2. CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

Campos escalares.

Una función escalar ϕ que toma valores en los puntos del espacio se dice que es una función escalar de punto, o más simplemente, un **campo escalar**.
A cada punto P de coordenadas (x, y, z) la función ϕ le hace corresponder un número $\phi(x, y, z)$, lo cual también suele expresarse como $\phi(P)$ o $\phi(\vec{r})$ donde $\vec{r}$ es el vector de posición de dicho punto. Aunque no es necesario que esta función ϕ esté expresada en función de las coordenadas cartesianas, será lo más habitual.

El conjunto de todos los puntos del espacio donde el campo escalar toma un determinado valor ϕ_0 forman una **superficie equiescalar**, cuya ecuación será:

$$\phi(x, y, z) = \phi_0 \qquad (29)$$

Las superficies equiescalares pueden representar puntos que tienen la misma temperatura (isotermas), el mismo potencial eléctrico (equipotenciales) o cualquier otra magnitud escalar.

Si el campo está definido en un plano las equiescalares serán líneas en vez de superficies. Un ejemplo lo tenemos en las curvas de nivel de un mapa topográfico. En este caso, la función es la altura H de cada punto P del plano de coordenadas (x, y): $H(x, y)$. Los puntos que tienen la misma altura (H_1, por ejemplo) forman una línea equiescalar de ecuación $H(x, y) = H_1$. Proyectando determinadas líneas o curvas de nivel sobre el plano resulta el mapa topográfico (figura 23).

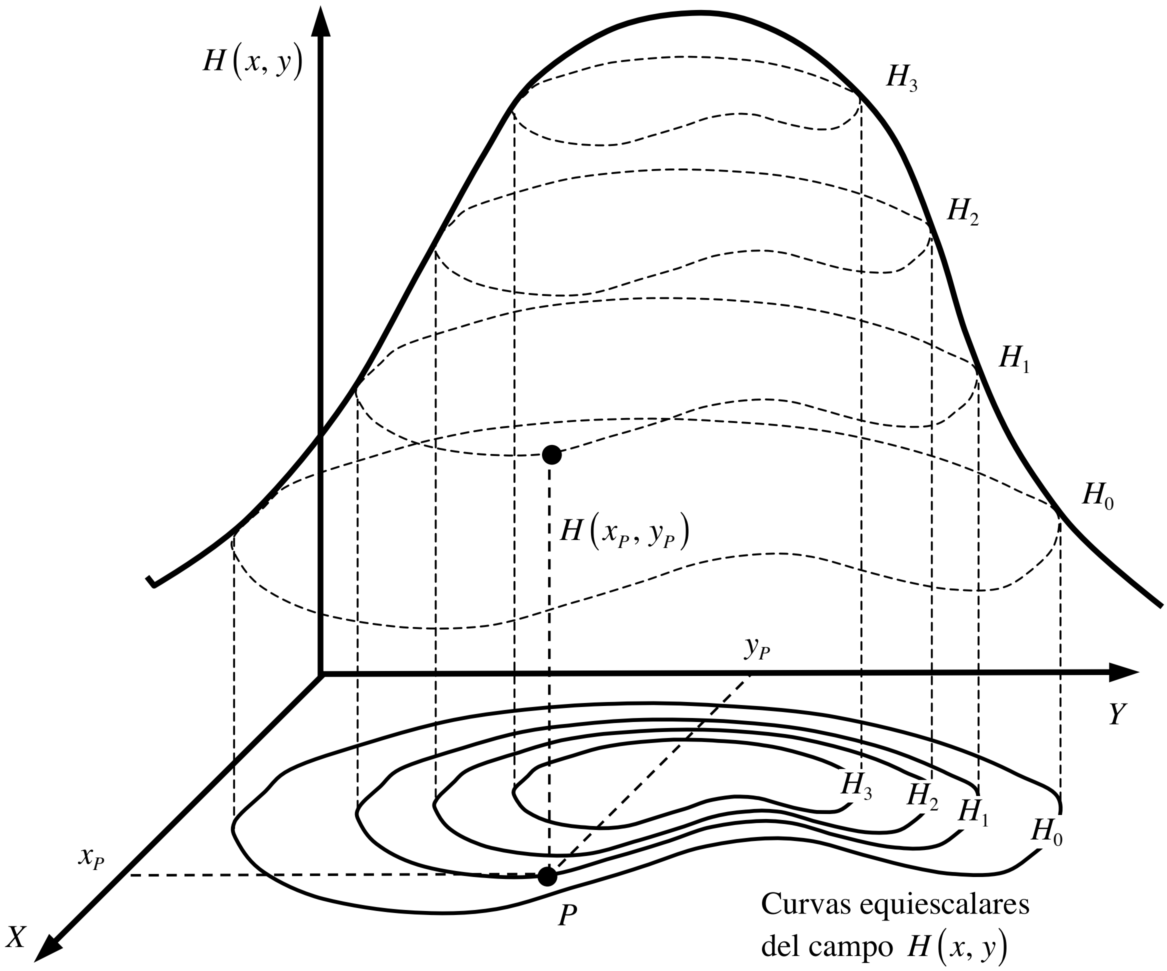

Fig. 23: Representación mediante curvas equiescalares del campo escalar $H(x, y)$.

En las funciones de una sola variable, $y = f(x)$, la derivada se define como el limite al que tiende el cociente de incrementos $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$.

Pero un campo escalar $\phi(x, y, z)$ tendrá distintas derivadas ya que, en general, el incremento de la función no será el mismo cuando se incremente una u otra variable. Así, definimos el incremento según el eje X como: $\Delta\phi|_x = \phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)$

Y la **derivada parcial** de ϕ respecto a la variable x , para la cual se usa la notación $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$,

será el límite:
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\phi|_x}{\Delta x} = \left.\frac{d\phi}{dx}\right]_{y,z=cte.} \qquad (30)$$

Es decir, se trata de la derivada que resulta de suponer que las coordenadas *y*, *z* permanecen constantes y solamente varía la *x*. De manera análoga se definen las derivadas parciales respecto de las otras variables:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\phi|_y}{\Delta y} = \left.\frac{d\phi}{dy}\right]_{x,z=cte.} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\phi|_z}{\Delta z} = \left.\frac{d\phi}{dz}\right]_{x,y=cte.} \qquad (31)$$

Los incrementos $\Delta\phi|_y$ y $\Delta\phi|_z$ son los que tienen lugar según el eje *Y* (*x*, *z* constantes) y según el eje *Z* (*x*, *y* constantes), respectivamente.

Las reglas para la derivación parcial son las mismas que rigen en las funciones de una variable. Simplemente, hay que considerar la variable respecto a la cual se deriva y tratar como constantes las otras.

El vector gradiente.

Supongamos que interesa saber cómo varía el campo ϕ al pasar de un punto *P* de vector de posición $\vec{r} = (x, y, z)$ a otro muy próximo, mediante un desplazamiento diferencial cualquiera $d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ (fig. 24). Dicho cambio se puede calcular como suma de los cambios que se producen en los desplazamientos *dx*, *dy*, *dz* en que se puede descomponer $d\vec{r}$ según los ejes cartesianos: $d\phi = d\phi|_x + d\phi|_y + d\phi|_z$.

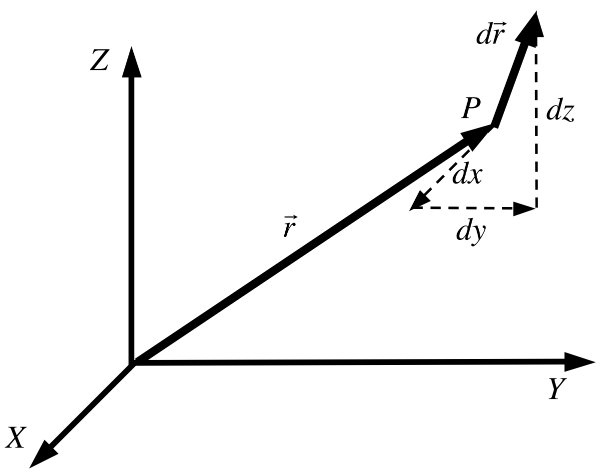

Fig. 24: Desplazamiento infinitesimal con origen en el punto *P*.

De la definición de derivada parcial se deduce que $d\phi|_x = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx$, $d\phi|_y = \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy$, $d\phi|_z = \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dz$, por tanto:

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dz \qquad (32)$$

Definiremos el gradiente de ϕ (escrito grad ϕ o $\vec{\nabla}\phi$) como una función vectorial que tiene por componentes cartesianas las derivadas parciales del campo escalar ϕ respecto de x, y, z:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \qquad (33)$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} d\phi &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dz = \\ &= \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right]\cdot\left[dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right] = \\ &= \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r} = \left|\vec{\nabla}\phi\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\theta \qquad (34) \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo que forma el vector gradiente $\vec{\nabla}\phi$ (evaluado en P) con el desplazamiento $d\vec{r}$.

En resumen, al desplazarnos una distancia $ds = \left|d\vec{r}\right|$ en una dirección cualquiera, el campo escalar experimenta la variación expresada por la ecuación anterior. El cambio por unidad de longitud recorrida es **la derivada direccional** de ϕ:

$$\frac{d\phi}{ds} = \left|\vec{\nabla}\phi\right|\cos\theta = \vec{\nabla}\phi\cdot\hat{u} \qquad (35)$$

Así pues, la derivada de ϕ en la dirección definida por el vector unitario $\hat{u}$ es igual a la proyección del gradiente sobre esa dirección.
Las derivadas parciales son casos particulares de este resultado, como se ve al sustituir $\hat{u}$ por los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$.

Si el desplazamiento $d\vec{r}$ se hace en la dirección y sentido del gradiente $\cos\theta = 1$, y entonces:

$$d\vec{r} \parallel \vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{ds} = \left| \vec{\nabla}\phi \right| > 0$$

Es decir, la variación del campo es máxima y positiva en la dirección y sentido del gradiente e igual a su módulo (sería una variación máxima y negativa si el desplazamiento se realizase en la dirección del gradiente pero sentido contrario). Por otra parte, si $d\vec{r}$ es perpendicular a $\vec{\nabla}\phi$, $\cos\theta = 0$ y:

$$d\vec{r} \perp \vec{\nabla}\phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{ds} = 0$$

Se deduce de aquí que el gradiente en un punto del espacio es perpendicular a la superficie (en tres dimensiones) o línea (en dos dimensiones) equiescalar que pasa por dicho punto.

Volvamos al ejemplo del mapa topográfico, donde las equiescalares son curvas de nivel que unen puntos de igual altitud. El gradiente de H en un punto P cualquiera representa en módulo y dirección la pendiente máxima del terreno y su sentido indica el sentido ascendente en dicha pendiente. Como se ve en la figura 25, esa dirección en que la altura aumenta más deprisa es perpendicular a la curva de nivel que pasa por P. El gradiente es mayor donde las líneas equiescalares están más juntas (como ocurre en P'), ya que entonces el mismo aumento de altura se produce en un espacio más pequeño. Por otra parte, el valor de la pendiente en otras direcciones se puede deducir proyectando $\vec{\nabla}H$ sobre ellas.

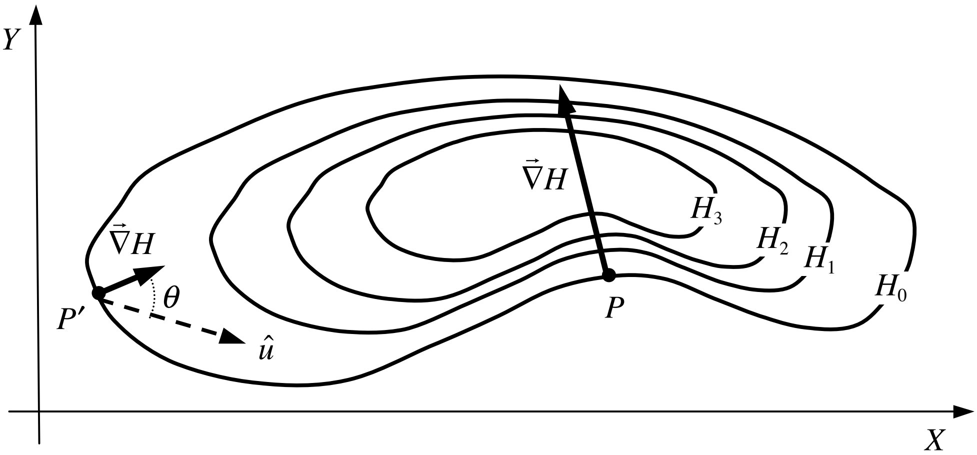

Fig. 25: La orientación del gradiente del campo escalar es siempre perpendicular a las líneas (o superficies en tres dim.) equiescalares, con sentido hacia valores crecientes y de mayor magnitud cuanto más próximas se encuentren dichas líneas equiescalares.

Campos vectoriales.

Una magnitud vectorial $\vec{V}$ que tiene un valor definido en cada punto del espacio se dice que es un **campo vectorial**. A cada punto *P* de coordenadas (x, y, z) le corresponde un vector $\vec{V}(x, y, z)$, lo cual también suele expresarse como $\vec{V}(P)$ o $\vec{V}(\vec{r})$ donde $\vec{r}$ es el vector de posición de dicho punto. Se trata, por tanto, de una función vectorial cuyas componentes dependen de las coordenadas de *P*:

$$\vec{V}(x, y, z) = V_x(x, y, z)\hat{i} + V_y(x, y, z)\hat{j} + V_z(x, y, z)\hat{k} \qquad (36)$$

Para representar un campo vectorial se suele utilizar las **líneas de campo**. Una línea de campo se construye de forma que en todos sus puntos el vector de campo sea tangente a la línea (fig. 26). Si la magnitud definida por $\vec{V}$ es una fuerza decimos que es un campo de fuerzas y que se representa mediante líneas de fuerza. Las líneas indican la dirección del campo en cada punto. La magnitud del campo está representada por el número de líneas por unidad de superficie transversal que hay en el entorno de cada punto. Así, en P_1 el campo es más intenso que en P_3 ya que las líneas están más próximas en el primer punto (fig. 26).

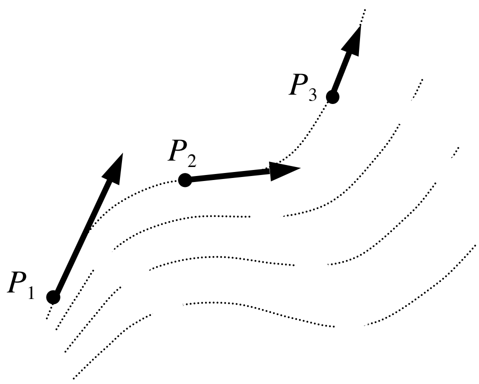

Fig. 26: Las líneas de campo son tangentes en cada punto al vector campo y su concentración informa sobre la magnitud de dicho campo.

Dos líneas de campo nunca se pueden cruzar porque en el punto de corte habría dos tangentes y entonces el campo tendría dos valores distintos. No obstante, pueden existir puntos de donde divergen las líneas de campo (fuentes) o en los que convergen (sumideros). En dichos puntos el campo no está definido; existe en ellos una singularidad (fig. 27).

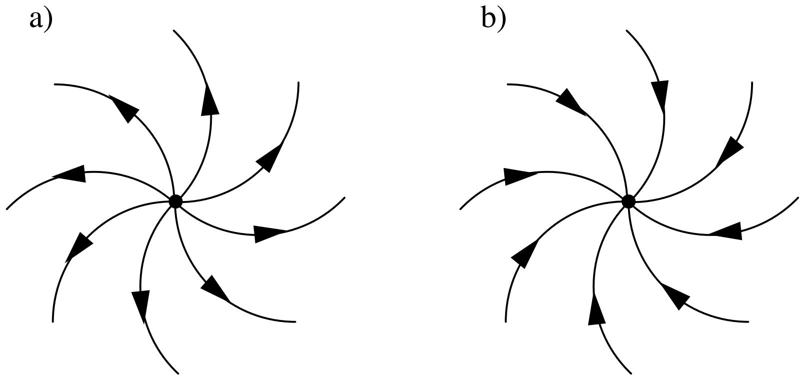

Fig. 27: a) fuente y b) sumidero alrededor de una singularidad en un campo vectorial.

Por ejemplo, si el campo vectorial es un campo eléctrico, sus fuentes son las cargas positivas y sus sumideros las cargas negativas.

Operador Nabla.

En los apartados anteriores ya hemos visto un ejemplo de campo vectorial, es el gradiente de un campo escalar, cada punto del espacio tiene su vector gradiente. La operación de calcular el gradiente de un campo escalar es una operación en la que se realizan derivadas y en las que se da al resultado un carácter vectorial transformando de esta forma un campo escalar en un campo vectorial. Es el operador $\vec{\nabla}$, denominado **operador nabla**, el que realiza dichas acciones actuando sobre el campo escalar y dando como resultado su gradiente.

Campo escalar

Campo vectorial

$$\phi(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\phi \quad = \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$$

Operador

dependen de x, y, z

Una forma de entender esta operación es interpretar el operador $\vec{\nabla}$ como si fuese un extraño vector:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\ \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\ \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\ \hat{k} \qquad (37)$$

donde las componentes no son escalares sino operadores derivada que esperan que pongamos una función para derivarla. De esta forma podemos interpretar la expresión $\vec{\nabla}\phi$ como el producto de un vector $\vec{\nabla}$ por un escalar ϕ donde el resultado, según lo que vimos al principio del tema, es un vector cuyas componentes son las componentes de $\vec{\nabla}$ multiplicadas por el escalar ϕ:

Componente x de $\vec{\nabla}\phi$ = componente x de $\vec{\nabla}$ por ϕ = $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(\phi)$ = $\frac{\partial \phi}{\partial x}$

(lo mismo para las otras componentes)

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$$

de esta forma después de escribir el resultado interpretamos que es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de ϕ.

Divergencia y rotacional de un campo vectorial.

Aparte del cálculo del gradiente otra forma de operar con el operador $\vec{\nabla}$ es hacerlo a través de un producto escalar sobre un campo vectorial $\vec{V}(x, y, z)$ lo cual se denomina calcular la divergencia de $\vec{V}$ y que se suele escribir como $\operatorname{div}\vec{V}$ o $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$. Al igual que hicimos con el gradiente podemos entender esta operación interpretando el operador $\vec{\nabla}$ como si fuese un vector y efectuando la operación de producto escalar:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(V_x) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)(V_y) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)(V_z) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (38)$$

de esta forma interpretamos que el resultado es un campo escalar formado por derivadas parciales de las componentes del campo vectorial .

Una última forma de operar con el operador $\vec{\nabla}$ es hacerlo a través de un producto vectorial sobre un campo vectorial $\vec{V}(x, y, z)$ lo cual se denomina calcular el rotacional de $\vec{V}$ y que se suele escribir como rot $\vec{V}$ o $\vec{\nabla}\times\vec{V}$. De nuevo, una forma de entender esta operación es interpretar el operador $\vec{\nabla}$ como si fuese un vector y efectuar la operación de producto vectorial:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{k} \qquad (39)$$

de esta forma después de llegar al final interpretamos que el resultado es un campo vectorial donde sus componentes son consecuencia de hacer y restar ciertas derivadas parciales.

Nota: Al operar con $\vec{\nabla}$ para calcular gradientes, divergencias o rotacionales debe tenerse cuidado en poner la función detrás del operador derivada: $\dfrac{\partial V_z}{\partial x}$, y no al revés: $V_z \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Cuando aplicábamos el operador $\vec{\nabla}$ sobre un campo escalar ϕ para calcular su gradiente éste nos informaba acerca de la dirección de la máxima variación de dicho campo a partir de un punto y de cuanto variaba dicho campo escalar al movernos una distancia desde ese punto en una cierta dirección. De la misma forma el cálculo de la divergencia o del rotacional de un campo vectorial sirve para obtener información de dicho campo. Es similar a cuando en cálculo se hacían derivadas primeras y segundas para obtener información acerca de máximos, mínimos, etc. de la función. En nuestro caso utilizamos el operador $\vec{\nabla}$ para obtener información de los campos escalares y vectoriales sobre los cuales va a actuar derivándolos en cierta forma.

El cálculo de la divergencia de un campo vectorial nos informa acerca de las fuentes o sumideros de dicho campo. Si se hace un dibujo esquemático de un campo vectorial dibujando los vectores de campo en ciertos puntos del espacio y razonamos pensando que dicho campo vectorial es un campo de velocidades de un líquido en dicha región, si en un punto la divergencia de dicho campo es positiva quiere decir que si consideramos un pequeño volumen alrededor de dicho punto tenemos un flujo neto de fluido hacia fuera de dicho volumen, es decir, de alguna forma se está originando líquido en dicho punto, es una fuente de nuestro campo vectorial. Por el contrario, si tenemos un flujo neto de fluido hacia dentro de dicho volumen se está absorbiendo líquido en dicho punto, es un sumidero de nuestro campo vectorial (fig. 28).

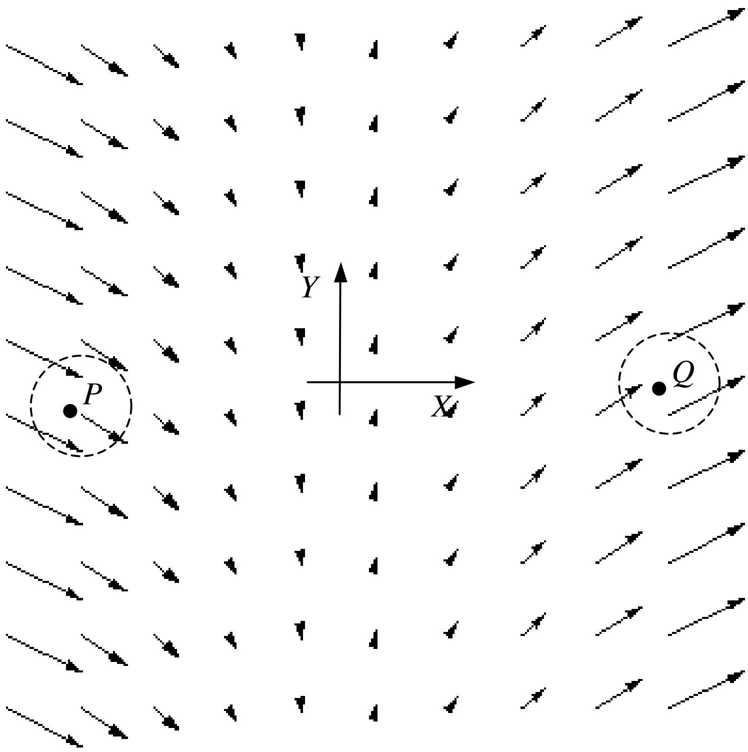

Fig. 28: Ejemplo de campo vectorial sencillo que sólo depende de x:

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2\,\hat{i} + x\,\hat{j} + 0\,\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 2x$$

Aquellos puntos como P para los que $x < 0$ tienen divergencia negativa, en un entorno a su alrededor les entra más flujo de "líquido" que el que sale, son sumideros. Aquellos puntos como Q para los que $x > 0$ tienen divergencia positiva, en un entorno a su alrededor les entra menos flujo de "líquido" que el que sale, son fuentes.

Por ejemplo, en el caso de un campo eléctrico su divergencia informa acerca del valor de la densidad de carga en cada punto del espacio. Si consideramos un campo eléctrico como el de la fig. 28 la densidad de carga en dicha región del espacio es positiva para $x > 0$ y negativa para $x < 0$, y crece en magnitud con el valor de la coordenada x.

Si pensamos en el campo vectorial como un campo de velocidades de un líquido, el valor de su rotacional en un punto del espacio nos informa acerca de la rotación que realizaría un cuerpo sumergido en el líquido al moverse conjuntamente con éste en dicho punto del espacio. Al ser el rotacional un vector, cada una de sus características nos da información acerca del movimiento de rotación. El módulo del rotacional es el doble de la velocidad angular de rotación del objeto, $\left|\vec{\nabla}\times\vec{V}\right| = 2\omega$, la dirección del rotacional indica el eje de rotación, y el sentido del rotacional indica el sentido de rotación alrededor de dicho eje según la regla de la mano derecha (fig. 29).

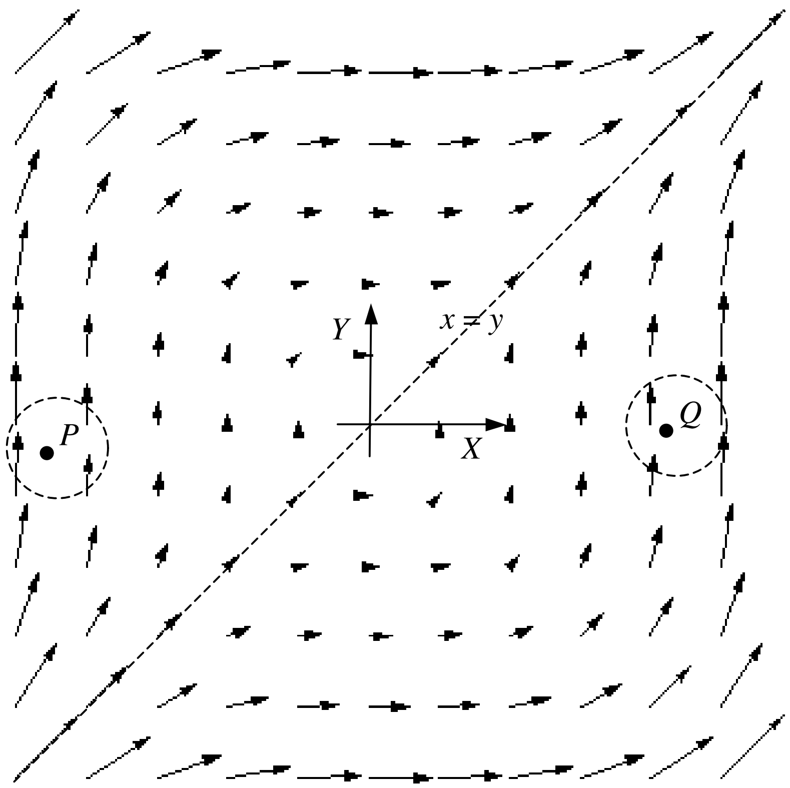

Fig. 29: Ejemplo de campo vectorial sencillo que no depende de z:

$$\vec{V}(x, y, z) = y^2\,\hat{i} + x^2\,\hat{j} + 0\,\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{V} = (2x - 2y)\,\hat{k}$$

Aquellos puntos como P para los que $y > x$ tienen el rotacional orientado a lo largo del eje Z negativo. Un objeto sumergido en este “líquido” en un entorno de dicho punto rotaría en sentido horario alrededor del eje Z. Puntos como Q para los que $x > y$ tienen el rotacional orientado a lo largo del eje Z positivo. Un objeto sumergido en un entorno de dicho punto rotaría en este caso en sentido antihorario alrededor del eje Z. Los objetos situados en la recta $x = y$ no rotarían.

Un campo vectorial cuya divergencia se anule en cualquier punto del espacio se denomina **campo solenoidal**. Si en cambio es su rotacional el que se anula para todo punto del espacio se dice que es un **campo irrotacional**.

Podemos operar repetitivamente con el operador nabla $\vec{\nabla}$ para realizar operaciones más complejas que implican segundas derivadas (y que proporcionarían información adicional sobre los campos):

a) $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\phi\right)$ es la divergencia del gradiente de ϕ, y es un campo escalar.

b) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right)$ es el rotacional del gradiente de ϕ, y es un campo vectorial **nulo**.

c) $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right)$ es el gradiente de la divergencia de $\vec{V}$, y es un campo vectorial.

d) $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)$ es la divergencia del rotacional de $\vec{V}$, y es un campo escalar **nulo**.

e) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)$ es el rotacional del rotacional de $\vec{V}$, y es un campo vectorial.

Demostración de b):

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right]\hat{i} + \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right]\hat{j} + \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right]\hat{k} \end{array} \right\} = 0$$

Nota: la demostración es cierta siempre que el orden de derivación del campo escalar ϕ no afecte al resultado: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right), \ldots$

Demostración de d):

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial y}-\dfrac{\partial V_y}{\partial z}\right)+\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z}-\dfrac{\partial V_z}{\partial x}\right)+\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x}-\dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)\end{matrix}\right\}=0$$

Nota: la demostración es cierta siempre que el orden de derivación de las componentes del campo vectorial $\vec{V}$ no afecte al resultado: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right),\ldots$

Circulación o integral de línea de un campo vectorial.

Sea una curva C que une dos puntos P_0 y P_1, se denomina circulación del campo vectorial $\vec{V}$ a lo largo de dicha curva a la integral:

$$\int_{\substack{P_0\\ \text{a lo largo de } C}}^{P_1}\vec{V}\cdot d\vec{r} \qquad (40)$$

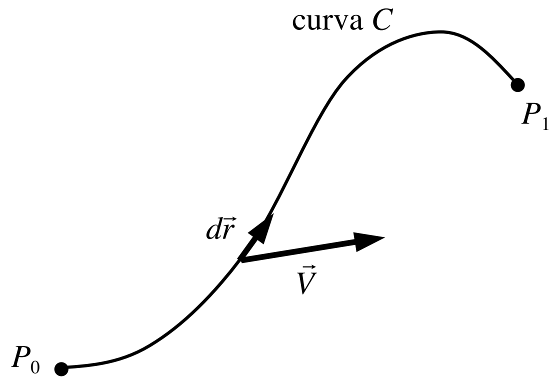

Fig. 30

Lo que nos dice dicha expresión es que vayamos recorriendo la curva realizando pequeños desplazamientos $d\vec{r}$, que multipliquemos escalarmente dichos desplazamientos por el valor del campo vectorial que nos encontramos por el camino, $\vec{V}\cdot d\vec{r}$ y que finalmente sumemos todos los resultados que hemos ido obteniendo (integral).

El significado de esta integral depende de lo que represente el campo. Por ejemplo, si $\vec{F}$ es una fuerza, $\int_{\substack{P_0\\ \text{a lo largo de } C}}^{P_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ será el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la trayectoria.

Si la trayectoria es cerrada se suele escribir: $\oint\limits_{\substack{\text{a lo largo} \\ \text{de } C}} \vec{V} \cdot d\vec{r}$

Por ejemplo, si nos dan una curva en función de un parámetro λ (ver ecuación 22 y fig. 17 para la recta y comparar con la ec. 41 y fig. 31), es decir, nos dan cómo depende de dicho parámetro la posición (y por lo tanto las componentes) de un punto cualquiera de la curva :

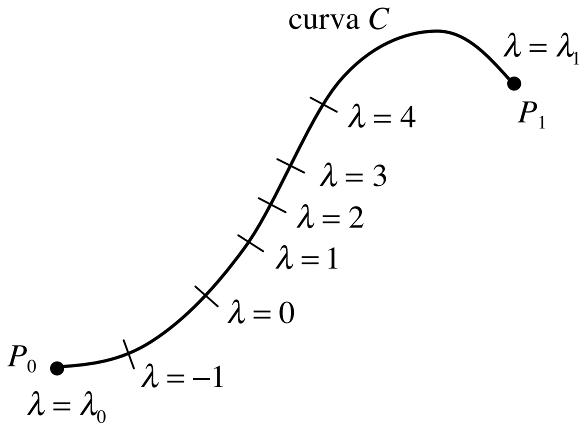

Fig. 31: Parametrización de una curva.

$$\vec{r}(\lambda) = x(\lambda)\hat{i} + y(\lambda)\hat{j} + z(\lambda)\hat{k} \qquad (41)$$

el vector desplazamiento $d\vec{r}$ vendrá dado por:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} = \\ &= \left(\frac{dx}{d\lambda}\right) d\lambda\,\hat{i} + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right) d\lambda\,\hat{j} + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right) d\lambda\,\hat{k} \end{aligned} \qquad (42)$$

Si los puntos P_0 y P_1 de inicio y final de la curva se corresponden con el parámetro λ_0 y λ_1 respectivamente, la circulación de un campo vectorial $\vec{V}(x, y, z)$ a lo largo de dicha curva será:

$$\int\limits_{\substack{P_0 \\ \text{a lo largo de } C}}^{P_1} \vec{V} \cdot d\vec{r} \;=\; \int\limits_{\substack{P_0 \\ \text{a lo largo de } C}}^{P_1} \left(V_x dx + V_y dy + V_z dz\right) \;=\; \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \overbrace{\left[V_x\left(\frac{dx}{d\lambda}\right) + V_y\left(\frac{dy}{d\lambda}\right) + V_z\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)\right]}^{f(\lambda)} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} f(\lambda)\, d\lambda$$

$$\left.\begin{array}{c} V_x(x, y, z),\; V_y(x, y, z),\; V_z(x, y, z) \\ x(\lambda),\; y(\lambda),\; z(\lambda) \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; V_x(\lambda),\; V_y(\lambda),\; V_z(\lambda)$$

Como se ve el cálculo se reduce al final a una integral de una función escalar de dicho parámetro λ.

Si la curva no está en forma paramétrica y se quiere utilizar el desarrollo anterior hay que transformarla previamente. Puede utilizarse una de las coordenadas *x*, *y*, *z* como parámetro o cualquier otro.

Campo vectorial conservativo.

Un campo vectorial $\vec{V}$ es conservativo si existe un campo escalar ϕ del cual es el gradiente:

$$\vec{V} \text{ conservativo} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} = \vec{\nabla}\phi \qquad (43)$$

Se puede demostrar que este campo vectorial verifica también que su circulación a lo largo de una curva, **para cualquier curva del espacio**, no depende del camino, sólo de los puntos inicial y final:

$$\vec{V} \text{ conservativo} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\text{a lo largo de } C}{\int_{P_0}^{P_1}} \vec{V} \cdot d\vec{r} \quad \text{no depende de la curva } C\text{, sólo de los puntos } P_0 \text{ y } P_1.$$

La demostración es sencilla si tenemos en cuenta la ec. (34) que veíamos al estudiar la relación entre el gradiente y la variación de un campo escalar:

$$\underset{\text{a lo largo de } C}{\int_{P_0}^{P_1}} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \underset{\text{a lo largo de } C}{\int_{P_0}^{P_1}} \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \underset{\text{a lo largo de } C}{\int_{P_0}^{P_1}} d\phi = \phi(P_1) - \phi(P_0) \qquad (44)$$

Si la circulación es a lo largo de una curva cerrada el punto inicial y el final son el mismo con lo que teniendo en cuenta el resultado anterior tenemos que para un campo vectorial conservativo se cumple también que **para cualquier curva cerrada del espacio**:

$$\vec{V} \text{ conservativo} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\substack{\text{a lo largo} \\ \text{de } C}} \vec{V} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad (45)$$

Por último otra condición que cumple también un campo conservativo es que su rotacional es nulo:

$$\vec{V} \text{ conservativo} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{V}=0 \qquad (46)$$

Lo cual es fácil de demostrar teniendo en cuenta que el rotacional de un gradiente es nulo (ver caso b) en la pag. 42):

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\phi\right)=0$$

Por último mencionar que, como un gradiente siempre es perpendicular en cada punto a la línea o superficie equiescalar que pasa por él, se deduce que las líneas de un campo conservativo $\vec{V}$ tienen que cruzarse perpendicularmente con las equiescalares del campo escalar ϕ del cual deriva (fig. 32).

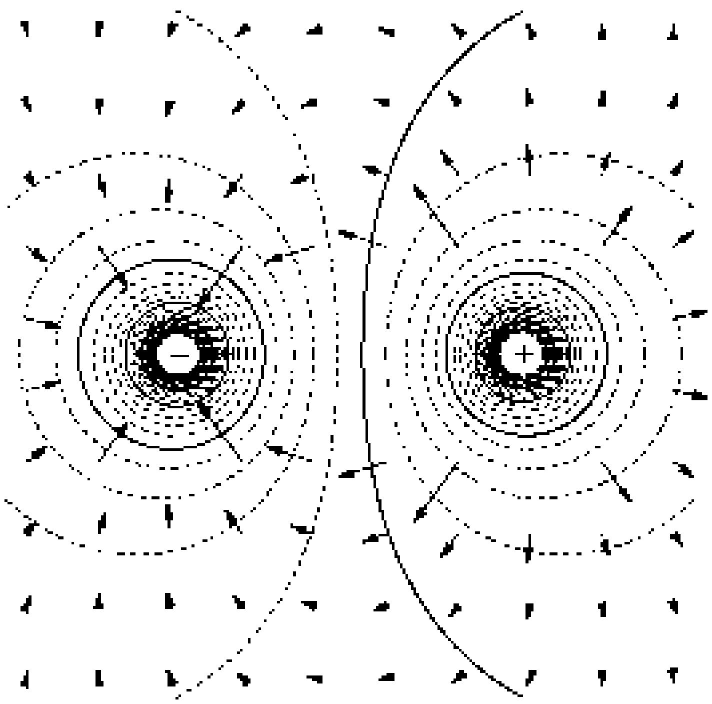

Fig. 32: Diagrama en dos dimensiones del campo eléctrico creado por dos cargas de signo contrario. Los vectores campo son perpendiculares a las líneas equipotenciales dada la relación entre el campo eléctrico $\vec{E}$ y el potencial V: $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$

Flujo de un campo vectorial.

Dada una superficie *S* se denomina flujo del campo vectorial $\vec{V}$ a través de ella a la integral:

$$\int_{\text{superficie } S} \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (47)$$

Lo que nos dice dicha expresión es que dividamos la superficie en pequeños elementos de área, que de uno en uno tomemos el vector de área que lo representa $d\vec{A}$, que multipliquemos escalarmente dichos vectores $d\vec{A}$ por el valor del campo vectorial que nos encontramos en esa posición del espacio, $\vec{V} \cdot d\vec{A}$, y que finalmente sumemos todos los resultados que hemos ido obteniendo (integral).

Ejemplo:

El campo eléctrico alrededor de una carga eléctrica puntual *Q* es: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$, donde $\vec{r}$ es el vector de posición de un punto del espacio respecto de la carga. El flujo del campo eléctrico de dicha carga a través de una esfera de radio *R* centrada en ella será:

$$\oint_{\substack{Superf.\\esférica}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{\substack{Superf.\\esférica}} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\right) \cdot d\vec{A} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\right) \oint_{\substack{Superf.\\esférica}} \hat{r} \cdot d\vec{A} =$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\right) \oint_{\substack{Superf.\\esférica}} dA = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\right)\left(4\pi R^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

donde se ha tenido en cuenta que la magnitud del campo eléctrico es la misma en todos los puntos de la superficie, al encontrarse estos a una distancia fija *R* de la carga *Q*, y que los vectores $d\vec{A}$ son radiales y por lo tanto de la misma dirección y sentido que el vector unitario radial $\hat{r}$.

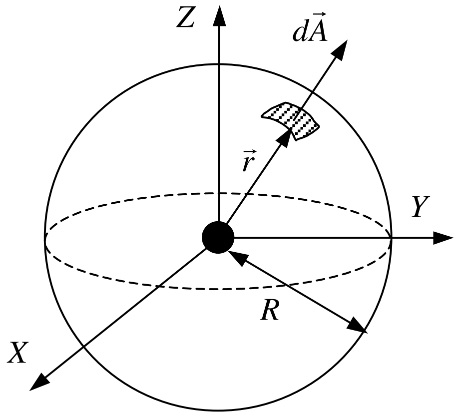

Fig. 33