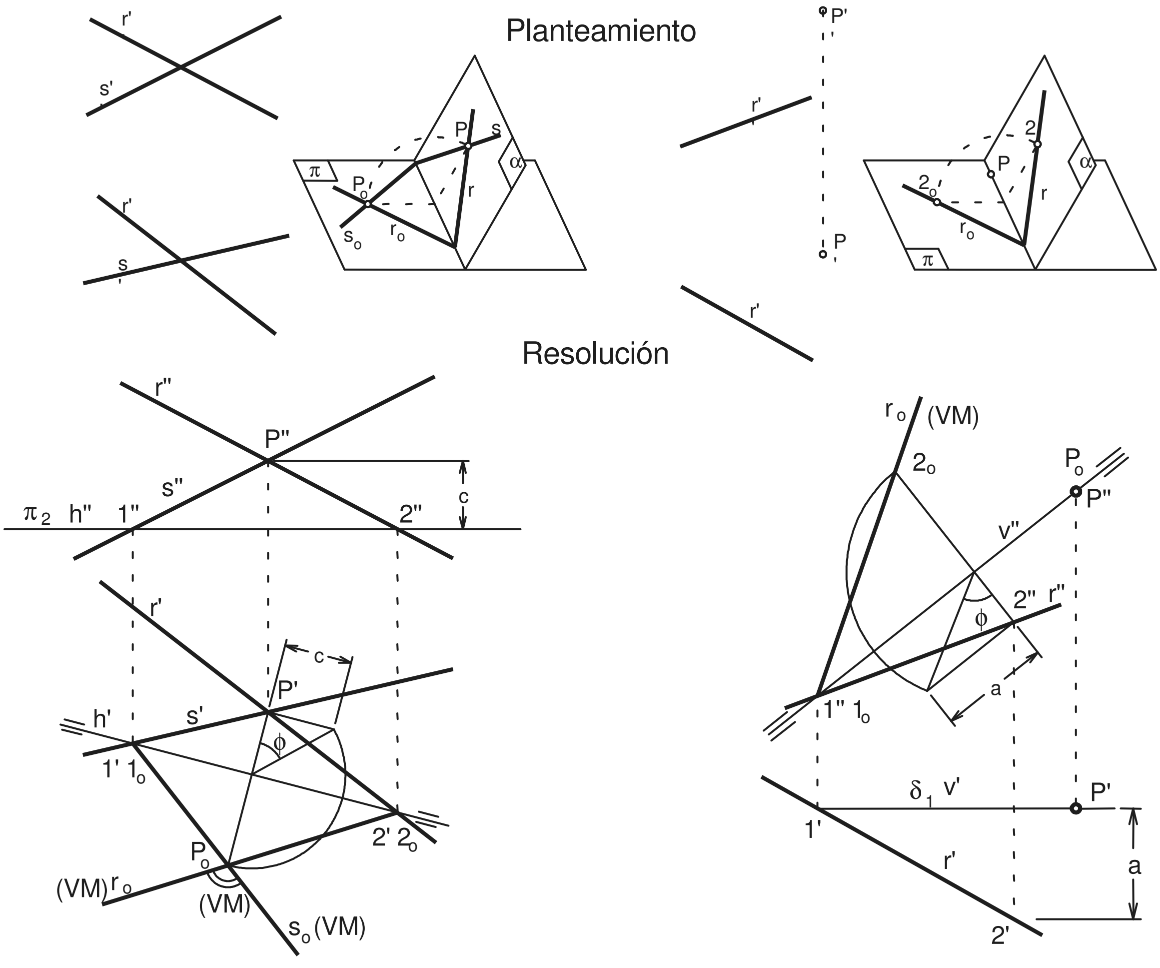


Figura 26. Abatimiento, en el plano de dibujo.

Los pasos para la resolución en el plano de dibujo (figura 26) son:

1. Se traza plano horizontal de referencia π_2 (o π_1 si se abate sobre el vertical)

2. Se obtiene la charnela h’(α∩π) si es sobre el horizontal (o v’’).
3. Por P’ se traza // y ⊥ a la charnela.
4. Llevando la cota entre P’’ y π2 en la paralela a la charnela, resulta el punto B. Siendo A la intersección de la ⊥ con la charnela.
5. Con el radio A-B y centro en A, se abate el punto P en Po, que queda sobre la ⊥.

El abatimiento sobre el vertical sigue un proceso similar (figura 26).

El abatimiento de la recta y de formas planas, consiste en abatir diferentes puntos de las figuras, teniendo en cuenta que el sentido del abatimiento ha de ser siempre el mismo. Así resultan r, s y el ángulo que forman en verdadera magnitud.

Afinidad.

La relación geométrica entre la proyección de una figura plana y su abatida es la afinidad, lo que facilita el abatimiento. La afinidad, es una transformación geométrica, en la que la relación de distancias entre cada par de puntos, origen y afín, al eje de afinidad permanece constante y se denomina razón de afinidad K (es positiva cuando ambos elementos están al mismo lado del eje y negativa cuando están en diferente lado). Es un caso particular de homología, en el que el centro se encuentra en el infinito.

Elementos de una afinidad son (figura 27):
- Figura original.
- Figura afín.
- Dirección de afinidad: es la dirección que tiene un punto y su afín.
- Eje de afinidad: es el lugar geométrico de los puntos dobles, es decir, de los puntos que son afines de sí mismos.

Para que quede definida una afinidad es preciso conocer dos puntos afines y el eje.

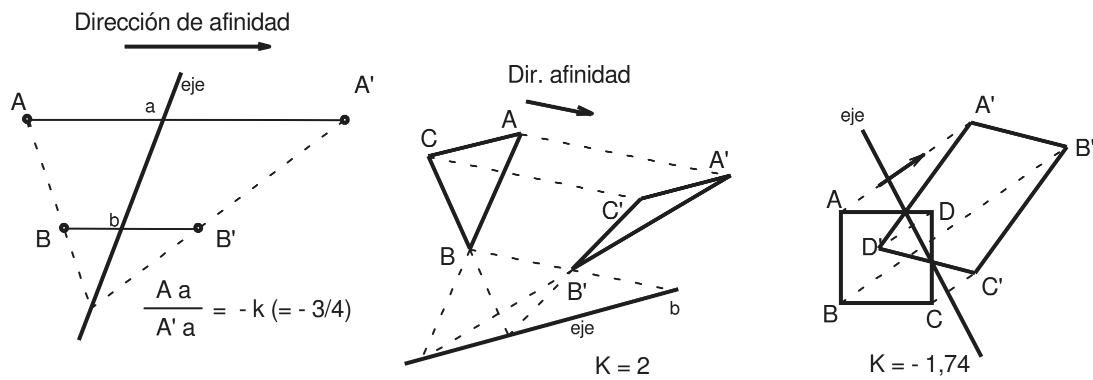


Figura 27. Afinidad. Obtención de figuras afines.

Afinidad de la circunferencia: La figura afín a una circunferencia es una elipse, la cual se obtiene aplicando la afinidad a dos diámetros perpendiculares, los cuales se transforman en un par de diámetros conjugados. En la figura 28 se muestra la forma de obtener los ejes de la elipse, para lo cual:

- Se une el centro y su afín.
- Se traza la mediatriz, que corta al eje de afinidad en C.
- Se traza la circunferencia de centro C y radio C-O, que corta al eje en dos puntos A, B, que unidos a C, son las líneas en las que están los diámetros, cuyos afines son los ejes de la elipse, ya que conservan la perpendicularidad.

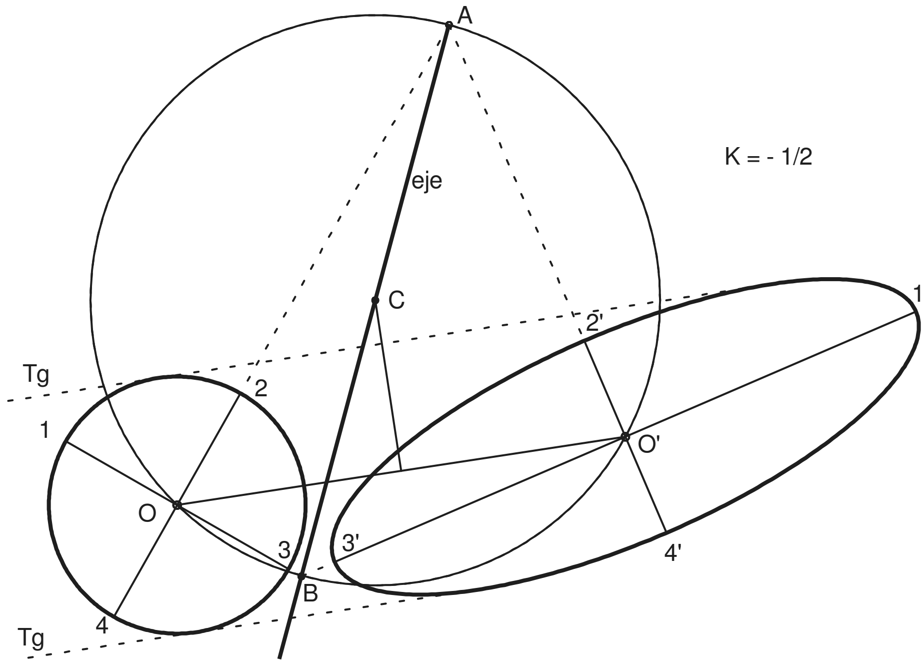


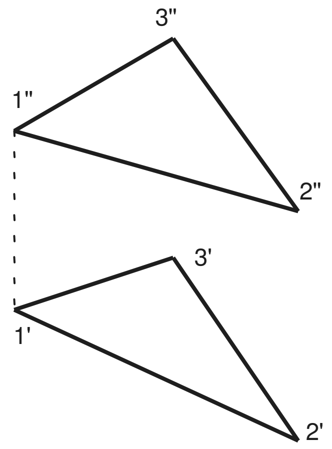
Figura 28. Afinidad de la circunferencia.

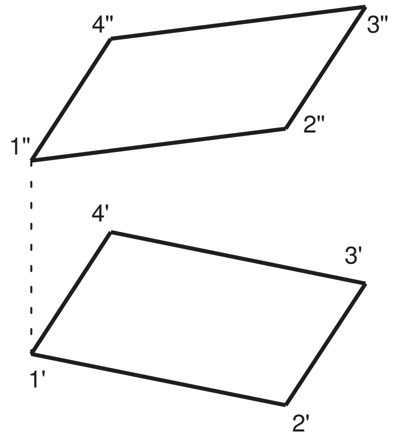
Abatimiento – Afinidad.

El abatimiento es una afinidad en la que: el punto proyectado y su abatido son dos puntos afines, la charnela es el eje de afinidad, siendo la dirección de afinidad, perpendicular al eje. Esto facilita la obtención del abatimiento de figuras poligonales, circunferencias y otras.

Ejercicio 1: ¿Cuál es la superficie del triángulo ABC? (Abátase sobre el vertical).

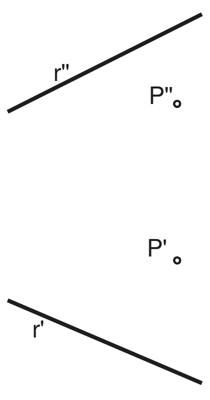
Ejercicio 2: Obténgase la verdadera magnitud del paralelogramo ABCD.

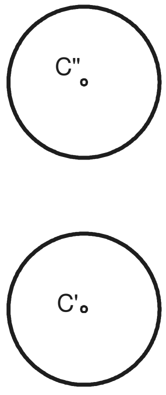




Ejercicio 3: Representar las proyecciones de un hexágono regular de lado 1,5 cm., centro en P y situado en el plano α(m,P).

Ejercicio 4: Dibujar la V.M. de la elipse de centro C.





Soluciones de los ejercicios anteriores.