1. ESCALARES Y VECTORES

Algunas magnitudes físicas se especifican por completo mediante un solo número acompañado de su unidad, por ejemplo, el tiempo, la temperatura, la masa, la densidad, etc. Estas magnitudes reciben el nombre de escalares. Sin embargo hay magnitudes físicas que presentan una cualidad *direccional* y que para ser descritas de forma completa es necesario especificar algo más que una simple cantidad. El ejemplo más sencillo es un desplazamiento.

Tomemos el caso de una tortuga. Si sólo nos informan que la tortuga se va a desplazar 2 m a partir de su posición actual nos damos cuenta de que la información suministrada es incompleta para determinar la posición final del animal. La tortuga puede acabar en cualquier punto de una circunferencia de 2 m de radio centrada en su posición actual, fig. 1 a). Si nos dicen que dicho desplazamiento se va a realizar a lo largo de la dirección vertical la información sobre el desplazamiento de la tortuga sigue siendo incompleta, ya que ésta podría acabar en cualquiera de las dos posiciones mostradas en la figura 1 b). Sólo cuando aparte de la magnitud y la dirección del desplazamiento nos informan además de su sentido, en nuestro caso verticalmente hacia arriba y no hacia abajo, fig. 1 c), podremos saber con total certitud dónde acabará finalmente la tortuga.

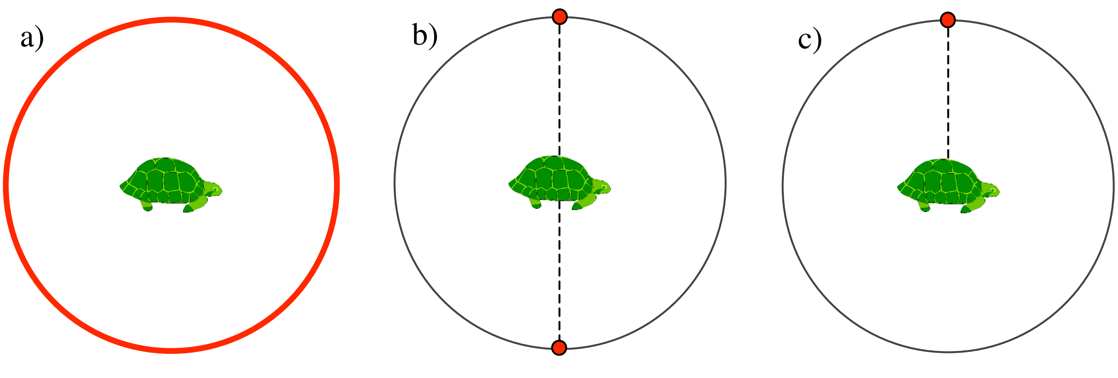


Fig. 1: Desplazamiento de la tortuga. a) Sólo se especifica la magnitud del desplazamiento, la información es incompleta. b) Se especifica magnitud y dirección, la información sigue siendo incompleta. c) Para especificar por completo la posición final de la tortuga es necesario indicar la magnitud, dirección y sentido del desplazamiento.

Las magnitudes físicas que necesitan de <u>una magnitud escalar</u> (un número con sus unidades), <u>una dirección y un sentido</u> para ser descritas de forma completa reciben el nombre de magnitudes vectoriales o vectores. Aparte de los desplazamientos otros ejemplos de magnitudes vectoriales son la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc.

En los cálculos matemáticos los escalares se representan por simples letras: a, l, T, etc. Los vectores se representan mediante letras con una flechita en su parte superior: $\vec{r}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, etc. (En algunos textos, en los que no se dispone de la posibilidad tipográfica de las flechitas, se utilizan letras en negrita para los vectores: ***r***, ***B***, ***E***). Los cálculos con magnitudes escalares implican operaciones aritméticas ordinarias (suma, resta, multiplicación, división, … de números). Los cálculos con magnitudes vectoriales son algo diferentes.

Visto que los desplazamientos son el ejemplo más sencillo de magnitud vectorial y que las operaciones entre vectores que vamos a definir deben tener su aplicación práctica (no debe olvidarse que nuestras matemáticas están al servicio de nuestro estudio de la naturaleza) veremos cómo podemos definir las diferentes operaciones entre vectores.

Vectores iguales y vectores opuestos

Gráficamente un desplazamiento del punto P_1 al punto P_2 puede representarse por una flecha que va del primer punto al segundo (esto no quiere decir que el objeto se haya desplazado en línea recta entre los dos puntos, lo que importa en el desplazamiento es el punto inicial y el final, no la trayectoria realizada por el objeto por el camino). En los cálculos matemáticos lo representaríamos por $\overrightarrow{P_1P_2}$ o por $\vec{A}$ como se indica en la figura 2. El desplazamiento entre los puntos P_3 y P_4 tiene la misma longitud, dirección y sentido que el comprendido entre los puntos P_1 y P_2 de modo que dichos desplazamientos son iguales aun cuando partan de puntos diferentes, representan por lo tanto el mismo vector y podremos escribir: $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_3P_4} = \vec{A}$. El vector $\vec{B}$ sin embargo no es el mismo vector que $\vec{A}$, ya que aunque su longitud y dirección es la

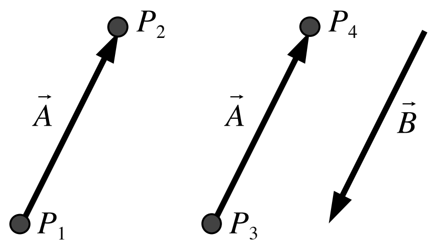


Fig. 2: Vectores iguales y vectores opuestos.

misma, su sentido es opuesto. La relación entre estos dos vectores opuestos puede escribirse de la forma $\vec{B} = -\vec{A}$, o $\vec{A} = -\vec{B}$, el uno es el negativo del otro (como veremos al definir la suma, la suma de dos vectores opuestos es nula).

La magnitud escalar asociada al vector (la longitud en el caso de un desplazamiento) recibe el nombre de *módulo* y se suele representar utilizando la misma letra que para el vector quitando la flechita, o situando éste entre barras verticales. Para el desplazamiento entre los puntos P_1 y P_2 podemos escribir su módulo como: A, $\left|\vec{A}\right|$, o $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$. Por definición el módulo de un vector es un escalar (un número con sus unidades) y siempre es positivo. Esto implica que aunque para vectores opuestos escribamos $\vec{A} = -\vec{B}$, sus módulos son iguales, es decir $A = B$.

Suma y resta de vectores

Cuando un objeto experimenta un desplazamiento $\vec{A}$ seguido de un segundo desplazamiento $\vec{B}$ el resultando es el mismo que si hubiera realizado un único desplazamiento $\vec{C}$ desde el punto inicial al final. Al desplazamiento resultante se le denomina vector suma de los dos vectores desplazamientos: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Como se puede ver en la figura 3 el orden en que se realiza la suma de vectores no influye en el resultado $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{C}$. Un detalle importante es que por lo general el módulo del vector resultante no tiene porqué ser la suma de los módulos de los dos vectores que se suman, como se ve en la figura 3: $C \neq A + B$.

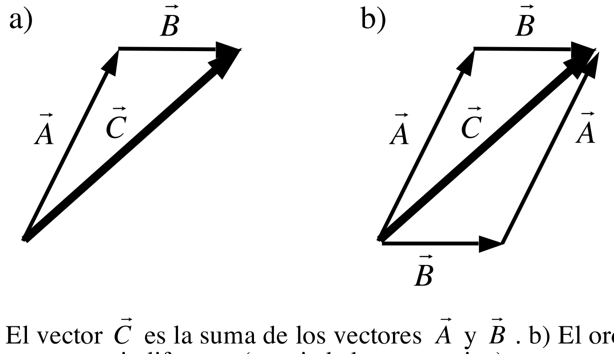


Fig. 3: a) El vector $\vec{C}$ es la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. b) El orden de la suma de vectores es indiferente (propiedad conmutativa).

Cuando se suman varios vectores desplazamientos el desplazamiento resultante es de nuevo un vector que va desde el punto inicial al final. Gráficamente se construye colocando los vectores desplazamiento uno a continuación de otro y uniendo el inicio del primer vector con el final del segundo. El orden en que se sumen los vectores es indiferente, y además, como se puede ver en la figura 4, los vectores que se suman se pueden asociar como queramos:

$$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \left(\vec{C} + \vec{D}\right) = \left[\vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right)\right] + \vec{D}$$

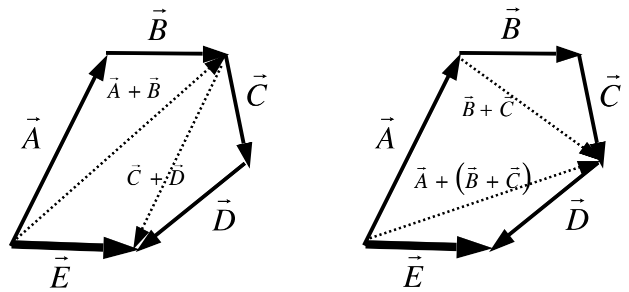


Fig. 4: La suma de varios vectores verifica la propiedad asociativa.

Como se puede ver, la suma de vectores tiene las mismas propiedades que aparecen cuando se trata de sumar simples números. La resta de vectores puede interpretarse como un caso particular de la suma, restar dos vectores es lo mismo que sumar al primero el opuesto del segundo: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$.

Multiplicación y división por un escalar

Consideremos el vector $\vec{A} + \vec{A}$. Como se ve en la figura 5, el vector resultante es un vector que tiene la misma orientación que $\vec{A}$ (es decir su misma dirección y sentido) pero con un módulo doblemente mayor. Este vector resultante lo podríamos representar escribiendo: $\vec{A} + \vec{A} = 2\vec{A}$. Consideremos también el vector $\left(-\vec{A}\right) + \left(-\vec{A}\right) + \left(-\vec{A}\right)$. El vector resultante es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{A}$, sentido opuesto y un módulo tres veces mayor. Este vector resultante lo podríamos representar escribiendo: $\left(-\vec{A}\right) + \left(-\vec{A}\right) + \left(-\vec{A}\right) = -\vec{A} - \vec{A} - \vec{A} = -3\vec{A}$.

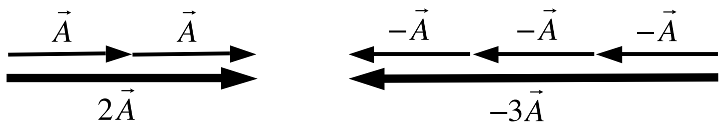


Fig. 5: Vectores $2\vec{A}$ y $-3\vec{A}$.

Podemos generalizar esto diciendo que cuando multiplicamos un escalar m por un vector $\vec{A}$, el resultado $m\vec{A}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{A}$, el mismo sentido si $m > 0$ y sentido contrario si $m < 0$, y un módulo que es $|m|$ veces mayor:

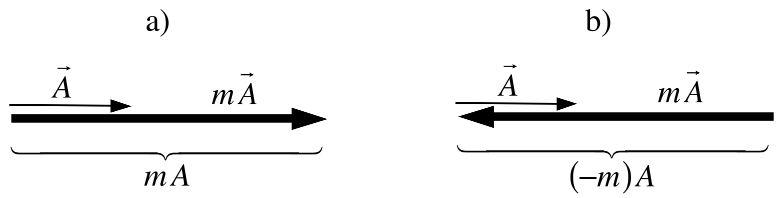


Fig. 6: Multiplicación de un escalar por un vector: a) escalar positivo, b) escalar negativo.

Algo similar ocurre si dividimos el vector $\vec{A}$ por un escalar m, el resultado $\dfrac{\vec{A}}{m}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\vec{A}$, el mismo sentido si $m > 0$ y sentido contrario si $m < 0$, y un módulo que es $|m|$ veces menor.

Vectores unitarios y componentes de vectores

Un vector unitario es aquél cuyo módulo (longitud) es la unidad, y no tiene unidades. Su único propósito es indicar una orientación en el espacio. La notación utilizada normalmente en los textos es colocar un pequeño ángulo en la parte superior de la letra: $\hat{A}$, $\hat{r}$, $\hat{\imath}$, etc. La forma más directa de construir un vector unitario es coger un vector cualquiera y dividirlo por su módulo:

$$\text{módulo de } \frac{\vec{A}}{A} = \left|\frac{\vec{A}}{A}\right| = \frac{|\vec{A}|}{A} = \frac{A}{A} = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} \qquad (1)$$

en este caso $\hat{A}$ representa un vector unitario con la misma orientación que el vector $\vec{A}$. Las operaciones con vectores se facilitan en gran medida cuando se utilizan componentes. Para definirlas es necesario utilizar un sistema de coordenadas. El sistema de coordenadas más usual, y con el que vamos a trabajar, es el cartesiano, con los ejes *X*, *Y* y *Z* perpendiculares entre sí. Llamemos $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ a los vectores unitarios orientados a lo largo de los tres ejes coordenados en su sentido positivo (algunos libros los llaman $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$). Como puede verse en la figura 7, cualquier vector $\vec{A}$ puede representarse como una suma de tres vectores orientados a lo largo de cada uno de los ejes coordenados. El vector a lo largo del eje *X* tiene la misma dirección que el vector unitario $\hat{i}$ y por lo tanto puede escribirse como $A_x\,\hat{i}$ (en nuestra figura tienen también el mismo sentido luego A_x será una cantidad positiva). De la misma forma los vectores a lo largo de los ejes *Y* y *Z* pueden escribirse respectivamente como $A_y\,\hat{j}$ y $A_z\,\hat{k}$ respectivamente. A_x, A_y y A_z son magnitudes escalares (pueden ser positivas, negativas o nulas) y reciben el nombre de componentes (cartesianas en nuestro caso) del vector $\vec{A}$.

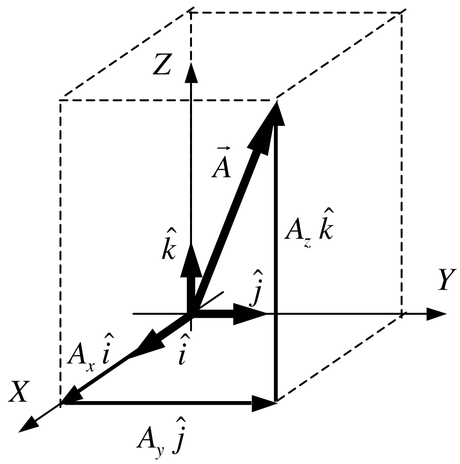


Fig. 7: Descomposición de un vector en componentes cartesianas.

Nuestro vector podrá por lo tanto escribirse en función de sus componentes de la siguiente forma: $\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$.

Si llamamos α, β y γ a los ángulos que el vector forma con el sentido positivo de los ejes coordenados *X*, *Y* y *Z* respectivamente, las componentes del vector pueden entenderse como las proyecciones de la longitud del vector (su módulo) sobre los ejes coordenados (con signo positivo o negativo dependiendo si la proyección se realiza hacia el sentido positivo o negativo del eje coordenado):

$$\begin{aligned} \frac{A_x}{A} &= \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad A_x = A\cos\alpha = \vec{A}\cdot\hat{i} \\ \frac{A_y}{A} &= \cos\beta \quad \Rightarrow \quad A_y = A\cos\beta = \vec{A}\cdot\hat{j} \\ \frac{A_z}{A} &= \cos\gamma \quad \Rightarrow \quad A_z = A\cos\gamma = \vec{A}\cdot\hat{k} \end{aligned} \qquad (2)$$

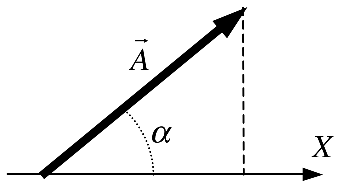


Fig. 8: Proyección del vector $\vec{A}$ sobre el eje coordenado *X*.

El vector unitario $\hat{A}$ en la misma dirección y sentido que $\vec{A}$ vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}}{A} = \\ &= \frac{A\cos\alpha\,\hat{i} + A\cos\beta\,\hat{j} + A\cos\gamma\,\hat{k}}{A} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k} \end{aligned} \qquad (3)$$

y como se puede ver tiene por componentes los cosenos de los ángulos que formaba $\vec{A}$ con los sentidos positivos de los ejes coordenados. Estos cosenos reciben el nombre de *cosenos directores*, ya que informan acerca de la orientación del vector en el espacio.

Toda la información necesaria para especificar un vector (su módulo, dirección y sentido) puede ser expresada por lo tanto por medio de sus tres componentes:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$$

o indicando su módulo y su orientación (los tres ángulos con los ejes de coordenadas).

$$\vec{A} = A\hat{A} = A\left(\cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}\right) = A\cos\alpha\,\hat{i} + A\cos\beta\,\hat{j} + A\cos\gamma\,\hat{k} \qquad (4)$$

La suma y la resta de vectores puede realizarse fácilmente utilizando las componentes. Si conocemos las componentes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podemos calcular de forma sencilla cuales serían las componentes que definen al vector suma:

$$\left.\begin{aligned}\vec{A} &= A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}\\ \vec{B} &= B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\vec{A}+\vec{B} &= \left(A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}\right) + \left(B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}\right) =\\ &= \left(A_x + B_x\right)\hat{i} + \left(A_y + B_y\right)\hat{j} + \left(A_z + B_z\right)\hat{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto si llamamos C_x, C_y y C_z a las componentes del vector suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, el resultando anterior nos dice que:

$$C_x = \left(A_x + B_x\right) \qquad C_y = \left(A_y + B_y\right) \qquad C_z = \left(A_z + B_z\right) \qquad (5)$$

Las componentes del vector suma son sencillamente la suma de las componentes de cada uno de los vectores. Esto es válido se sumen dos o más vectores.

Un análisis similar conduce a que en la resta de vectores el vector resultante tiene por componentes la resta de las componentes:

$$\begin{aligned}\vec{A}-\vec{B} &= \left(A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}\right) - \left(B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}\right) =\\ &= \left(A_x - B_x\right)\hat{i} + \left(A_y - B_y\right)\hat{j} + \left(A_z - B_z\right)\hat{k}\end{aligned} \qquad (6)$$

Productos de vectores. Producto escalar y producto vectorial.

En muchas situaciones de interés físico (no se debe olvidar que todos estos conceptos matemáticos los estamos introduciendo por que nos van a ser útiles en el estudio de los fenómenos naturales) cierta magnitud física resultado depende de dos magnitudes vectoriales (ejemplo: el trabajo que tengo que realizar para desplazar un objeto depende del desplazamiento – magnitud vectorial – y de la fuerza con que tiro de él – otra magnitud vectorial). En algunos casos la magnitud física resultado en la que estamos interesados es una magnitud escalar (como el caso del trabajo en el ejemplo anterior), otras veces el resultado es otra magnitud vectorial.

Para poder describir de forma matemática estos fenómenos necesitamos definir por lo tanto dos nuevas operaciones entre vectores. Una operación entre dos vectores que de como resultado un escalar, operación a la que llamaremos *producto escalar*, y una operación entre dos vectores que de como resultado otro vector, operación a la que llamaremos *producto vectorial*.

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se expresa matemáticamente como $\vec{A}\cdot\vec{B}$, y se define del modo siguiente. Se dibujan ambos vectores partiendo de un origen común (fig. 9). Si llamamos θ al ángulo que forman entre si, su producto escalar, viene dado por:

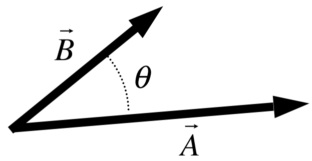


Fig. 9: El ángulo que forman entre sí dos vectores se determina dibujándolos con el mismo origen.

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta = A\ B\cos\theta \qquad (7)$$

Como se puede ver, el resultado de la operación es un escalar (un número) que puede ser positivo, negativo o nulo dependiendo del ángulo θ entre los vectores:

$$\begin{array}{ll} \text{si}\quad 0\le\theta< 90^{\circ} \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\cdot\vec{B}>0 & \\ \text{si}\quad 90^{\circ}<\theta\le 180^{\circ} \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\cdot\vec{B}<0 & (8) \\ \text{si}\quad \theta=90^{\circ} \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\perp\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\cdot\vec{B}=0 & \end{array}$$

El producto escalar verifica la propiedad conmutativa (sus módulos *A* y *B* son números):

$$\vec{B}\cdot\vec{A}=B\ A\cos\theta = A\ B\cos\theta=\vec{A}\cdot\vec{B} \qquad (9)$$

Según la definición si realizamos el producto escalar de un vector por si mismo el resultado es su módulo al cuadrado:

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=A\,A\cos(0^{\circ})=A^{2} \quad\Rightarrow\quad A=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} \qquad (10)$$

por lo que el módulo de un vector puede escribirse como la raíz cuadrada del producto escalar por si mismo (esta expresión no debería asustarnos si pensamos que lo que está dentro de la raíz es un escalar, un número).

Aplicando lo anterior al producto escalar entre los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ tenemos:

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1\ ,\ \ \hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{k}\cdot\hat{i}=0 \qquad (11)$$

Utilizando todo lo anterior podemos encontrar una expresión para el producto escalar en función de las componentes de los dos vectores. Si $\vec{A}=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k}$ y $\vec{B}=B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k}$, su producto escalar viene dado por la suma del producto de sus respectivas componentes:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}&=\left(A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k}\right)\cdot\left(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k}\right)=\\ &=A_x B_x\underbrace{\hat{i}\cdot\hat{i}}_{=1}+A_x B_y\underbrace{\hat{i}\cdot\hat{j}}_{=0}+A_x B_z\underbrace{\hat{i}\cdot\hat{k}}_{=0}+\\ &\quad A_y B_x\underbrace{\hat{j}\cdot\hat{i}}_{=0}+A_y B_y\underbrace{\hat{j}\cdot\hat{j}}_{=1}+A_y B_z\underbrace{\hat{j}\cdot\hat{k}}_{=0}+\\ &\quad A_z B_x\underbrace{\hat{k}\cdot\hat{i}}_{=0}+A_z B_y\underbrace{\hat{k}\cdot\hat{j}}_{=0}+A_z B_z\underbrace{\hat{k}\cdot\hat{k}}_{=1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}\cdot\vec{B}=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z \qquad (12)$$

Y el módulo de un vector vendrá dado en función de sus componentes por:

$$A=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{A_x A_x+A_y A_y+A_z A_z}=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \qquad (13)$$

Anteriormente hemos visto que un vector unitario $\hat{A}$ en la misma dirección y sentido que un vector $\vec{A}$ cualquiera viene dado por la expresión $\hat{A}=\cos\alpha\,\hat{i}+\cos\beta\,\hat{j}+\cos\gamma\,\hat{k}$, donde α , β y γ son los ángulos que el vector $\vec{A}$ forma con el sentido positivo de los ejes coordenados *X*, *Y* y *Z* respectivamente. Si hacemos el producto escalar $\hat{A}\cdot\hat{A}$ tenemos que: $\hat{A}\cdot\hat{A}=\left|\,\hat{A}\,\right|^2=1$ por ser justamente un vector unitario. Pero por otro lado:

$$\hat{A}\cdot\hat{A}=\left(\cos\alpha\,\hat{i}+\cos\beta\,\hat{j}+\cos\gamma\,\hat{k}\right)\cdot\left(\cos\alpha\,\hat{i}+\cos\beta\,\hat{j}+\cos\gamma\,\hat{k}\right)=$$
$$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$

Deducimos por lo tanto que la suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es siempre la unidad:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (14)$$

El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se expresa matemáticamente como $\vec{A}\times\vec{B}$ (en algunos libros se utiliza también la notación $\vec{A}\wedge\vec{B}$). Dado que el resultado de esta operación es un vector hay que indicar su módulo, dirección y sentido.

Módulo: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=A\,B\,\mathrm{sen}\theta$ (obsérvese que es una cantidad siempre positiva)

Dirección: perpendicular al plano que contiene a los dos vectores.

Sentido: el indicado por la regla de la mano derecha (o regla del sacacorchos). Como se indica en la figura 10, cuando se orientan los dedos de la mano derecha de forma que vayan en el sentido de rotación del primer vector al segundo, el pulgar indica el sentido del producto vectorial.

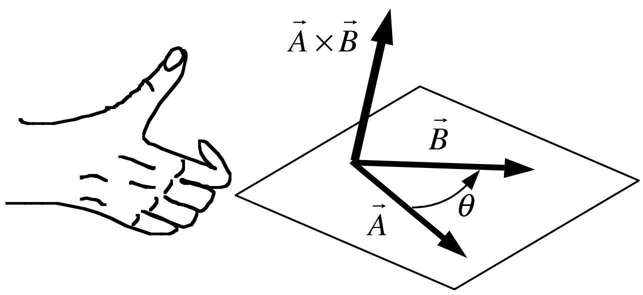


Fig. 10: Producto vectorial de dos vectores.

Tal como ha sido definido se puede ver que el producto vectorial es nulo si los dos vectores tienen la misma dirección ($\theta = 0°$ ó $\theta = 180°$). Por otro lado el producto vectorial no verifica la propiedad conmutativa. Cambiar el orden de los factores implica un cambio de signo en el resultado $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ (ver fig. 11). Es importante por lo tanto no intercambiar el orden de los factores en expresiones que contengan productos vectoriales, y aplicar de forma correcta la regla de la mano derecha.

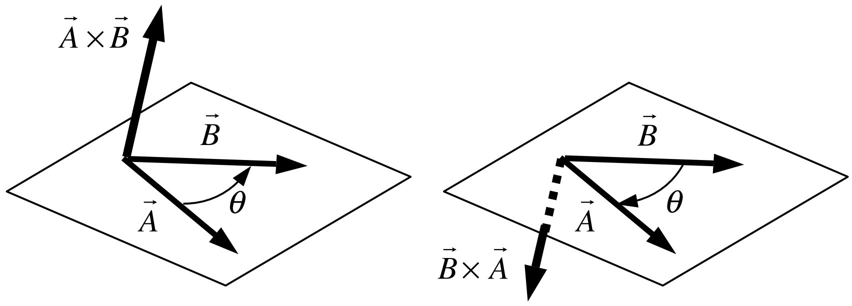
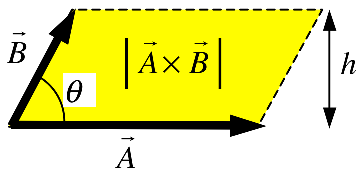


Fig. 11: El producto vectorial de dos vectores es anticonmutativo $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$.

Como puede verse en la figura 12, el área del paralelogramo formado por dos vectores es igual al módulo del producto vectorial de dichos vectores.



$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = A\,B\,\mathrm{sen}\theta = A\,h =$$
$$= \text{ área del paralelogramo}$$

Fig. 12: Relación entre el área del paralelogramo formado por dos vectores y su producto vectorial.

Aplicando la definición del producto vectorial al producto entre los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ tenemos: $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$, $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$ (15)

Utilizando todo lo anterior podemos encontrar una expresión para el producto vectorial en función de las componentes de los dos vectores. Si $\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}$, su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ viene dado por:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \left(A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\,\hat{k}\right)\times\left(B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\,\hat{k}\right) =$$

$$= A_x B_x \underbrace{\hat{i}\times\hat{i}}_{=0} + A_x B_y \underbrace{\hat{i}\times\hat{j}}_{=\hat{k}} + A_x B_z \underbrace{\hat{i}\times\hat{k}}_{=-\hat{j}} +$$

$$A_y B_x \underbrace{\hat{j}\times\hat{i}}_{=-\hat{k}} + A_y B_y \underbrace{\hat{j}\times\hat{j}}_{=0} + A_y B_z \underbrace{\hat{j}\times\hat{k}}_{=\hat{i}} +$$

$$A_z B_x \underbrace{\hat{k}\times\hat{i}}_{=\hat{j}} + A_z B_y \underbrace{\hat{k}\times\hat{j}}_{=-\hat{i}} + A_z B_z \underbrace{\hat{k}\times\hat{k}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \underbrace{\left(A_y\,B_z - A_z\,B_y\right)}_{C_x}\hat{i} + \underbrace{\left(A_z\,B_x - A_x\,B_z\right)}_{C_y}\hat{j} + \underbrace{\left(A_x\,B_y - A_y\,B_x\right)}_{C_z}\hat{k}$$

Esta expresión es fácil de recordar si la asociamos al desarrollo del siguiente determinante (olvidando el aspecto raro que presenta):

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (16)$$

Por medio de la combinación de productos se pueden construir expresiones más complejas. Por ejemplo con tres vectores podemos construir las siguientes combinaciones:

$$a)\,\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right) \qquad b)\,\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) \qquad c)\,\vec{A}\times\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right) \qquad d)\,\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$$

$$e)\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{C} \qquad f)\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\times\vec{C} \qquad g)\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C} \qquad h)\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$$

No todas estas combinaciones tienen sentido, analicémoslas de una en una:

a) $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$ es un vector con la misma dirección que $\vec{A}$, y el mismo sentido, o con sentido contrario, si el escalar $\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$ es positivo o negativo.

b) $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$ es un vector con la misma dirección que $\vec{C}$, y el mismo sentido, o con sentido contrario, si el escalar $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$ es positivo o negativo.

c) $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ es un vector (resultado del producto vectorial entre dos vectores) que es perpendicular al vector $\vec{B}\times\vec{C}$, por lo tanto se encuentra en el plano que contiene a los vectores $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y dentro de dicho plano en una dirección perpendicular al vector $\vec{A}$.

d) $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$ es un vector (resultado del producto vectorial entre dos vectores) que es perpendicular al vector $\vec{A}\times\vec{B}$, por lo tanto se encuentra en el plano que contiene a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y dentro de dicho plano en una dirección perpendicular al vector $\vec{C}$.

e) $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ es un escalar (resultado del producto escalar entre dos vectores)

f) $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\times\vec{C}$ **¡no tiene sentido!** El producto vectorial es una operación entre dos vectores, no entre un escalar y un vector.

g) $\vec{A}\times\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$ **¡no tiene sentido!** El producto vectorial es una operación entre dos vectores, no entre un vector y un escalar.

h) $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$ es un escalar (resultado del producto escalar entre dos vectores)

Del análisis anterior podemos deducir las siguientes propiedades:

- $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\neq\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$ no verifica la asociativa (ver combinaciones a) y b))
- $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\neq\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$ no verifica la asociativa (ver combinaciones c) y d))
- En un **producto mixto** entre tres vectores (combinación de producto escalar y vectorial, ver combinaciones e), f), g) y h)) la expresión sólo tiene sentido si se realiza primero el producto vectorial y luego el escalar, es por ello que no es necesario escribir los paréntesis: $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} \quad \equiv \quad \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$

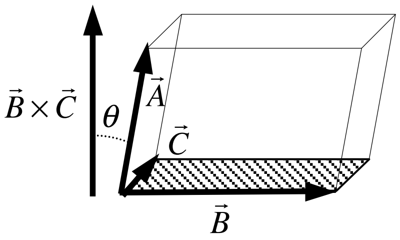
La expresión de un producto mixto en función de las componentes de los vectores viene dada como el desarrollo de un determinante:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (17)$$

y utilizando las propiedades de los determinantes se puede demostrar que:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}=\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} \qquad (18)$$

El valor absoluto del producto mixto (tomamos el valor absoluto ya que el resultado podría ser negativo) **es igual al volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores** como se muestra en la siguiente figura:



$$Volumen = Area\,de\,la\,base \cdot altura =$$

$$= \left|\vec{B}\times\vec{C}\right| \left|A\cos\theta\right| = \left|\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right|$$

Fig. 13: Relación entre el volumen del paralelepípedo formado por tres vectores y su producto mixto.

Un doble producto vectorial puede desarrollarse en productos escalares de la siguiente forma:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} \qquad (19)$$

Sale del paréntesis el vector $\vec{B}$, que es el **vector más cercano** al vector externo $\vec{A}$, el cual entra dentro del paréntesis multiplicándose escalarmente por el otro vector.

Sale del paréntesis el vector $\vec{C}$, que es el **vector más alejado** al vector externo $\vec{A}$, el cual entra dentro del paréntesis multiplicándose escalarmente por el otro vector.

Utilizando el mismo razonamiento podemos desarrollar el siguiente doble producto vectorial viendo que no da lo mismo que el anterior:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C} = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}$$

Diferencias entre el álgebra escalar y el álgebra vectorial

En los apartados anteriores hemos visto diferentes operaciones entre vectores y escalares. En una expresión matemática en la que aparezcan ambos tipos de magnitudes físicas la forma de manejarlas es similar a cómo uno operaba en el álgebra de escalares. Como ejemplo supongamos la siguiente relación entre los escalares *a* y *b* y los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ y $\vec{E}$:

$$a\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} - b\,\vec{D} = \vec{E}$$

y nos piden que despejemos el vector $\vec{C}$ en función de las demás magnitudes. El proceso sería como sigue:

$$a\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}-b\,\vec{D}=\vec{E} \quad \Rightarrow \quad a\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}=\vec{E}+b\,\vec{D}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}=\frac{\vec{E}+b\vec{D}}{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{C}=\frac{\vec{E}+b\vec{D}}{a\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)}$$

Nótese que el denominador de la fracción es un escalar, sólo tenemos escalares: a y $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$.

Esta familiaridad en el manejo de los vectores, de forma similar a operar con escalares, puede conducir a error. Si nos hubiesen pedido despejar el escalar a, estaríamos tentados de realizar lo siguiente:

$$a\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}-b\,\vec{D}=\vec{E} \quad \Rightarrow \quad a\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}=\vec{E}+b\,\vec{D}$$

$$\Rightarrow \quad a\vec{C}=\frac{\vec{E}+b\,\vec{D}}{\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{\vec{E}+b\,\vec{D}}{\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}}$$

¡y estaríamos cometiendo un grave error!. En este caso el denominador de la fracción, $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$, es un vector, y **¡la división por un vector ni está definida ni tiene ningún sentido!** Este detalle junto con el hecho de que el producto vectorial entre dos vectores es anticonmutativo son dos de las cosas que hay que tener en cuenta cuando se manejan expresiones con vectores.

Cálculo del momento de un vector respecto de un punto.

Sea un vector $\vec{A}$ aplicado en el punto P, y un punto de referencia cualquiera O se define el momento de $\vec{A}$ respecto de O como:

$$\vec{M}_O=\overrightarrow{OP}\times\vec{A} \qquad (20)$$

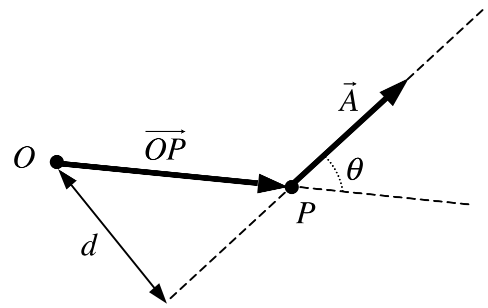


Fig. 14: Representación gráfica de los vectores y puntos relevantes en el cálculo del momento de un vector respecto de un punto.

El cálculo del momento de un vector implica tres datos: el vector, su punto de aplicación y el punto respecto al cual se calcula dicho momento. El módulo del momento de un vector respecto de un punto depende de la distancia de dicho punto a la línea de acción del vector (ver fig. 14): $\left|\vec{M}_O\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right| A \operatorname{sen}\theta = A\,d$. Su orientación, dado que lo que se realiza es un producto vectorial, es perpendicular al plano que contiene al vector y al punto respecto del cual se realiza el cálculo y con sentido dado por la regla de la mano derecha. Dicho vector momento se le suele representar aplicado en el punto respecto al cual se calcula. En el ejemplo de la figura 14 $\vec{M}_O$ sería un vector aplicado en O perpendicular al plano de la figura y hacia el lector.

Según la definición anterior se puede demostrar que el cálculo del momento de un vector no cambia si se desplaza dicho vector a lo largo de su línea de acción:

$$\overrightarrow{OQ}\times\vec{A} = \left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\right)\times\vec{A} =$$
$$= \overrightarrow{OP}\times\vec{A} + \underbrace{\overrightarrow{PQ}\times\vec{A}}_{=0}$$

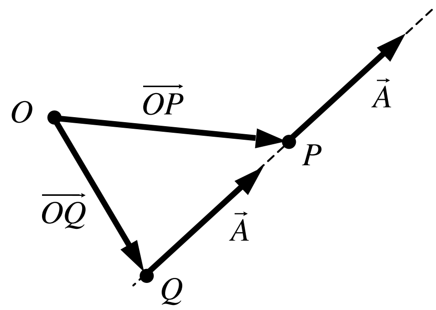


Fig. 15: Deslizar el vector a lo largo de su línea de acción desde P hasta Q no cambia el cálculo del momento respecto de O.

El último término se anula al implicar un producto vectorial de dos vectores paralelos.

De la misma manera dicho cálculo tampoco varía si el punto respecto al cual se realiza el cálculo se desplaza a lo largo de una dirección paralela a la línea de acción del vector:

$$\vec{M}_{O'} = \overrightarrow{O'P}\times\vec{A} = \left(\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP}\right)\times\vec{A} =$$
$$= \underbrace{\overrightarrow{O'O}\times\vec{A}}_{=0} + \overrightarrow{OP}\times\vec{A} = \vec{M}_O$$

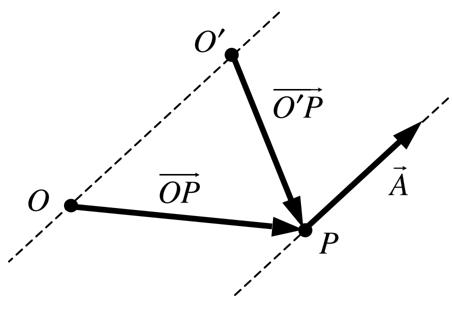


Fig. 16: Desplazar el punto respecto al cual se realiza el cálculo a lo largo de una dirección paralela a la dirección del vector no cambia el cálculo del momento de dicho vector.

Resultante y momento resultante de un sistema de vectores.

Sea un conjunto de *N* vectores $\{\vec{A}_i\}$ aplicados en puntos $\{P_i\}$ con $i = 1, 2, 3, \dots N$. Se denomina **resultante del sistema** a la suma de todos los vectores: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i$. Se denomina **momento resultante del sistema respecto de un punto** *O* a la suma de todos los momentos respecto de *O* de todos los vectores del sistema: $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{i,O} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \vec{A}_i$.

Calcular el momento resultante respecto de un punto *O* de un sistema con un gran número de vectores requiere calcular un número grande de productos vectoriales (tantos como vectores tiene el sistema) con el trabajo que ello conlleva, si se quiere realizar de nuevo el cálculo pero respecto de otro punto diferente, O' por ejemplo, no es necesario realizar de nuevo un gran número de productos vectoriales, sino que se puede utilizar el cálculo anterior respecto de *O* de forma de simplificar el trabajo matemático:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{i,O'} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{O'P_i} \times \vec{A}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i} \right) \times \vec{A}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \vec{A}_i + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{O'O} \times \vec{A}_i = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de **teorema fundamental**:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R} \qquad (21)$$

El resultado anterior indica que si el vector $\overrightarrow{O'O}$ es paralelo al vector resultante $\vec{R}$ del sistema de vectores entonces los dos momentos son iguales: $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$.

Otro caso interesante es cuando la resultante $\vec{R}$ del sistema es nula. En este caso se cumple que el momento resultante del sistema es independiente del punto respecto al cual se calcula: $\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} = \vec{M}_P = \vec{M}_Q = \dots$, el resultado del cálculo es siempre el mismo.

Sistema de vectores concurrentes. Teorema de Varignon.

Dado un conjunto de *N* vectores $\{\vec{A}_i\}$ aplicados en puntos $\{P_i\}$ con $i = 1, 2, 3, \ldots N$, se llaman vectores concurrentes si sus líneas de acción concurren o se cortan en un mismo punto *P*. En este caso se cumple el **teorema de Varignon**:

"El momento resultante de un sistema de vectores concurrentes es igual al momento de la resultante aplicada en el punto de concurrencia"

Demostración:

$$\underbrace{\vec{M}_O}_{\substack{\text{Momento resultante}\\ \text{respecto de } O}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{i,O} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP_i} \times \vec{A}_i = \left(\begin{array}{l}\text{se deslizan todos los vectores al punto } P \text{ de}\\ \text{concurrencia sin que cambie el resultado}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{OP} \times \vec{A}_i = \overrightarrow{OP} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{A}_i = \underbrace{\overrightarrow{OP} \times \vec{R}}_{\substack{\text{Momento respecto de } O \text{ de la resultante}\\ \text{aplicada en el punto de concurrencia } P.}}$$

Nota: La resultante de un sistema de vectores no tiene un punto de aplicación definido, por lo que la expresión "el momento de la resultante" está incompleta a no ser que se especifique su punto de aplicación.

Ecuaciones de rectas y planos y cálculo de distancias utilizando la teoría de vectores.

Vamos a utilizar la teoría de vectores expuesta hasta ahora para calcular de forma sencilla y razonada ecuaciones de rectas, ecuaciones de planos, distancias, etc.

Supongamos que queremos conocer la **ecuación de una recta** que es paralela al vector $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ y que pasa por el punto *P* de coordenadas (x_0, y_0, z_0) (ver fig. 17). La ecuación que buscamos es una relación que deben verificar las coordenadas (x, y, z) de cualquier punto de la recta. Cojamos por lo tanto un punto genérico cualquiera *Q* perteneciente a la recta y de coordenadas genéricas (x, y, z). El vector

$\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es un vector que une dos puntos de la recta y por lo tanto es paralelo al vector $\vec{V}$, lo que implica que los dos vectores son proporcionales:

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda\vec{V} \quad \Rightarrow \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(V_x, V_y, V_z)$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda V_x \\ y = y_0 + \lambda V_y \\ z = z_0 + \lambda V_z \end{array} \right\} \text{ Ecuaciones paramétricas de la recta} \qquad (22)$$

Cada punto de la recta viene caracterizado por el valor de un parámetro, λ en las ecuaciones anteriores, de tal forma que nuestra recta se asemeja a un eje de coordenadas donde el origen es el punto *P* perteneciente a la recta (para el cual $\lambda = 0$) y las distancias se miden en múltiplos del módulo del vector $\vec{V}$ paralelo a la recta (ver fig. 17).

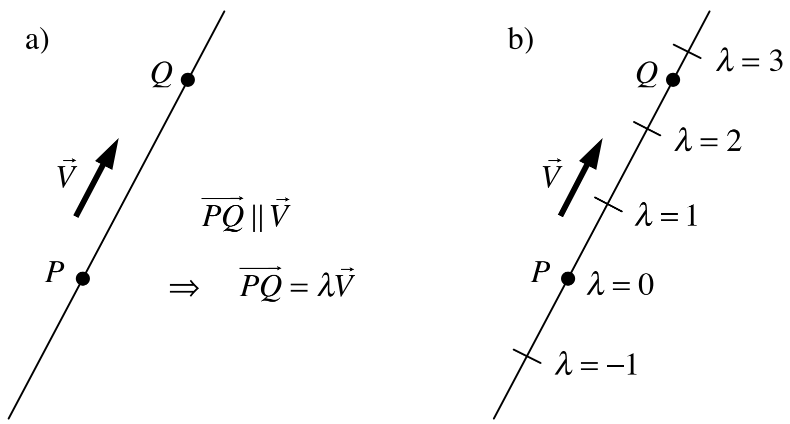


Fig. 17: a) Para que un punto *Q* pertenezca a la recta que pasa por *P* y es paralela a $\vec{V}$ de be cumplir que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea paralelo, y por lo tanto proporcional, a $\vec{V}$. b) Cada punto de la recta está asociado de esta forma con un valor del parámetro de proporcionalidad asemejando de esta forma la recta a una especie de eje coordenado.

Otra forma de escribir la ecuación de la recta es eliminando el parámetro λ en las ecuaciones paramétricas:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{x-x_0}{V_x} \\[2ex] \lambda = \dfrac{y-y_0}{V_y} \\[2ex] \lambda = \dfrac{z-z_0}{V_z} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-x_0}{V_x} = \frac{y-y_0}{V_y} = \frac{z-z_0}{V_z} \qquad (23)$$

Si ahora queremos conocer la **distancia de un punto** ***R*** **a la recta** anterior al dibujar la recta con el punto (fig. 18) se observa que $d = \left|\,\overrightarrow{PR}\,\right| \operatorname{sen}\theta$. El valor de $\operatorname{sen}\theta$ lo podemos obtener a partir del producto vectorial:

$$\left|\,\overrightarrow{PR} \times \vec{V}\,\right| = \left|\,\overrightarrow{PR}\,\right| \left|\,\vec{V}\,\right| \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{\left|\,\overrightarrow{PR} \times \vec{V}\,\right|}{\left|\,\vec{V}\,\right|} = \left|\,\overrightarrow{PR} \times \hat{V}\,\right|$$

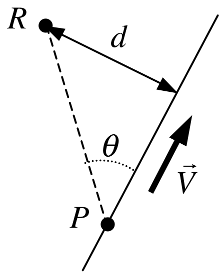


Fig. 18

Supongamos ahora que queremos conocer la **ecuación de un plano** que es perpendicular al vector $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ y que pasa por el punto *P* de coordenadas (x_0, y_0, z_0) (fig. 19). La ecuación que buscamos es una relación que deben verificar las coordenadas (x, y, z) de cualquier punto del plano. Cojamos por lo tanto un punto genérico cualquiera *Q* perteneciente al plano y de coordenadas genéricas (x, y, z). El vector $\overrightarrow{PQ} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ es un vector que une dos puntos del plano y por lo tanto es perpendicular al vector $\vec{V}$, lo que implica que el producto escalar de los dos vectores es nulo:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot (V_x, V_y, V_z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_x(x-x_0) + V_y(y-y_0) + V_z(z-z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} V_x x + V_y y + V_z z = d \\[2ex] \text{con } d = V_x x_0 + V_y y_0 + V_z z_0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Ec. del plano} \\[2ex] (24) \end{array}$$

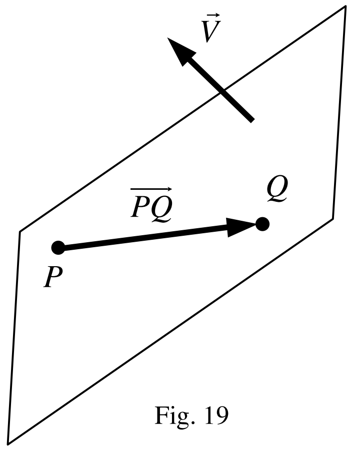


Fig. 19

Por último si queremos calcular la distancia de un punto R al plano anterior al dibujar el plano con el punto (fig. 19) se observa que $d = \left| \overrightarrow{PR} \right| \cos\theta$. El valor de $\cos\theta$ lo podemos obtener a partir del producto escalar:

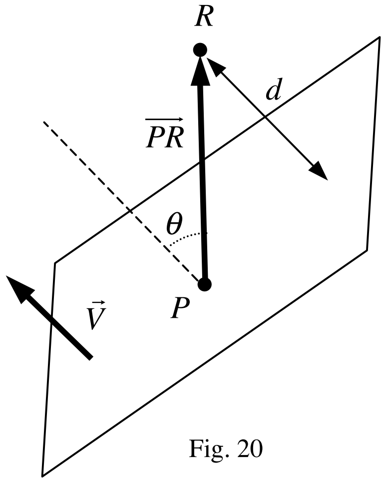


Fig. 20

$$\left| \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{V} \right| = \left| \overrightarrow{PQ} \right| \left| \vec{V} \right| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{V} \right|}{\left| \vec{V} \right|} = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \hat{V} \right|$$

La distancia es el valor absoluto (una distancia siempre es positiva) de la proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ a lo largo de la dirección perpendicular al plano.

Representación vectorial de un área

En geometría, y a veces también en física, a un trozo de superficie plana se le suele asociar un vector área que de alguna forma caracteriza a dicha superficie. Dicho vector tiene por módulo la cantidad de área de la superficie, por dirección la dirección espacial de la superficie plana, es decir, la dirección perpendicular a la superficie, y por sentido uno de los dos posibles.

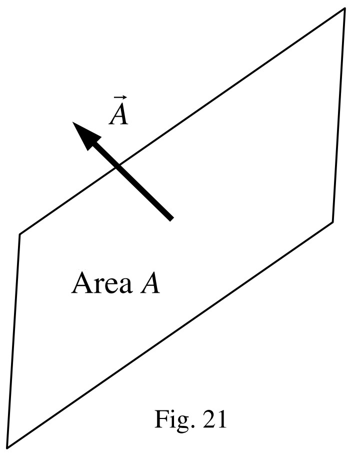


Fig. 21

Esta definición puede extenderse a superficies que no sean planas aplicándose a cada elemento infinitesimalmente pequeño (fig. 22). En este caso si la superficie curva es cerrada (encierra un determinado volumen) el sentido de los vectores infinitesimales de área $d\vec{A}$ se toma siempre de forma que estén orientados hacia el exterior.

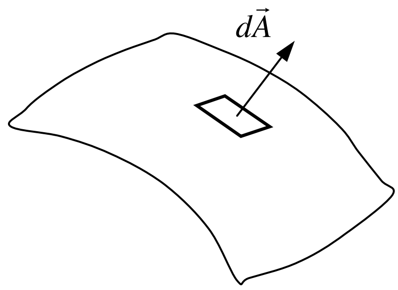


Fig. 22

Derivadas e integrales de funciones vectoriales

Una determinada magnitud vectorial puede depender de un parámetro o variable en este caso hablamos de una función vectorial, ejemplo: el vector de posición $\vec{r}$ de una partícula que se mueve depende del tiempo t y lo representamos como $\vec{r}(t)$. Esto implica que las componentes de dicha magnitud vectorial serán (si no todas al menos una de ellas) también dependientes de dicha variable, en nuestro ejemplo las coordenadas x, y y z de la posición de la partícula dependerán del tiempo: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$. Derivar o integrar respecto de la variable se traduce en derivar o integrar cada una de las componentes de la función vectorial.

Ejemplo: La velocidad de una partícula viene dada por la derivada de su posición con el tiempo, encontrar la velocidad en función del tiempo para una partícula cuya posición viene dada por la función: $\vec{r}(t) = \underbrace{\left(t^2+1\right)}_{x(t)}\hat{i} + \underbrace{\left(2+t-t^3\right)}_{y(t)}\hat{j} + \underbrace{\left[\ln(t)-1\right]}_{z(t)}\hat{k}$

El vector velocidad será:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(t^2+1\right)}{dt}\hat{i} + \frac{d\left(2+t-t^3\right)}{dt}\hat{j} + \frac{d\left[\ln(t)-1\right]}{dt}\hat{k} =$$

$$= \underbrace{(2t)}_{v_x(t)}\hat{i} + \underbrace{\left(1-3t^2\right)}_{v_y(t)}\hat{j} + \underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{v_z(t)}\hat{k}$$

Las componentes del vector velocidad son por lo tanto las derivadas de las componentes del vector de posición. Y lo mismo funciona con la integración, las componentes del vector de posición serán la integral con el tiempo de las componentes del vector velocidad:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt = \int\left[(2t)\hat{i} + \left(1-3t^2\right)\hat{j} + \left(\frac{1}{t}\right)\hat{k}\right]dt =$$

$$= \left[\int 2t\,dt\right]\hat{i} + \left[\int\left(1-3t^2\right)dt\right]\hat{j} + \left[\int \frac{1}{t}dt\right]\hat{k} =$$

$$= \left(t^2 + C_x\right)\hat{i} + \left(t - t^3 + C_y\right)\hat{j} + \left[\ln(t) + C_z\right]\hat{k} =$$

$$= \left(t^2\right)\hat{i} + \left(t - t^3\right)\hat{j} + \left[\ln(t)\right]\hat{k} + \underbrace{\left(C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}\right)}_{\vec{C}}$$

La única diferencia con la integración ya conocida de funciones escalares es que al realizar la integral indefinida de una función vectorial aparecen tres constantes arbitrarias de integración, C_x , C_y y C_z al integrar cada una de las tres componentes. Tres constantes que se pueden agrupar dando lugar a un vector arbitrario constante: $\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$. El valor de dicho vector se tiene que determinar utilizando otros datos del problema (como las condiciones iniciales del movimiento). En nuestro ejemplo si queremos recuperar el vector de posición $\vec{r}(t)$ de la partícula nuestro vector constante debe valer: $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

Las integrales de funciones vectoriales pueden ser también definidas utilizando límites de integración. En este caso ya no aparecen constantes de integración.

La derivación e integración de vectores tiene propiedades similares a las que cumplen los escalares. Así, por ejemplo si tenemos los vectores $\vec{A}(u)$, $\vec{B}(u)$ y la función escalar $f(u)$ se verifica:

derivada de la suma de vectores: $$\frac{d\left(\vec{A}+\vec{B}\right)}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \qquad (25)$$

derivada del producto por un escalar: $$\frac{d\left[f(u)\cdot\vec{A}(u)\right]}{du} = \frac{df(u)}{du}\cdot\vec{A}(u) + f(u)\cdot\frac{d\vec{A}(u)}{du} \qquad (26)$$

derivada de un producto escalar: $$\frac{d\left[\vec{A}(u)\cdot\vec{B}(u)\right]}{du} = \frac{d\vec{A}(u)}{du}\cdot\vec{B}(u) + \vec{A}(u)\cdot\frac{d\vec{B}(u)}{du} \qquad (27)$$

derivada de un producto vectorial: $$\frac{d\left[\vec{A}(u)\times\vec{B}(u)\right]}{du} = \frac{d\vec{A}(u)}{du}\times\vec{B}(u) + \vec{A}(u)\times\frac{d\vec{B}(u)}{du} \qquad (28)$$

Nota: Es importante mantener el orden de los productos vectoriales durante la derivación o integración ya que ésta operación no verifica la propiedad conmutativa.