Tema 6: Curvas y superficies. Superficies de revolución. Esfera. Poliedros.

Concepto de curva alabeada. Generación.

Curva albeada: es una curva tridimensional. Se genera mediante el movimiento de un punto que sigue cualquier ley o ecuación en su movimiento, la cual constituye una función continua en un cierto intervalo. Se llama orden de una curva al número de puntos que pueden ser cortados por una recta.

Elementos geométricos de una curva (figura 1):

Secante: es una línea recta que corta a la curva en dos puntos (1 y 3).

Tangente: Cuando los dos puntos de corte de una secante están infinitamente próximos (como el 1 y 2), es una tangente. Un punto de tangencia se denomina punto doble. Hay una tangente en cada punto de la curva. Si la tangente se obtiene por traslación del punto 3 hacia el punto límite 2, de la secante 1-3, se denomina tangente de 1ª especie. Si se obtiene por traslación de la secante 4-3, paralela a la tangente, es de 2ª especie.

Punto de inflexión: El punto de tangencia 5, en el que la tangente pasa de un lado al otro de la curva, se denomina “punto de inflexión”. En este caso, la tangente tiene dos elementos infinitesimales comunes con la curva, es un punto triple (o múltiple).

Normal: es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Son infinitas y constituyen un plano, el “plano normal”.

Plano osculador: es el plano que contiene a la tangente y a un punto de la curva infinitamente próximo a ella. Podría decirse que es el plano que contiene a la tangente y a la curva en un entorno infinitamente pequeño al punto de tangencia. Si la curva es plana, el plano que la contiene es el plano osculador. Si la curva en ese entorno al punto de tangencia es recta, es decir, sin curvatura, no hay plano osculador definido. La intersección del plano normal y el osculador es la “normal principal”, que tiene la dirección del radio de curvatura.

Triedro intrínseco a una curva albeada: Es un triedro trirrectángulo cuyos ejes son, la tangente, la normal principal, y la binormal, y los planos son, el plano normal, el osculador y el rectificante (figura 1). A cada punto de la curva le corresponde un triedro.

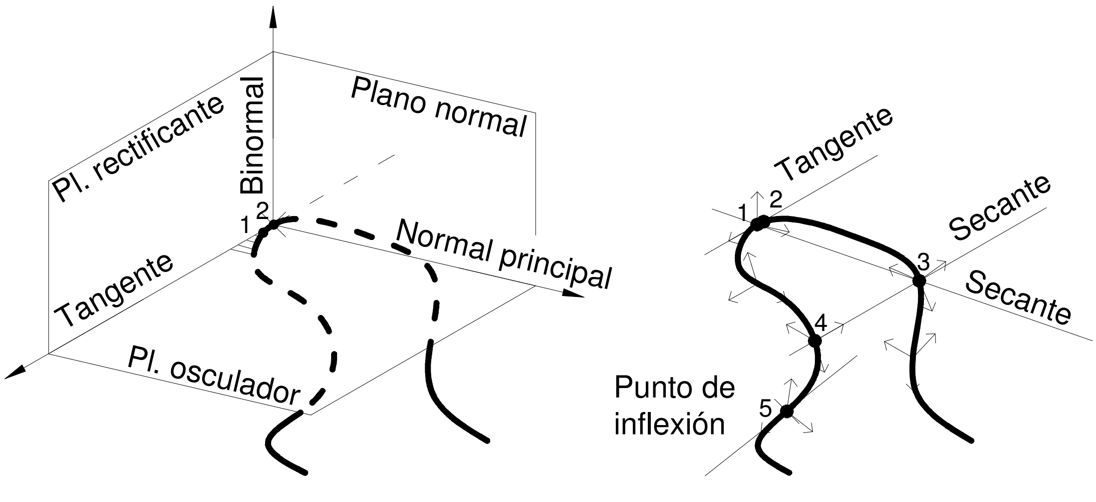


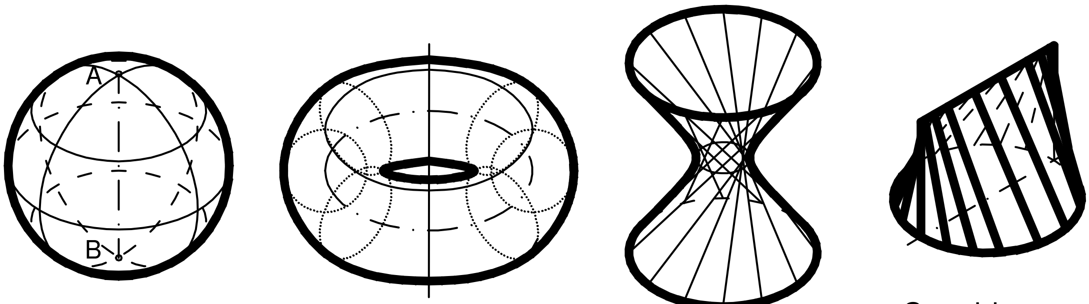
Figura 1. Triedro intrínseco a una curva albeada.

Concepto de superficie. Generación.

Se pueden generar de diversas formas. Con carácter general, una línea que se mueve siguiendo cualquier ley en su movimiento, la cual a su vez, puede variar de forma en su desplazamiento, genera una superficie, la cual está constituida por funciones continuas en determinado dominio. La línea recibe el nombre de generatriz.

La superficie como lugar geométrico: Si una línea se desplaza siguiendo determinadas condiciones geométricas, se puede definir como un lugar geométrico. Por ejemplo: una esfera es el LG de las circunferencias que tienen por diámetro un segmento AB. Un hiperboloide de revolución es el LG de una recta que gira alrededor de un eje (figura 2).

La superficie como envolvente: Por ejemplo el toro es la envolvente de la esfera que gira alrededor de un eje exterior a ella (figura 2).



Esfera | Toro | Hiperboloide reglado de revolución | Conoide reglado de plano director (circular recto)

Figura 2: Superficies.

Elementos geométricos de una superficie:

Tangente: es una línea que es tangente a una curva de la superficie que pase por dicho punto. Hay infinitas tangentes a la superficie por un punto y constituyen un plano tangente a la superficie por dicho punto.

Normal: Es una recta perpendicular al plano tangente por el punto de tangencia. Sólo hay una normal en cada punto de la superficie (figura 3).

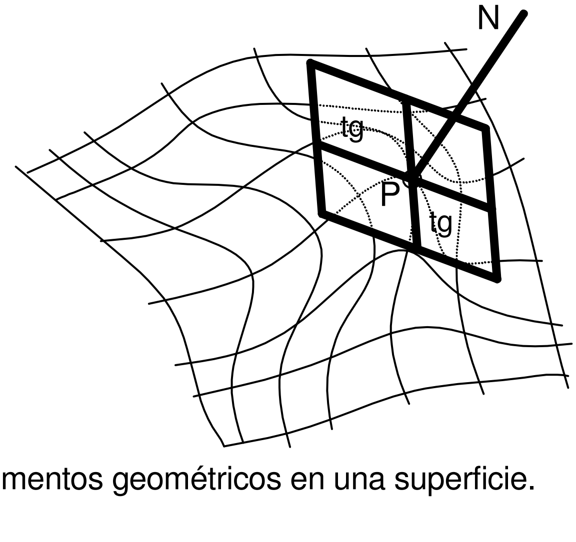


Figura 3: Elementos geométricos en una superficie.

Clasificación de superficies.

Una clasificación de superficies, atendiendo a la forma de su generatriz y a su generación, es:

<table>
<tr><td rowspan="7">Regladas
(Generadas
por rectas)</td><td rowspan="5">Desarrollables</td><td colspan="3">Plano</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Radiadas
(T 7)</td><td>Vértice propio
-Cónicas-</td><td>Pirámide
Cono</td></tr>
<tr><td>Vértice impropio
-Cilíndricas-</td><td>Prisma
Cilindro</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Poliédricas</td><td>Regulares (T 6)</td><td>Tetraedro
Hexaedro
Octaedro
Dodecaedro
Icosaedro</td></tr>
<tr><td colspan="2">Irregulares</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Alabeadas
(no desarrollables)</td><td>Revolución</td><td colspan="2">Hiperboloide de revolución
…</td></tr>
<tr><td>Otras</td><td colspan="2">Conoide
Paraboloide hiperbólico,…</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Curvas</td><td rowspan="2">No desarrollables</td><td>Revolución</td><td colspan="2">Esfera (T 6)
Toro
Escocia, …</td></tr>
<tr><td>Otras</td><td colspan="2">Elipsoide, …</td></tr>
<tr><td colspan="3">Otras</td><td colspan="2">Topográficas, …</td></tr>
</table>

Superficies regladas: están generadas por el movimiento de una recta **generatriz**. Pueden ser desarrollables y alabeadas.

Condiciones para que una superficie reglada sea desarrollable:
- Dos generatrices infinitamente próximas, se cortan (forman plano).
- El plano tangente a la superficie en un punto, es también tangente a ella a lo largo de toda la generatriz que pasa por dicho punto y a la cual contiene.

Las superficies poliédricas son superficies formadas por caras planas.

Poliedros regulares: Un poliedro es regular cuando todas sus caras son polígonos regulares iguales y forman el mismo ángulo entre sí. Para ello el ángulo de las caras que concurren en un vértice debe ser menor de 360º. Los poliedros siguen la fórmula de Euler: **Caras + Vértices = Aristas + 2.**

Superficies de revolución.

Son superficies generadas por una línea, denominada **generatriz o meridiano** que gira alrededor de un eje de revolución. Cada punto de la curva genera en su giro circunferencias **directrices o paralelos**. Las generatrices son todas iguales, y las directrices son circunferencias con distinto radio (figura 3).

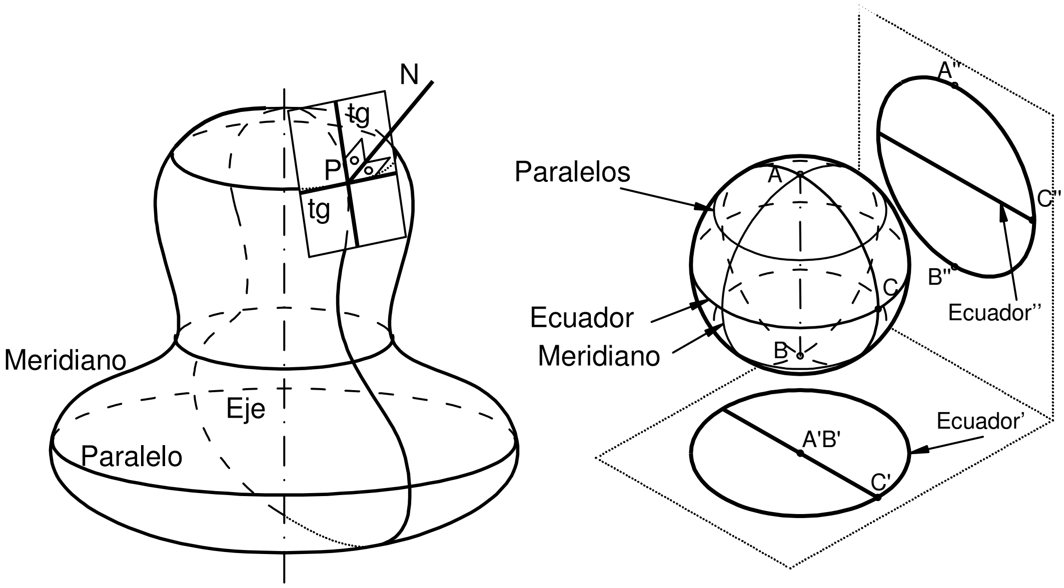


Figura 3: Superficies de revolución. Representación de la esfera.

Esfera. Representación.

La esfera se representa mediante las circunferencias correspondientes al contorno aparente en la proyección, por lo que el ecuador se proyecta sobre el horizontal según un círculo y en el vertical se proyecta el meridiano ABC según otro círculo. Ambos se proyectan en la otra vista según un diámetro (figura 3).

Situación de un punto en la esfera.

Un punto está en una esfera, si se encuentra en una circunferencia de ella. Dicha circunferencia puede resultar de la intersección de la esfera con un plano paralelo al horizontal o al vertical, con lo que se proyecta en uno de ellos como una circunferencia y en el otro según una línea (figura 4) En general, la proyección de un punto en una vista corresponde a dos de la esfera.

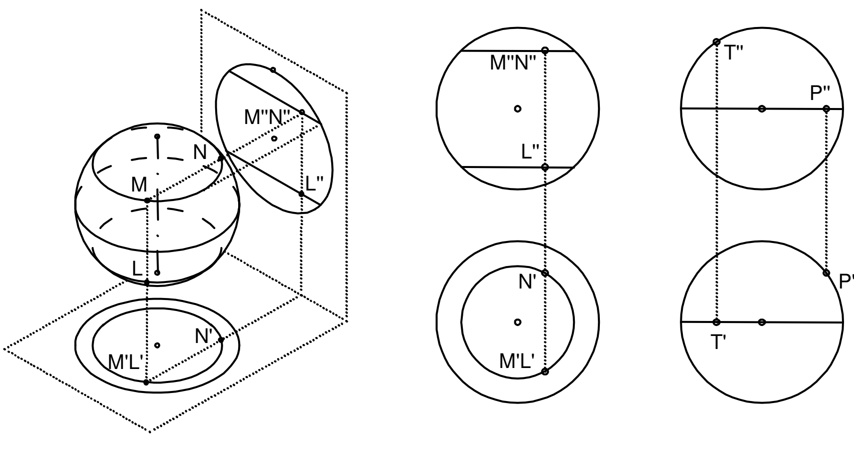


Figura 4. Representación de un punto de la esfera.

Planos tangentes.

Por un punto de la esfera: el plano α(h,v), definido por dos rectas que sean tangentes a dos circunferencias de la esfera que pasen por un punto, es tangente a la esfera (figura 5). La solución es única.

Desde un punto exterior: Para ello, el plano debe ser tangente a un cono de vértice el punto P y que es tangente a la esfera. Este cono se obtiene mediante un cambio de plano, siendo la base del cono la intersección de π_2 con la esfera (figura 5). Hay infinitas soluciones, según el punto T de la base del cono que se tome. El plano queda definido por la generatriz g(TP) y otra recta t, tangente a la esfera por T.

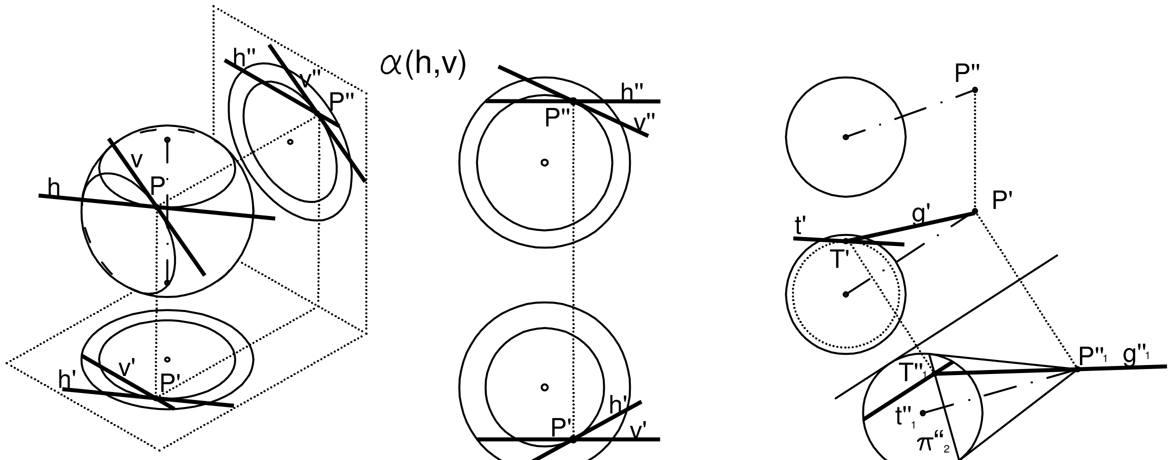


Figura 5: Plano tangente a la esfera desde P, en la superficie y exterior a la esfera.

Secciones planas.

Toda sección plana de una esfera es una circunferencia.

a) plano paralelo a los de proyección: Véanse las figuras 3, 4 y 5.

b) plano proyectante: (figura 6) En la intersección con plano proyectante, la circunferencia sección con la esfera se proyecta en la otra vista según una elipse, en la cual:
- El diámetro de la sección es la magnitud 1-2, de la vista en que es proyectante.
- El eje mayor 3-4 tiene la medida del diámetro (1-2 en la otra vista, proyectante).
- Los extremos 1-2 quedan sobre el diámetro de la esfera.
- Otros dos puntos importantes, que pueden estar o no, son el 5-6, que corresponden al contorno aparente de la esfera y que señalan el límite de la parte vista y oculta de la sección.

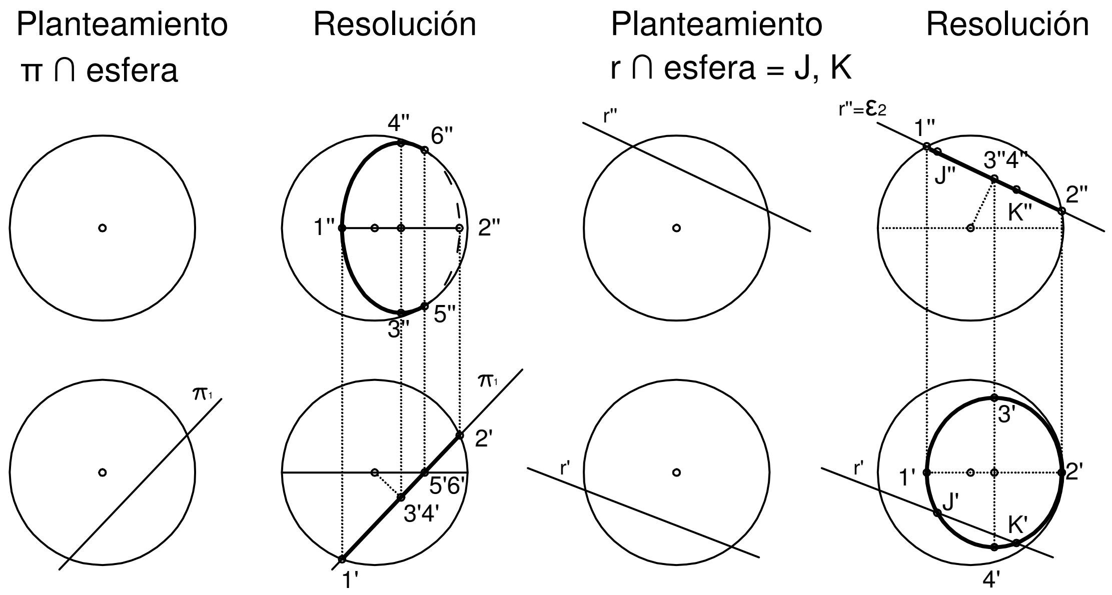


Figura 6: Plano proyectante ∩ esfera. Recta ∩ esfera.

Intersección recta con esfera: (figura 6) Se resuelve trazando
- un plano ε proyectante, que contenga a la recta.
- se obtiene ε ∩ esfera.
- se obtienen las intersecciones de la recta con la circunferencia anterior.

c) plano cualquiera: Se resuelve mediante un cambio de plano, en el que se sitúa éste como proyectante. A continuación se resuelve como en el caso anterior (figura 7). Los puntos 5,6 y 7,8 delimitan la parte vista y oculta en cada vista.

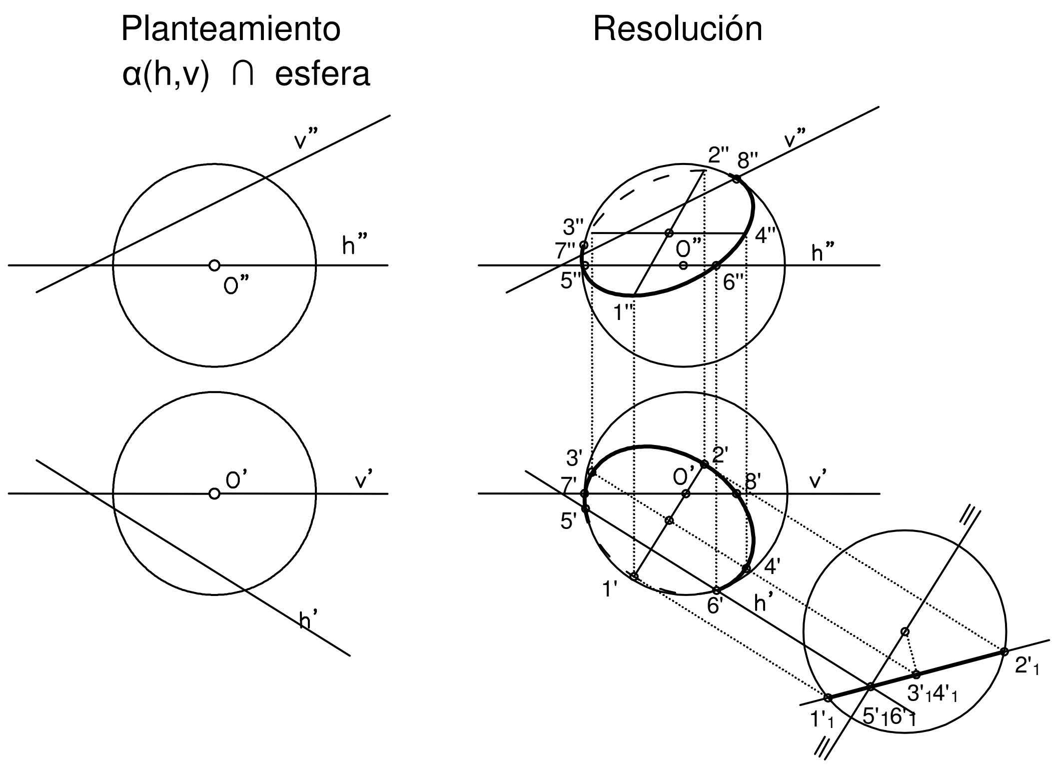


Figura 7: Obtención de α(h,v) ∩ esfera.

Poliedros. Concepto y clasificación. Poliedros regulares.

Las superficies poliédricas son superficies formadas por caras planas. Pueden ser regulares o irregulares.

Poliedros regulares (figura 8): Un poliedro es regular cuando todas sus caras son polígonos regulares iguales y forman el mismo ángulo entre sí. Para ello el ángulo de las caras que concurren en un vértice debe ser menor de 360º. Los poliedros siguen la fórmula de Euler: **Caras + Vértices = Aristas + 2.** También se les puede inscribir y circunscribir una esfera cuyo centro es el del poliedro (figuras 9 y siguientes).

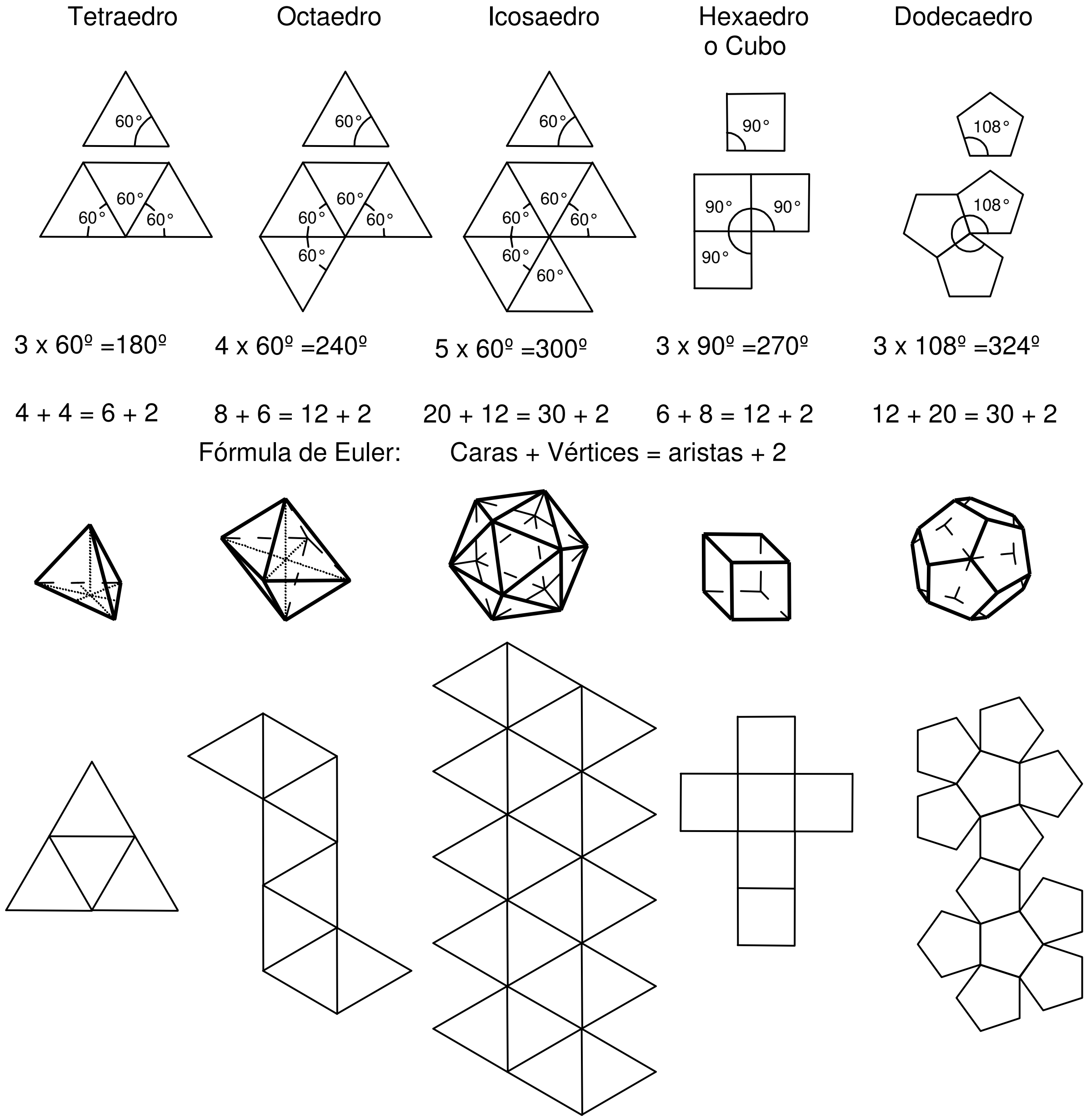


Figura 8: Propiedades básicas de los poliedros regulares.

Además de poderse inscribir y circunscribir por una esfera, uniendo los puntos medios de las caras de cada uno de ellos resulta otro poliedro regular (figura 9), en el tetraedro se obtiene otro tetraedro, en el cubo se obtiene un octaedro y viceversa y en el dodecaedro se obtiene el icosaedro. Se observa que la esfera circunscrita del tetraedro es inscrita al tetraedro circunscrito. La circunscrita del octaedro es inscrita del cubo y viceversa.

La relación entre el lado del tetraedro, octaedro y cubo inscrito y circunscrito es de 3.

El lado del cubo y la diagonal del octaedro inscrito son iguales.

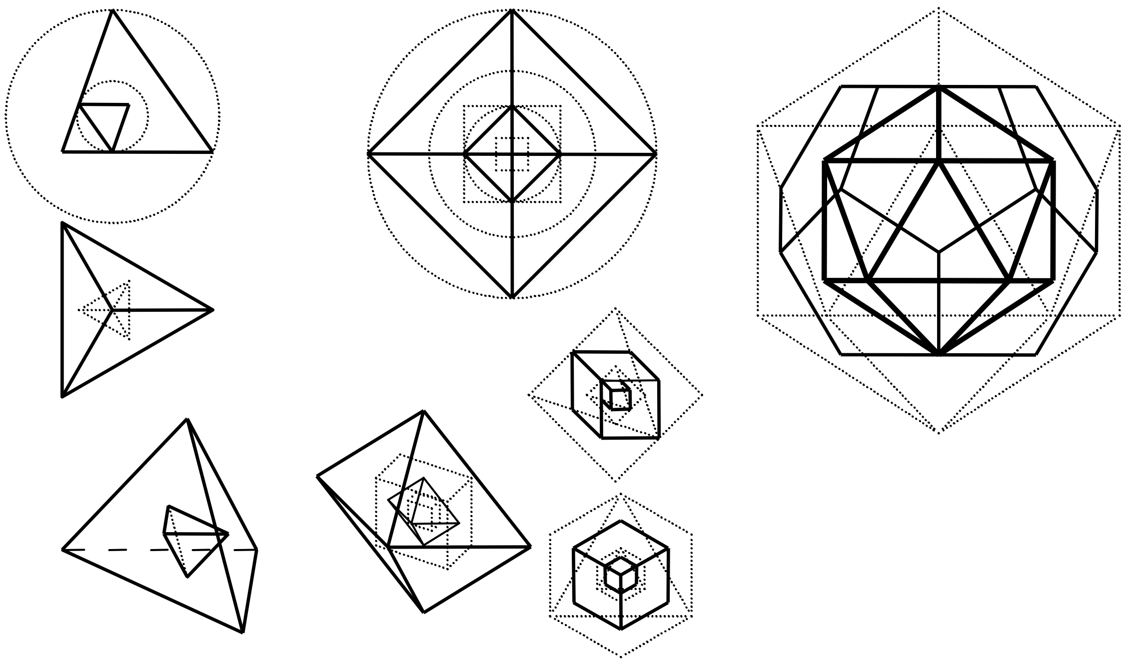


Figura 9: Poliedros regulares inscritos y circunscritos (duales).

El tetraedro. **Proyecciones, secciones notables.**

Está formado por cuatro caras, que son triángulos equiláteros. La perpendicular por un vértice a la cara opuesta pasa por su centro. Dos magnitudes importantes son: su altura y la distancia entre dos lados no contiguos (figura 10). Los siguientes ejercicios muestran las propiedades geométricas básicas del tetraedro.

Ejercicio 1º. Representar un tetraedro de lado l, con una cara horizontal y uno de sus lados forma 45º con el vertical (figura 10).

Ejercicio 2º. Representar un tetraedro de lado l, con dos aristas no contiguas paralelas al horizontal, formando una de ellas 60º con el vertical. Obténgase la sección por un plano horizontal equidistante de los lados paralelos.

Mediante las construcciones auxiliares que se muestran en la figura 10, se resuelven ambos ejercicios. Es interesante considerar la sección principal 2,4,5, que es similar a la vista obtenida en el siguiente ejercicio, a partir de la cual se obtienen la altura h y la distancia entre aristas d. En el ej. 2 se observa que la sección resultante es un cuadrado, hay tres posibles secciones que dan este resultado.

Ejercicio 3º. Sabiendo que el cuadrado dibujado ABCD paralelo al horizontal es la intersección cuadrada de un tetraedro, representarlo completo (figura 10).

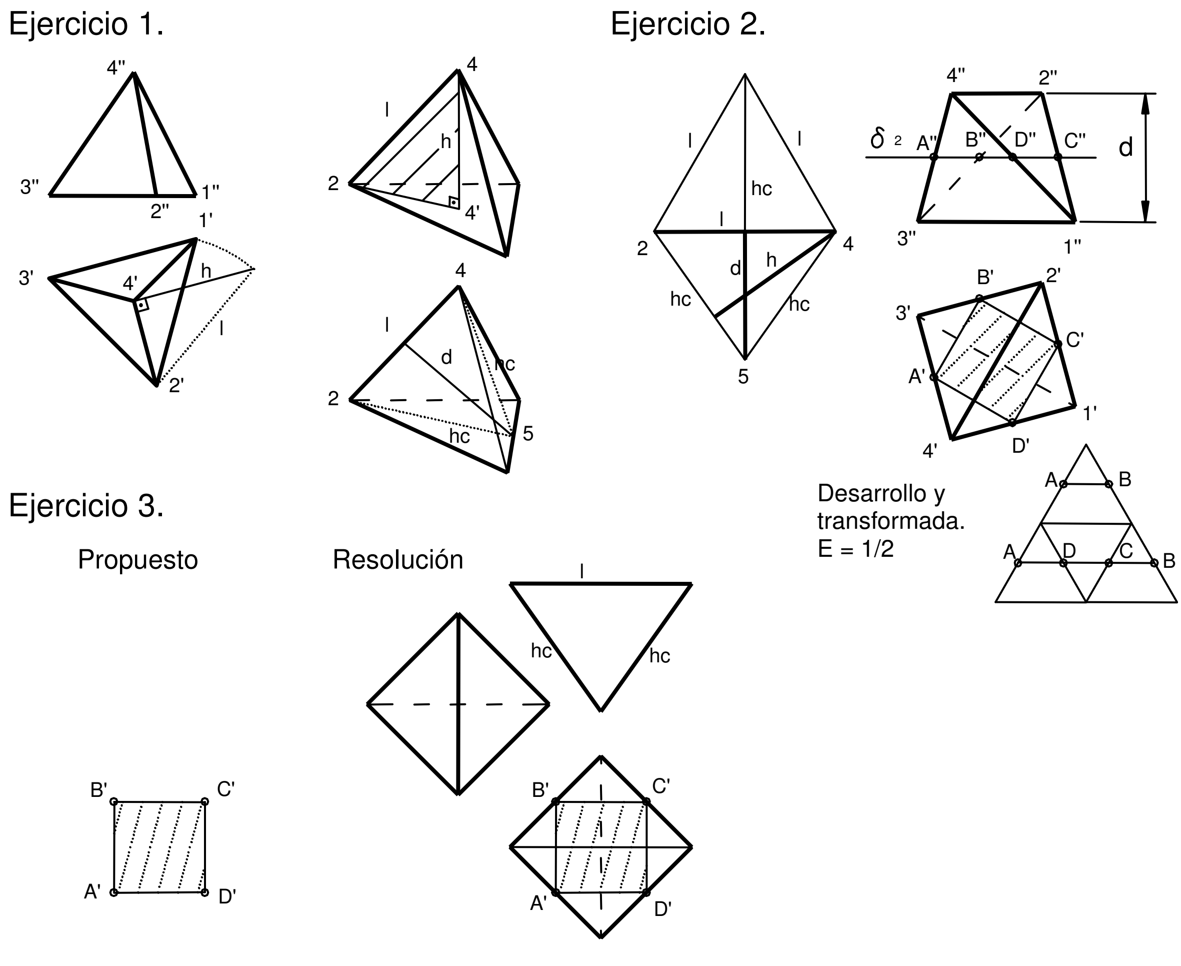


Figura 10: El tetraedro.

El cubo. Proyecciones, secciones notables.

Está formado por seis caras, que son cuadrados que forman 90º entre sí. La sección principal (figura 11) es un rectángulo de lados, el del cubo y el de la diagonal de la cara. Las diagonales del rectángulo son las del cubo. El cubo tiene cuatro diagonales. Otras secciones notables son las producidas por planos perpendiculares a la diagonal del cubo, que pasan por tres vértices (S1 y S2 que son triángulos de lado la diagonal de la cara d=l√2) y la que pasa por los puntos medios de los lados S3, que es un hexágono de lado d/2.

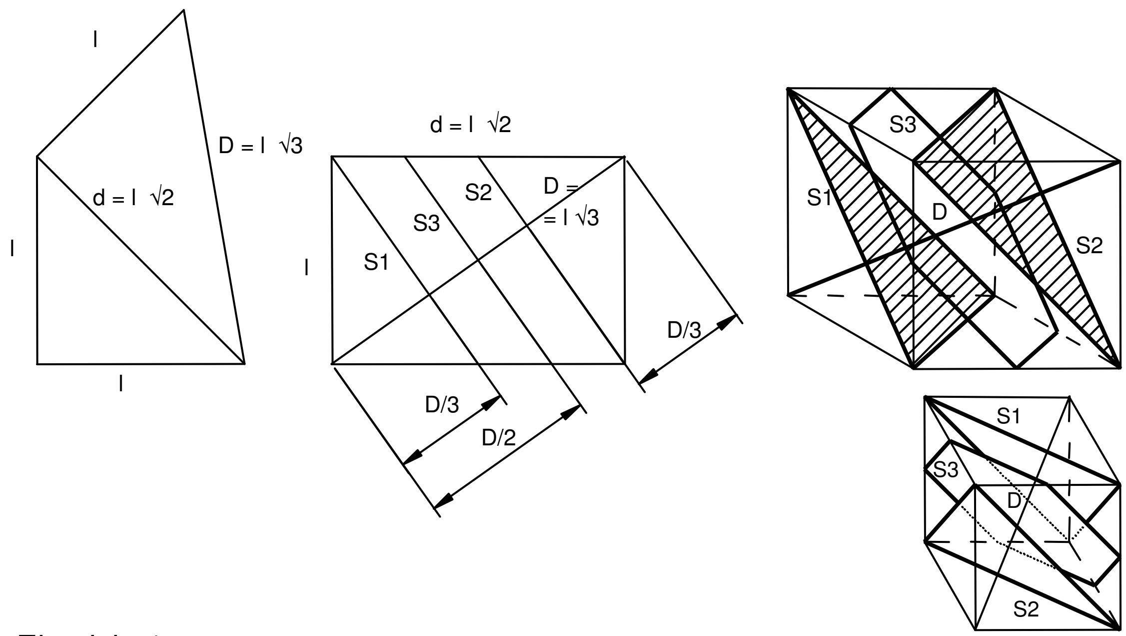
Ejercicio 1º. Dibújese un cubo de lado l, apoyado en el horizontal, que forma con el vertical 30º (figura 11).

Ejercicio 2º. Representar un cubo de modo que una de sus diagonales D, sea perpendicular al horizontal (figura 11).

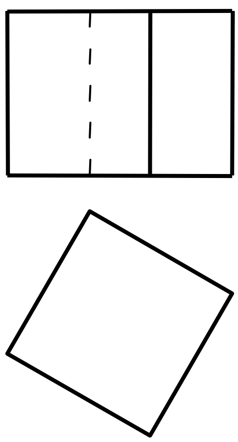
Ejercicio 3º Represéntese un cubo de lado l, apoyado sobre un lado, en el que dos diagonales de las caras sean paralelas al horizontal y formen 30º con el vertical (figura 12).

Ejercicio 4º. Representar un cubo de lado l, apoyado sobre un lado que forma 60º con el vertical, y una de sus caras está inclinada 60º (figura 12).

Para resolver este caso, nos ayudamos de una vista auxiliar.



Ejercicio 1.



Ejercicio 2.

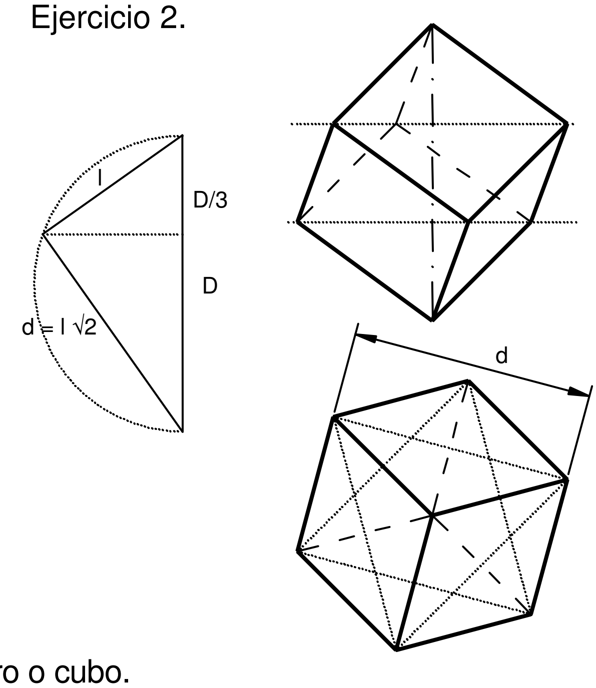
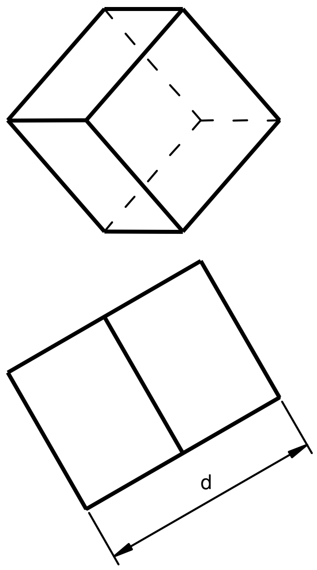


Figura 11: El hexaedro o cubo.

Ejercicio 3.



Ejercicio 4.

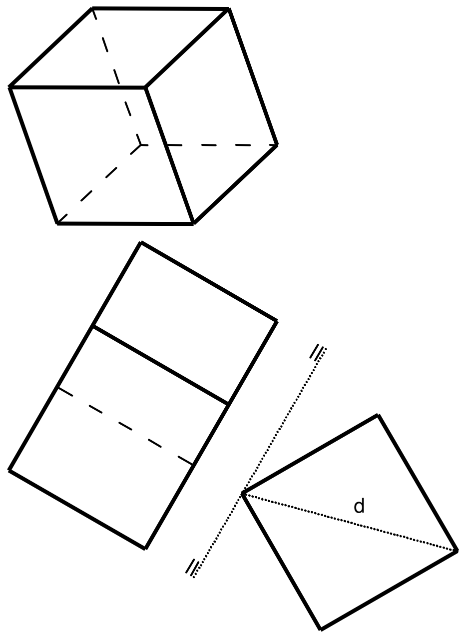


Figura 12: El hexaedro o cubo.

El octaedro. Proyecciones, secciones notables.

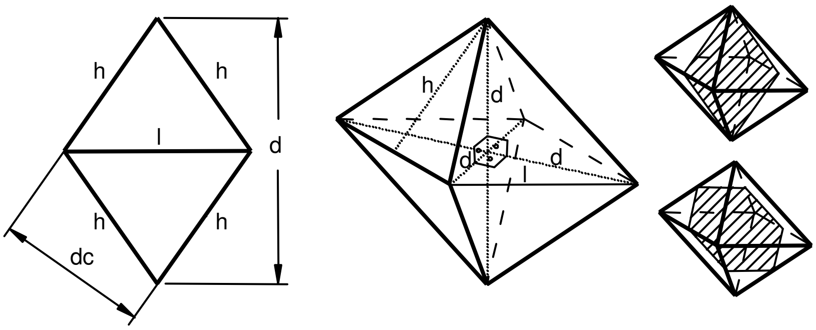
El octaedro es un poliedro regular formado por 8 caras que son triángulos equiláteros iguales. Geométricamente es relevante conocer que la diagonal es D=l√2. Que hay tres diagonales iguales que forman entre sí 90º. Las caras son paralelas dos a dos y la distancia entre ellas se obtiene bien de la sección principal, bien por abatimiento (figura 13)

Ejercicio 1. Represéntese un octaedro con una diagonal perpendicular al horizontal y otra que forme 30º con el vertical, de lado l.

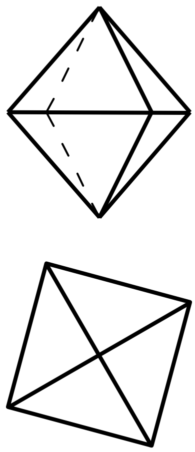
Ejercicio 2. Obténgase el octaedro de lado l con una cara apoyada en el horizontal. ¿Cuál es la sección producida por un plano paralelo al horizontal por la mitad del octaedro, su desarrollo y transformada?

Ejercicio 3. Conocida la diagonal d del octaedro, represéntese.

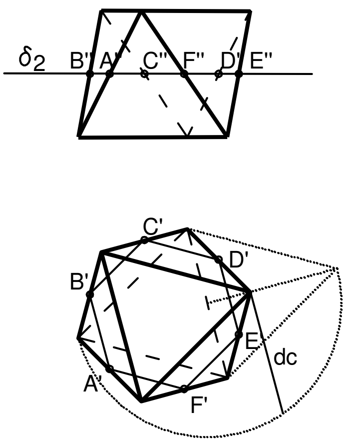
Este caso se resuelve mediante un cambio de plano, en el que la diagonal AB queda en verdadera magnitud, y se representa el octaedro con la sección principal paralela al horizontal.



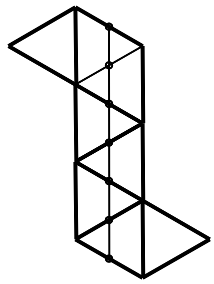
Ejercicio 1.



Ejercicio 2.

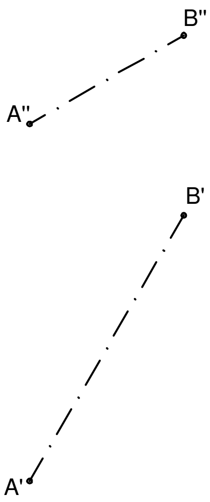


Desarrollo y
transformada.
E = 1/2



Ejercicio 3.

Propuesto



Resolución

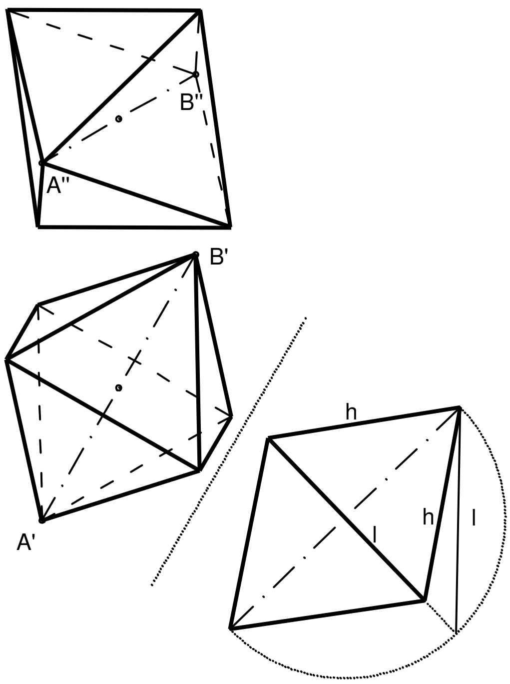
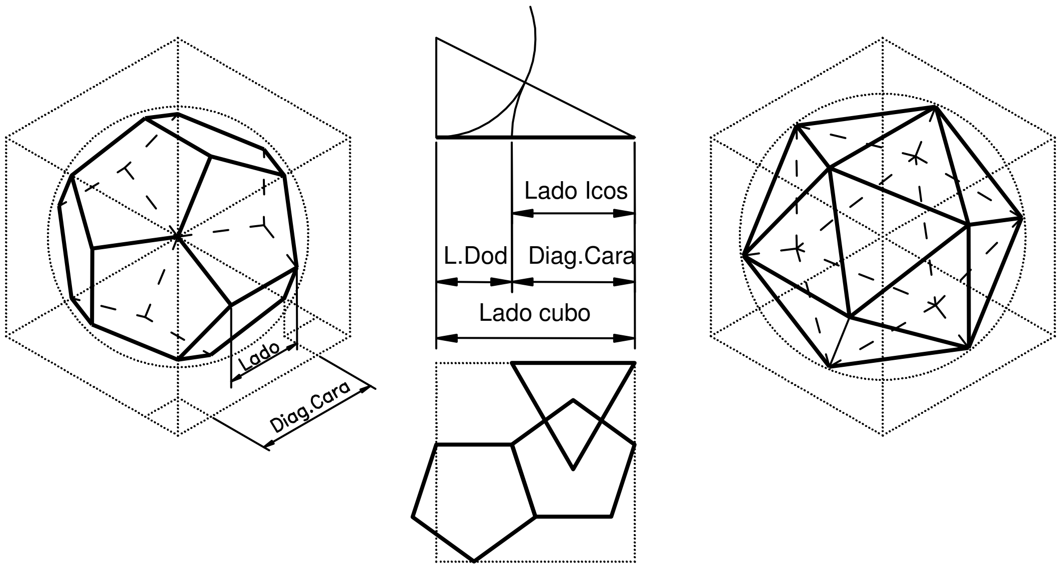


Figura 13: El octaedro.

Dodecaedro e icosaedro. Proyecciones.

El dodecaedro es un poliedro regular formado por 12 caras, que son pentágonos regulares y el icosaedro está formado por 20 caras, que son triángulos equiláteros. En la figura 14, se muestra cómo construir ambas figuras inscritas en un cubo, en isométrica, así como la relación áurea que hay entre los lados del cubo y el lado del icosaedro y la diagonal del pentágono, y la de éste con el lado del dodecaedro. Las figuras 15 y 16 muestran la representación de los poliedros apoyados sobre un vértice, una arista y una cara relacionados entre sí mediante cambios de plano de proyección, así como la obtención de diversas magnitudes geométricas aplicando el abatimiento.



Relación aúrea entre:
- el lado del dodecaedro, la diagonal de la cara y el lado del cubo circunscrito.
- el lado del icosaedro, y el lado del cubo circunscrito.

Figura 14. Representación isométrica del dodecaedro e icosaedro.

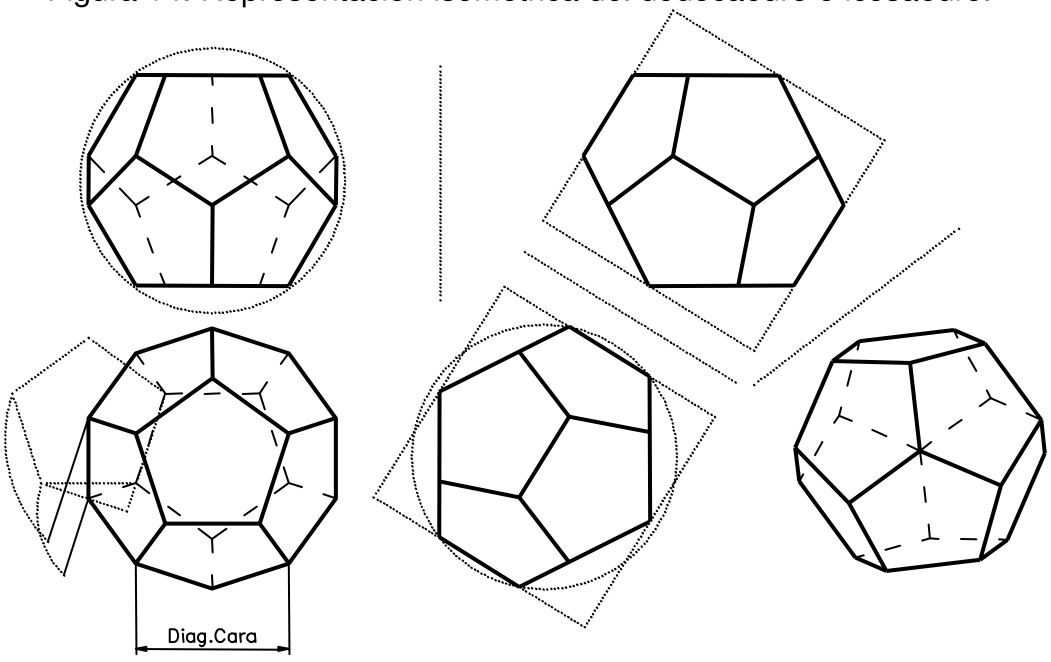


Figura 15. El dodecaedro.

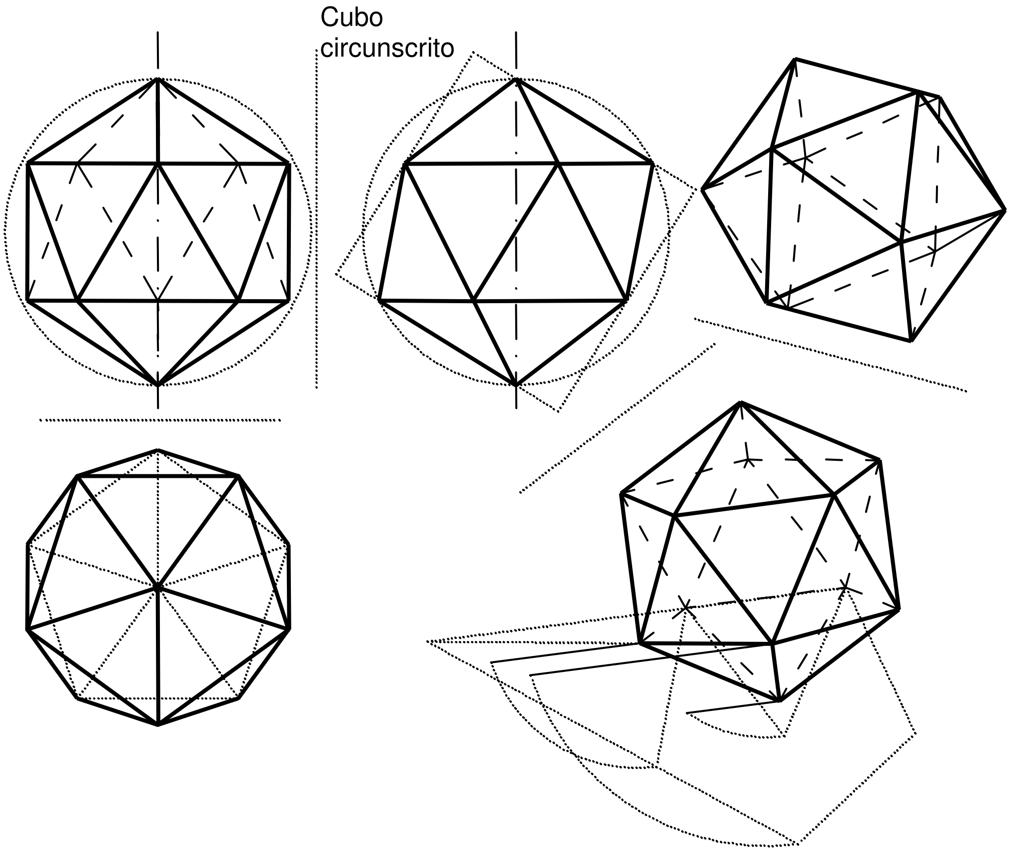


Figura 16. El icosaedro.