RELACIONES MATEMATICAS DE LA DINÁMICA DE LA PARTÍCULA Y DE DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS.

Comparación de las ecuaciones matemáticas que explican el comportamiento dinámico de una partícula con las ecuaciones de un sistema de partículas.

Objetivo: establecer el paralelismo entre las expresiones de ambos modelos.

	partícula	**Sistema de Partículas S. R. laboratorio**	**Sistema de Partículas S. R. CM**
Momento lineal	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$	$\vec{p}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^* = 0$
2ª ley de Newton	$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F} = m\vec{a}$	$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$	$\frac{d}{dt}\vec{p}^* = 0$
Energía cinética	$Ec = \frac{1}{2}mv^2$	$Ec = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ $Ec = Ec^* + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$	$Ec^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^{*2}$
Teorema del Trabajo y energía	$W = \Delta Ec$	$W_{ext} + W_{\text{int}} = \Delta Ec$	
Momento angular	$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$	$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$	$\vec{L}^* = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}^*_i \wedge m_i \vec{v}_i^*$
Variación del momento angular	$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$	$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}_{ext}$ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}^*}{dt} + \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM}$	

ESQUEMAS Y RESÚMENES

MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS CON RESPECTO DE UN PUNTO Y DERIVADA DEL MOMENTO ANGULAR CON RESPECTO DE UN PUNTO.

MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

$$\boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \cancel{\frac{d}{dt}\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt}\vec{p}_i$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \left(\vec{F}_{i,ex} + \sum_{j>i}^{N} \vec{F}_{i,j} + \sum_{j<i}^{N} -\vec{F}_{j,i}\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,ex} + \cancel{\sum_{j>i}^{N} \vec{r}_{i,j} \wedge \vec{F}_{i,j}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i,ex} = \vec{\tau}_{ex}}$$

Recuadro de www.sc.ehu.es/sqwpolim/FISICA/

$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \wedge m\vec{v}_i = 0$ el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo

$\vec{r}_{i,j}$ y $\vec{F}_{i,j}$ son paralelos ya que ambos tienen la dirección de la recta que une las partícula i y j, por tanto también su producto vectorial es nulo.

La variación con respecto del tiempo del momento angular de un sistema de partículas con respecto de un punto es igual al momento de las fuerzas exteriores sobre el sistema calculado con respecto al mismo punto

RELACIÓN ENTRE MOMENTO ANGULAR Y MOMENTO DE LA FUERZAS EXTERIORES

$\vec{\tau}_{ext}$ Representa el momento de las fuerzas exteriores sobre el sistema, también denominado $\vec{M}_{ext}$ en la primera tabla comparativa.

MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

$$\vec{\tau}_{ex} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,ex} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

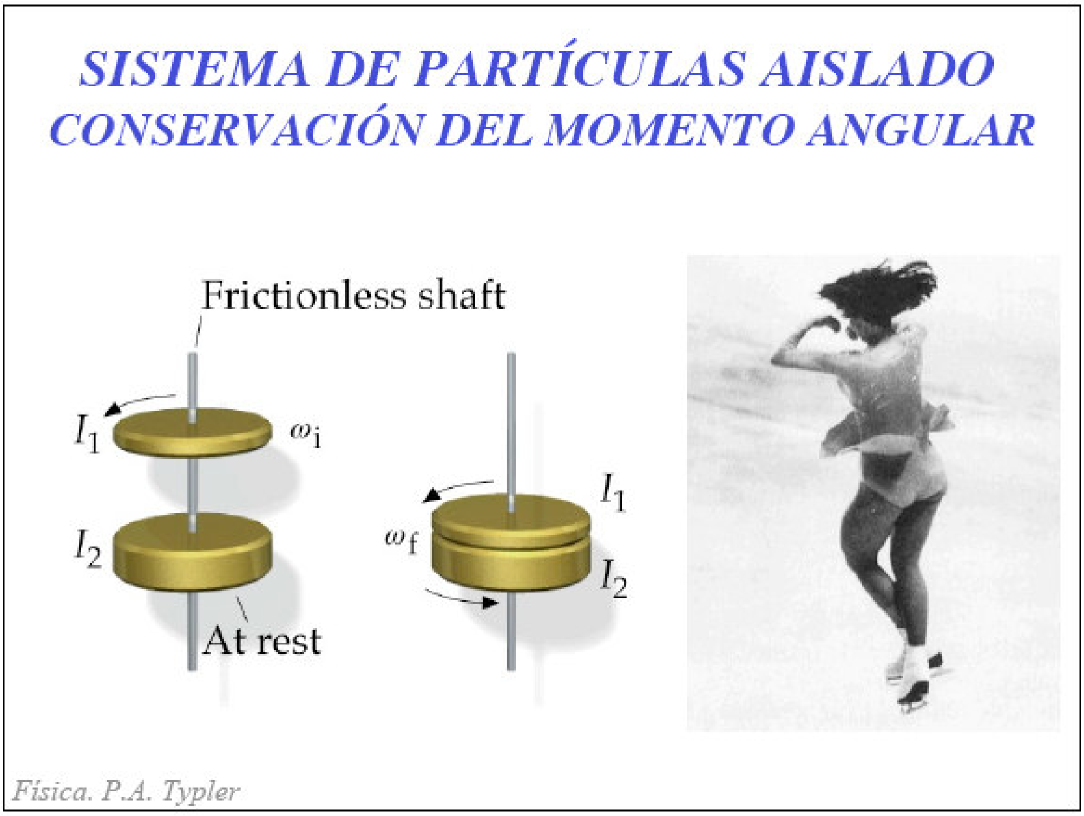
$$\vec{\tau}_{ex} = 0 \Updownarrow \vec{L} = \overrightarrow{cte}$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Recuadro de www.sc.ehu.es/sqwpolim/FISICA/

Si el momento de las fuerzas exteriores sobre un sistema de partículas es nulo, ya sea por que el sistema esta aislado o bien que, aún no estando aislado, el momento es nulo, <u>el momento angular del sistema se mantiene constante en el tiempo.</u>

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR



El cuadro representa la conservación del momento angular en dos casos:

Teniendo en cuenta que el momento de inercia I = $\sum_{i=1}^{i=N} m_i r_i^2$

1º) El disco de momento de momento de inercia I_1 que gira con velocidad angular ω_1 cae sobre el disco de momento de inercia I_2 en reposo, como no hay fuerzas exteriores sobre el sistema, se conserva el momento angular

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_{final}$$

$$I_1\omega_1 + I_2 0 = (I_1 + I_2)\omega$$

2º) La patinadora sobre hielo puede considerarse como un sistema aislado y en consecuencia su momento angular permanece constante.

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = cte$$

La patinadora al estirar los brazos aumenta su momento de inercia y por tanto debe disminuir la velocidad angular en la misma proporción de modo que el producto permanezca constante. Del mismo modo si quiere girar más rápido pegará los brazos al cuerpo a fin de disminuir su momento de inercia.

EXPRESIONES DE LA ENERGÍA PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

RELACIÓN ENTRE ENERGÍA CINÉTICA Y TRABAJO

ENERGÍA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} E_{K,i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i}$$

$$W_{ex} + W_{int} = \Delta E_K$$

$$W_{ex\ A,B} = \sum_{i=1}^{N} \int_A^B \vec{F}_{i,ex} d\vec{r}_i$$

$$W_{\text{int}\ A,B} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} \int_A^B \vec{F}_{i,j} d\vec{r}_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{N} \int_A^B \vec{F}_{i,j} d\vec{r}_{i,j}$$

Recuadro de www.sc.ehu.es/sqwpolim/FISICA/

El cambio en la energía cinética de un sistema de partículas es debido al trabajo de las fuerzas exteriores más el trabajo de las fuerzas interiores. Tanto las fuerzas exteriores como las interiores contribuyen con su trabajo, a cambiar la energía cinética total del sistema.

Si las fuerzas interiores $F_{i,j}$ son conservativas, el trabajo se puede expresar como la variación desde el punto inicial al punto final, de la energía potencial asociada a estas fuerzas que llamaremos Ep int.

En este caso se denomina energía propia del sistema U a la suma de la energía cinética más la potencial de las fuerzas interiores. El cambio de la energía propia del sistema ΔU se debe al trabajo de las fuerzas exteriores (en rojo en la tabla)

ENERGÍA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

si las F_{ij} son todas conservativas:

$$W_{\mathrm{int}\ A,B} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}\int_{A}^{B}\vec{F}_{i,j}\,d\vec{r}_{i,j} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}(E_{p,ij,A} - E_{p,ij,B}) = E_{p\,\mathrm{int}\,A} - E_{p\,\mathrm{int}\,B}$$

$U=E_K+E_{p\,int}$ ***Energía propia del sistema*** $\Rightarrow W_{ex}=\Delta U$

si F_{iex} y F_{ij} son todas conservativas:

$$\Delta(U+E_{p\,ex}) = 0$$

$$E= U+ E_{p\,ex} =E_K+ E_{p\,int}+ E_{p\,ex} = cte$$

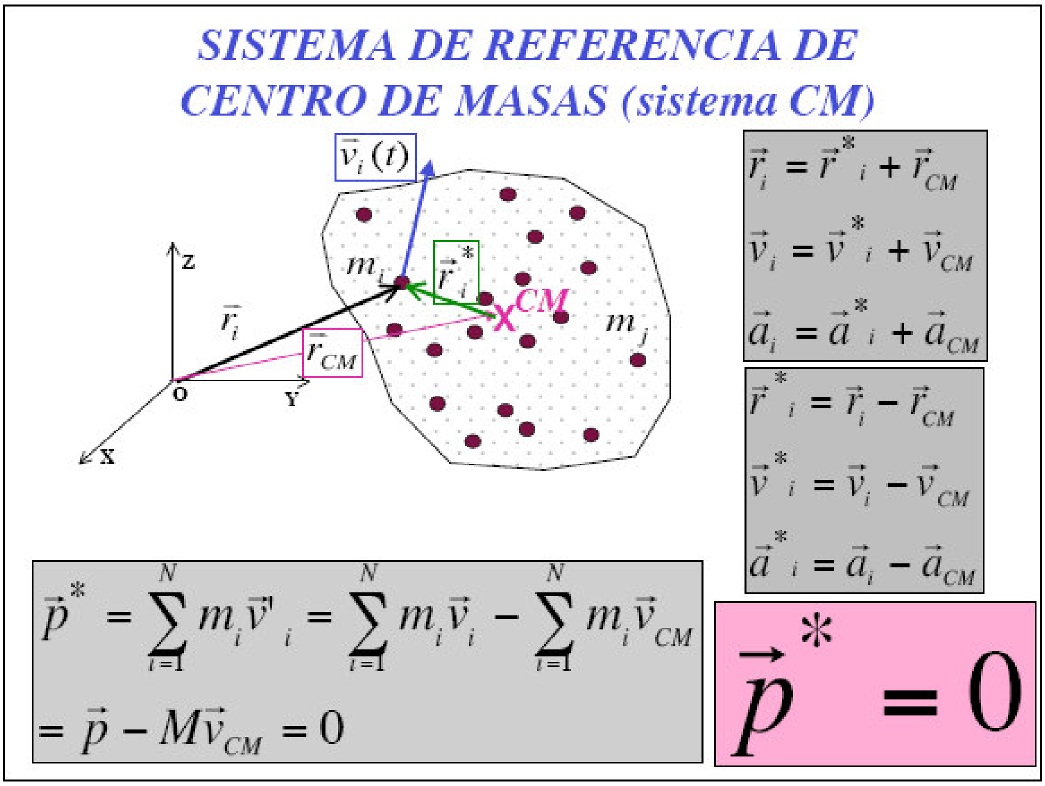
Recuadro de www.sc.ehu.es/sqwpolim/FISICA/

Si todas las fuerzas, las exteriores y la interiores son conservativas (en azul en la tabla) la energía total del sistema se mantiene constante. La energía total del sistema es la suma de la energía propia U y de la energía potencial asociada a las fuerzas exteriores $\mathbf{E_{p\,ex}}$.

SISTEMA DE REFERENCIA CM

En algunos casos es interesante tomar como sistema de referencia el CM del propio sistema de partículas, vamos a ver las relaciones matemáticas con respecto a este sistema y su relación con el sistema de referencia fijo o sistema laboratorio

MOMENTO LINEAL DE UN SISTEMA DE PARTICULAS CON RESPECTO A SU CM

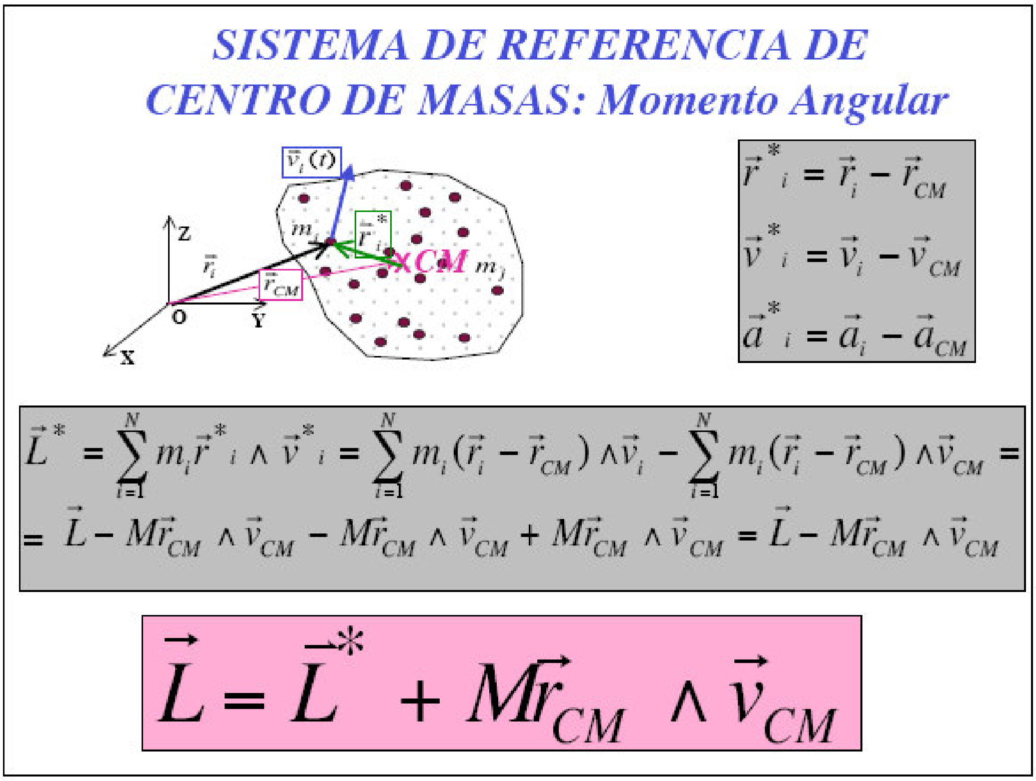


Recuadro de www.sc.ehu.es/sqwpolim/FISICA/

Recuadrado en gris tenemos la relación entre los vectores de posición de la partícula con respecto al sistema de referencia oxyz (sistema laboratorio) y con respecto al sistema CM

El momento lineal de un sistema de partículas, con respecto al CM es la suma de los momentos lineales de de todas las partículas del sistema con respecto al CM. Como vemos en el cuadro el momento lineal $\vec{p}^{\,*}$ =0

MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS CON RESPECTO AL CM

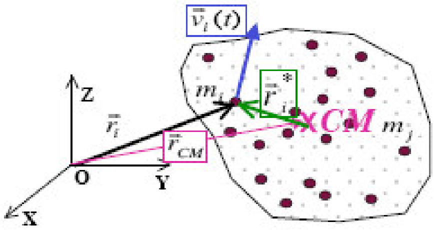


Recuadro de www.sc.ehu.es/sqwpolim/FISICA/

El momento angular de un sistema de partículas con respecto al sistema de referencia fijo O (sistema laboratorio) es igual al momento angular con respecto al centro de masas más el momento angular con respecto de O de una partícula situada en el CM moviéndose con la velocidad del CM y cuya masa M es la masa total del sistema.

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS CON RESPECTO AL CM

SISTEMA DE REFERENCIA DE CENTRO DE MASAS: Energía Cinética



$$\vec{r}^{\,*}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$$
$$\vec{v}^{\,*}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}$$
$$\vec{a}^{\,*}_i = \vec{a}_i - \vec{a}_{CM}$$

$$E^*_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v^{*\,2}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{CM})^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2$$
$$- \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i \vec{v}_{CM}) = E_K + \frac{1}{2} M \; v_{CM}^2 - M \; v_{CM}^2 = E_K - \frac{1}{2} M \; v_{CM}^2$$

$$\boxed{E_K = E^*_K + \frac{1}{2} M (\vec{v}_{CM})^2}$$

Recuadro de www.sc.ehu.es/sqwpolim/FISICA/

La energía cinética de un sistema de partículas se puede expresar como la suma de la energía cinética con respecto al CM más la energía cinética del CM considerado como una partícula que tiene la masa total del sistema.