Matemáticas 1

EJERCICIOS RESUELTOS:

Números Complejos

Elena Álvarez Sáiz

Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación

Universidad de Cantabria

Interpretación geométrica de la suma y el producto

1 Si z_1 y z_2 son complejos, ¿qué representa el número $\frac{z_1 + z_2}{2}$. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos $\lambda z_1 + \mu z_2$ si λ y μ son reales y verifican $\lambda + \mu = 1$?

Solución:

Gráficamente el afijo del número complejo

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} + i\frac{y_1 + y_2}{2}$$

representa el punto medio del vector que une el origen con el afijo del número complejo $z_1 + z_2$

- Los puntos de la forma $\lambda z_1 + \mu z_2$ son los puntos de la recta

$$\lambda z_1 + \mu z_2 = (1 - \mu) z_1 + \mu z_2 = z_1 + \mu (z_2 - z_1)$$

es decir, la recta que pasa por z_1 y cuyo vector director es $z_2 - z_1$.

2 Demuéstrese que si los puntos z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero, entonces: $z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{|z_3 - z_1| e^{i \arg(z_3 - z_1)}}{|z_2 - z_1| e^{i \arg(z_2 - z_1)}} = e^{\pi/3\, i}$$

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{|z_1 - z_2| e^{i \arg(z_1 - z_2)}}{|z_3 - z_2| e^{i \arg(z_3 - z_1)}} = e^{\pi/3\, i}$$

ya que

$$\arg(z_3 - z_1) = \arg(z_2 - z_1) + \frac{\pi}{3}$$

$$\arg\left(z_3 - z_2\right) + \frac{\pi}{3} = \arg\left(z_1 - z_2\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \Rightarrow z_3^{\ 2} - z_1 z_3 - z_2 z_3 + z_2 z_1 = z_2 z_1 - z_2^{\ 2} - z_1^{\ 2} + z_1 z_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} + z_3^{\ 2} = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Veamos si es cierto o no el recíproco, es decir, veamos si es cierto que dados z_1, z_2, z_3 son los tres diferentes verificando $z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} + z_3^{\ 2} = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ entonces forman un triángulo equilátero.

Se realiza la traslación del triangulo llevando zo al origen: $z^{*} = z - z_1$. Los números son ahora:

$$\left\{0, z_2 - z_1, z_3 - z_1\right\} = \left\{0, z_2^{*}, z_3^{*}\right\}$$

Entonces, la igualdad $z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} + z_3^{\ 2} = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ se transforma en

$$z_2^{\ *} z_3^{\ *} = z_2^{\ *2} + z_3^{\ *2}$$

despejando

$$z_3^{*2} - z_2^{*} z_3^{*} + z_2^{*2} = 0 \underset{\substack{\text{resolvemos} \\ \text{la ecuación} \\ \text{de segundo} \\ \text{grado en } z_3^{*}}}{\Rightarrow} z_3^{*} = \frac{1}{2}\left(z_2^{*} + \sqrt{z_2^{*2} - 4 z_2^{*2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_3^{*} = \frac{1}{2}\left(z_2^{*} \pm \sqrt{3} i\, z_2^{*}\right) \Rightarrow z_3^{*} = z_2^{*}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} i\right)$$

Esto significa que z_3^{*} es z_2^{*} girado $\dfrac{\pi}{3}$ radianes (60 grados) y como $\left|\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\, i\right| = 1$ se tiene que $\left|z_3^{*}\right| = \left|z_2^{*}\right|$. Por lo tanto, $\left\{0, z_2^{*}, z_3^{*}\right\}$ forman un triángulo equilátero lo que significa que $\left\{z_1, z_2^{*} + z_1, z_2^{*} + z_1 - z_1\right\} = \left\{z_1, z_2, z_3\right\}$.

3 Un triangulo equilátero tiene su centro en el origen y un vértice en el punto (1,0). Determinar los otros dos vértices.

Los ángulos que forman dos lados de un triángulo equilátero son de $\dfrac{\pi}{3}$ radianes, luego hay que avanzar $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$. Por lo tanto, como uno de los vértices es $z_1 = 1 = e^{2\pi i}$, se tiene que

$$z_2 = e^{2\pi i}e^{2\pi i/3} = e^{2\pi i/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i sen\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = e^{2\pi i}e^{2\pi i/3}e^{2\pi i/3} = e^{4\pi i/3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i sen\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

son los otros dos. En forma binómica

$$(1,0),\left(-1/2,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-1/2,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

<u>Otra forma:</u> Podía haberse resuelto el problema observando si los afijos de z_1, z_2, z_3 forman un triángulo equilátero entonces

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$

y el ángulo entre $\overrightarrow{0z_1}$ y $\overrightarrow{0z_2}$ es el mismo que entre $\overrightarrow{0z_2}$ y $\overrightarrow{0z_3}$ y el mismo que entre $\overrightarrow{0z_2}$ y $\overrightarrow{0z_1}$. Por esta razón los tres vértices son las tres raíces cúbicas de la unidad. En efecto,

$$\sqrt[3]{1} = e^{\frac{2k\pi}{3}i} \quad k = 0,1,2 \;\Rightarrow\; z_1 = e^{0i},\;\; z_2 = e^{2\pi/3\, i},\; z_3 = e^{4\pi/3\, i}$$

Coordenadas complejas conjugadas

4 Hállese la ecuación de la circunferencia

$$a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0$$

en función de las coordenadas complejas conjugadas (es decir, en función de z y de su conjugado)

Sea $z = x+iy$ y $\bar{z} = x - iy$ entonces

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = x \qquad \frac{z-\bar{z}}{2i} = y \qquad x^2+y^2 = |z|^2 = z\,\bar{z}$$

Sustituyendo en la ecuación dada de la circunferencia

$$a(z\bar{z})+2b\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)+2c\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+d=0 \;\Leftrightarrow\; az\bar{z}+bz+b\bar{z}-ciz+ci\bar{z}+d=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; az\bar{z}+z(b-ci)+\bar{z}(b+ci)+d=0$$

Módulo

5 Indicar si es correcto o falso el enunciado siguiente, razonando la respuesta:

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de módulo 1, entonces

$$\left|z_1+z_2\right|=2 \;\Leftrightarrow\; z_1=z_2$$

$\Rightarrow$ Como $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de módulo 1, llamando $\phi=\arg\left(z_1\right)$ y $\psi=\arg\left(z_2\right)$ en forma exponencial serán $z_1=e^{i\phi}$ y $z_2=e^{i\psi}$. Luego,

$$\left|z_1+z_2\right|=\sqrt{\left(z_1+z_2\right)\overline{\left(z_1+z_2\right)}}=\sqrt{\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)}=$$

$$=\sqrt{z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}}=\sqrt{2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}}$$

En consecuencia,

$$\left|z_1+z_2\right|=2 \;\Leftrightarrow\; 2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=4 \;\Leftrightarrow\; \frac{z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}}{2}=1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \operatorname{Re}\left(e^{i(\phi-\psi)}\right)=1 \;\Leftrightarrow\; \cos\left(\phi-\psi\right)=1 \;\Leftrightarrow\; \phi=\psi+2k\pi$$

y, por tanto, como $z_1=e^{i\phi}$ y $z_2=e^{i\psi}$ la última afirmación es lo mismo que decir, $z_1=z_2$.

$\Leftarrow$ La implicación en el sentido $\Leftarrow$ es trivial ya que

si $z_1=z_2$ entonces $z_1+z_2=2z_1$, y, por tanto $\left|z_1+z_2\right|=2\left|z_1\right|=2$

<u>Otra forma</u>.- También puede realizarse la demostración simplemente operando en forma binómica. Teniendo en cuenta que z_1 y z_2 son de módulo unidad su representación es

$$z_1 = \cos\phi + i sen\phi \qquad z_2 = \cos\psi + i sen\psi$$

se cumplirá

$$2 = \left|z_1 + z_2\right| = \sqrt{\left(\cos\phi + \cos\psi\right)^2 + \left(sen\phi + sen\psi\right)^2}$$

operando,

$$2 = \sqrt{\cos^2\phi + \cos^2\psi + 2\cos\phi\cos\psi + sen^2\phi + sen^2\psi + 2sen\phi sen\psi} =$$

$$= \sqrt{2 + 2\left(\cos\phi\cos\psi + sen\phi sen\psi\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\left(\phi - \psi\right)}$$

Luego,

$$2 = \left|z_1 + z_2\right| \Leftrightarrow 4 = \left|z_1 + z_2\right|^2 \Leftrightarrow 1 = \cos\left(\phi - \psi\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi - \psi = 2k\pi \Leftrightarrow \varphi = \psi + 2k\pi \underset{\substack{por\ hipótesis \\ \left|z_1\right| = \left|z_2\right| = 1}}{\Leftrightarrow} z_1 = z_2$$

y, por tanto $z_1 = z_2$.

6 Dos números complejos no nulos son tales que $\left|z_1 + z_2\right| = \left|z_1 - z_2\right|$. Probar que ${z_1}/{z_2}$ es imaginario.

Método 1.- Por hipótesis,

$$\left|z_1 + z_2\right| = \left|z_1 - z_2\right| \Leftrightarrow \left|z_1 + z_2\right|^2 = \left|z_1 - z_2\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z_1 + z_2\right)\overline{\left(z_1 + z_2\right)} = \left(z_1 - z_2\right)\overline{\left(z_1 - z_2\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$$

luego

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}} = \frac{\operatorname{Re}\left(z_2\overline{z_1}\right) + i\operatorname{Im}\left(z_2\overline{z_1}\right)}{\left|z_1\right|^2} = i\frac{\operatorname{Im}\left(z_2\overline{z_1}\right)}{\left|z_1\right|^2}$$

donde se ha aplicado que $\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$ y, por tanto, ${z_1}/{z_2}$ es imaginario.

Método 2.- Sea

$$z_1 = a + bi \qquad z_2 = c + di$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{ca + db + i(da - cb)}{a^2 + b^2} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + i\frac{da - cb}{a^2 + b^2} \qquad (1)$$

Por otro lado, por hipótesis

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$$

luego,

$$|(a+c) + i(b+d)| = |(a-c) + i(b-d)| \Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd = a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + d^2 - 2bd \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4ac = -4bd \Leftrightarrow ac = -bd$$

Finalmente, sustituyendo en (1)

$$\frac{z_2}{z_1} = i\frac{da - cb}{a^2 + b^2}$$

que demuestra que es un número imaginario puro.

7 Calcular el valor de a y b para que $\frac{3b - 2ai}{4 - 3i}$ sea real y de módulo unidad

Operando

$$z = \frac{(3b - 2ai)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{12b - 8ai + 9bi + 6a}{16 + 9} = \frac{12b + 6a}{25} + i\frac{9b - 8a}{25}$$

- Si se quiere que sea real

$$\frac{9b - 8a}{25} = 0 \Rightarrow 9b - 8a = 0 \Rightarrow b = \frac{8a}{9}$$

- Si además es de módulo uno

$$\frac{12b + 6a}{25} = 1 \Rightarrow 12b + 6a = 25 \Rightarrow \frac{96a}{9} + 6a = 25 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

Luego, los valores pedidos son

$$a = \frac{2}{3} \quad b = \frac{4}{3}$$

Lugares geométricos

8 Describir los conjuntos de puntos del plano determinados por las siguientes ecuaciones

(a) $\left|z - 2i\right| \le 1$

Sea $z = a + bi$ entonces $z - 2i = a + (b-2)i$, se cumplirá

$$\left|z - 2i\right| \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2 + (b-2)^2} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + (b-2)^2 \le 1$$

El conjunto buscado es el interior del círculo de centro (0,2) y radio 1.

(b) $\left|z - 2\right| > \left|z - 3\right|$

Sea $z = x + iy$ entonces $z - 2 = (x-2) + iy$ y $z - 3 = (x-3) + iy$, sus módulos

$$\left|z - 2\right| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \qquad \left|z - 3\right| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

y por tanto,

$$\left|z - 2\right| > \left|z - 3\right| \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 > (x-3)^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4 - 4x + y^2 > x^2 + 9 - 6x + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 5 \Leftrightarrow \quad x > {}^{5}\!/_{2}$$

La solución es el conjunto

$$R = \left\{ x + i\,y \;/\; x > 5\,/\,2,\; x, y \in \Re \right\}$$

(c) $\left|z - 1\right| + \left|z + 3\right| = 10$

Forma 1: Por definición de elipse se trata de una elipse de focos los puntos 1 y =3 y semieje mayor 5

Forma 2: Sea $z = x + iy$, entonces $z - 1 = (x-1) + iy$, $z + 3 = (x+3) + iy$, luego

$$\left|z-1\right| + \left|z+3\right| = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\left(x-1\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x+3\right)^2 + y^2} = 10$$

Pasando una de las raíces al segundo miembro y elevando al cuadrado

$$\left(x-1\right)^2 + y^2 = \left[10 - \sqrt{\left(x+3\right)^2 + y^2}\right]^2$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 = 100 + (x+3)^2 + y^2 - 20\sqrt{\left(x+3\right)^2 + y^2}$$

$$-8x - 108 = -20\sqrt{\left(x+3\right)^2 + y^2}$$

$$2x + 27 = 5\sqrt{\left(x+3\right)^2 + y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado,

$$\left(2x+27\right)^2 = 25\left(\left(x+3\right)^2 + y^2\right)$$

$$4x^2 + 27^2 + 108x = 25(x+3)^2 + y^2 = 25(x^2 + 9 + 6x + y^2)$$

$$21x^2 + 42x + 25y^2 = 504$$

Completando cuadrados

$$21(x^2 + 2x) + 25y^2 = 504$$

$$21\left((x+1)^2 - 1\right) + 25y^2 = 504$$

$$21(x+1)^2 + 25y^2 = 525$$

Se trata de la elipse

$$\frac{(x+1)^2}{525/21} + \frac{y^2}{525/25} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{5^2} + \frac{y^2}{21} = 1$$

(d) $z\,\bar{z} > 4$

Sea $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ entonces

$$z\,\bar{z} > 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+iy\right)\left(x-iy\right) = x^2 + y^2 = \left|z\right|^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left|z\right| > 2$$

Luego $z\,\bar{z} > 4$ es la región del plano exterior de la circunferencia de centro (0,0) y radio 2.

(e) $\left|z-3i\right|=4$

Sea $z=x+iy$, $z-3i=x+i(y-3)$ entonces

$$\left|z-3i\right|=4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+(y-3)^2=16$$

Se trata de la circunferencia de centro (0,3) = 3i y radio 4.

(f) $\left|z\right|<1, \operatorname{Im} z>0$

Se trata del conjunto

$$\left\{x+iy \;/\; x^2+y^2<1 \quad , \quad y>0\right\}$$

es decir, del interior del semicírculo superior de radio 1.

(g) $z^2+\overset{-2}{z}=1$

Sea $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, entonces

$$z^4+1=z^2 \Leftrightarrow z^4-z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\begin{cases} e^{\frac{\pi}{6}i} \\ e^{-\frac{\pi}{6}i} \end{cases}$$

Luego:

$$z=\begin{cases} \sqrt{e^{\frac{\pi}{6}i}}=\begin{cases} e^{\frac{\pi}{12}i} \\ e^{\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)i} \end{cases} \\ \sqrt{e^{-\frac{\pi}{6}i}}=\begin{cases} e^{-\frac{\pi}{12}i} \\ e^{\left(-\frac{\pi}{12}+\pi\right)i} \end{cases} \end{cases}$$

9 Consideremos el número complejo:

$$z=x+iy=\frac{1}{2+\cos t+isent}$$

Probar que cuando "t" varia en los numeros reales, z se mueve sobre la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que uno los puntos (1/3,0),(1,0).

Calculamos en primer lugar la expresión de x y de y en función de t. Multiplicando por el conjugado del denominador

$$\frac{1(2+\cos t - isent)}{(2+\cos t + isent)(2+\cos t - isent)} =$$

$$= \frac{2+\cos t}{(2\cos t)^2 + sen^2 t} - i\frac{sent}{4+\cos^2 t + 4\cos t + sen^{2t}} = \frac{2+\cos t}{5+4\cos t} - i\frac{sent}{5+4\cos t}$$

Luego

$$x = \frac{2+\cos t}{5+4\cos t} \qquad y = \frac{-sent}{5+4\cos t}$$

Para comprobar que $\left(x,y\right)$ está en la circunferencia de centro $\left(a,b\right)$ y radio r basta verificar que $\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 = r^2$. En nuestro caso $\left(a,b\right) = \left(\frac{2}{3},0\right)$ y $r = \frac{1}{3}$. Es evidente que cualquier punto de la forma

$$\left(\frac{2+\cos t}{5+4\cos t}, \frac{-sent}{5+4\cos t}\right)$$

cumple la ecuación de la circunferencia. En efecto,

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2+\cos t}{5+4\cos t} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-sent}{5+4\cos t}\right) =$$

$$= \frac{\left(6+3\cos t - 10 - 8\cos t\right)^2}{9\left(5+4\cos t\right)^2} + \frac{sen^2 t}{(5+4\cos t)^2} =$$

$$= \frac{\left(-4-5\cos t\right)^2 + 9sen^2 t}{9\left(5+4\cos t\right)^2} = \frac{16+25\cos^2 t + 40\cos t + 9sen^2 t}{9(5+4\cos t)^2} =$$

$$= \frac{25+16\cos^2 t + 40\cos t}{9(5+4\cos t)^2} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Potencias de exponente natural

10 Escribir en forma binómica el complejo:

$$z=\left(\frac{1+\cos x+isenx}{1+\cos x-isenx}\right)^n$$

Método 1.- Sea

$$z_1=1+\cos x+isenx=1+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=$$

$$=1+\frac{e^{2ix}+1}{2e^{ix}}+\frac{e^{2ix}-1}{2e^{ix}}=1+e^{ix}$$

$$\overline{z_1}=1+\cos x-isenx=1+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}-i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=$$

$$=1+\frac{e^{2ix}+1}{2e^{ix}}-\frac{e^{2ix}-1}{2e^{ix}}=1+e^{-ix}$$

Por lo tanto,

$$z=\left(\frac{z_1}{\overline{z_1}}\right)^n=\left(\frac{1+e^{ix}}{1+e^{-ix}}\right)^n=\left(\frac{e^{ix}\left(1+e^{-ix}\right)}{\left(e^{ix}+1\right)}\right)^n=e^{inx}$$

Método 2.- Sea

$$z_1=1+\cos x+isenx \qquad \overline{z_1}=1+\cos x-isenx$$

entonces

$$z=\left(\frac{z_1}{\overline{z_1}}\right)^n=\frac{z_1^{\,n}}{\overline{z_1}^{\,n}}=\frac{z_1^{\,n}\,z_1^{\,n}}{\overline{z_1}^{\,n}\,z_1^{\,n}}$$

Si consideramos que en forma exponencial la expresión de z_1 es $re^{i\theta}$ se tiene

$$z=\frac{z_1^{\,n}\,z_1^{\,n}}{\overline{z_1}^{\,n}\,z_1^{\,n}}=\frac{z_1^{\,2n}}{r^{2n}}=\frac{\left[r\left(\cos\theta+isen\theta\right)\right]^{2n}}{r^{2n}}=\frac{r^{2n}\left(\cos 2n\theta+isen2n\theta\right)}{r^{2n}}$$

Simplificando,

$$z = \cos 2n\theta + isen2n\theta$$

Para obtener la expresión en función de x se considera que

$$\theta = arctg\frac{senx}{1+\cos x} = arctg\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}} = arctg\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = arctg\left(tg\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$$

donde se ha utilizado

$$1-\cos x = 2sen^2\frac{x}{2} \qquad 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

Por lo tanto,

$$z = \left(\frac{z_1}{\overline{z_1}}\right)^n = \cos 2n\theta + isen2n\theta = \cos nx + isen\, nx$$

11 Sabiendo que $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos t$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, hallar lo más simplificado posible $z^n + \dfrac{1}{z^n}$

Se tiene que

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos t \;\Rightarrow\; z^2 + 1 = 2z\cos t \;\Rightarrow\; z^2 - \left(2\cos t\right)z + 1 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; z = \frac{1}{2}(2\cos t \pm \sqrt{4\cos^2 t - 4} = \cos t \pm \sqrt{\cos^2 t - 1} = \cos t \pm isent$$

Por lo tanto, $z^n = \cos nt \pm isennt$. Por otro lado,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos t \pm isent} = \frac{\cos t \mp isent}{\cos^2 t + sen^2 t} = \cos t \mp sent \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{z^n} = \cos tn \mp sentn$$

La expresión que nos piden simplificar será

$$z^n + \frac{1}{z^n} = \cos nt \pm isennt + \cos nt \mp isennt \quad\Rightarrow\quad z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos nt$$

Raíces enésimas

12 Calcular $z = \sqrt[6]{1-\sqrt{3}i}$

Calculando su módulo y argumento

$$r = \left| z \right| = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\phi = \arg(z) = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}$$

se tiene que sus raíces sextas son:

$$z_k = \sqrt[6]{2}_{\frac{-\pi/3+2k\pi}{6}} \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

13 (a) Demuestre que la suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero.
(b) Demuestre que el producto de las raíces n- enésimas de la unidad es 1 ó –1.

(a) Las raíces n- enésimas de la unidad son de la forma:

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0,1,\ldots,n-1$$

Por tanto,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2\kappa\pi}{n}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i\frac{4\pi}{n}} + \ldots + e^{i2\frac{n-1}{n}\pi}$$

Esto es la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón $e^{\frac{2\pi}{n}i}$ y primer termino 1, es decir,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{n}i}} = 0$$

(b) Considerando ahora el producto,

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = 1 * e^{i\frac{2\pi}{n}} * e^{i\frac{4\pi}{n}} * \ldots * e^{i2\frac{n-1}{n}\pi} = e^{\left(0+i\frac{2\pi}{n}+i\frac{4\pi}{n}+\ldots+i2\frac{n-1}{n}\pi\right)} = e^{\frac{2\pi}{n}i\sum_{k=0}^{n-1}k}$$

como, $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ se tiene

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = e^{(n+1)\pi i} = \begin{cases} -1 & si\ n\ par \\ 1 & si\ n\ impar \end{cases}$$

Logaritmos complejos

14 De entre todas las raíces n-ésimas del complejo $1+\sqrt{3}i$. ¿Hay alguna raíz cuyo logaritmo principal sea real?

Calculamos en primer lugar $\sqrt[n]{1+\sqrt{3}\,i}$. Por definición, $\sqrt[n]{z}$ son los números complejos

- de módulo: $\sqrt[n]{r}$
- de argumento: $\frac{\phi + 2\kappa\pi}{n}$ con $k = 0,1,2,\ldots(n-1)$;

En este caso $z = 1+\sqrt{3}\,i$, luego

$$r = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\phi = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = arctg\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\pi}{3}.$$

Por tanto, $\sqrt[n]{1+\sqrt{3}i}$ tendrá

- por módulo: $\sqrt[n]{2}$
- por argumento: $\frac{\pi/3 + 2\kappa\pi}{n}$ con $k = 0,1,2,\ldots(n-1)$

es decir,

$$z_k = \sqrt[n]{2}_{\frac{\pi/3+2k\pi}{n}} \quad \text{con } k = 0,1,2,\ldots(n-1)$$

$$z_k = \sqrt[n]{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\pi/3 + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{con } k = 0,1,2,\ldots(n-1)$$

Teniendo en cuenta que el logaritmo principal de z_k es

$$\log z_k = \ln\left|z_k\right| + i\arg\left(z_k\right)$$

se cumplirá que

$$\log z_k \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \arg\left(z_k\right) = 0$$

es decir,

$$\frac{\pi/3 + 2k\pi}{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi/3 + 2k\pi = 0 \quad \Leftrightarrow k = \frac{-\pi/3}{2\pi} = -\frac{1}{6}$$

Como los valores posibles de k son $0,1,2,\ldots(n-1)$ entonces la pregunta planteada sobre si hay alguna raíz cuyo logaritmo principal sea real tiene por respuesta que no existe ninguna raíz cuyo logaritmo principal sea real.

15 Calcular el siguiente número complejo: $z = \frac{2}{i}\log\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$

Como

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i$$

$$\log i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

El valor pedido es:

$$z = \frac{2}{i}\log i = \pi + 4k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

16 Dado $a + bi = \log\sqrt{\omega}$ siendo ω tal que $\frac{\omega}{1+i\sqrt{3}}$ es real y el módulo de ω es la unidad. Hallar $a + bi$.

Se considera $\omega = c + di$ cumpliendo $\left|\omega\right|^2 = c^2 + d^2 = 1$. Se cumplirá que

$$\begin{cases} r = \dfrac{\omega}{1+i\sqrt{3}} \in \mathbb{R} \\ \left|\,\omega\,\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{\left(c+di\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)} \in \mathbb{R} \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{\left(c+d\sqrt{3}\right)+i\left(-c\sqrt{3}+d\right)}{4} \in \Re \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c\sqrt{3}+d = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \pm\frac{1}{2} \quad d = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Luego

$$\log\sqrt{\omega_1} = \ln\left(e^{\frac{\pi/3+2k\pi}{2}i}\right) = \left(\frac{\pi}{6}+k\pi+2k'\pi\right)i \quad k'\in Z,\ k = 0{,}1$$

$$\log\sqrt{\omega_2} = \ln\left(e^{\frac{-2\pi/3+2k\pi}{2}i}\right) = \left(-\frac{\pi}{3}+k\pi+2k'\pi\right)i \quad k'\in \mathbb{Z},\ k = 0{,}1$$

Observación: Puede ser interesante considerar la expresión de ω de la forma: $\omega = e^{it} = \cos t + i sen t$ ya que al tener módulo uno quedará perfectamente determinado si se conoce $\arg\left(\omega\right) = t$.

17 (a) Escribir la forma binómica y exponencial el número complejo $z = \dfrac{i^x}{1+\sqrt{2}i}$ dando $x =$ (numero de lista del alumno en clase) + 1000

(b) Calcular $\log z = \log\left(\dfrac{i^x}{1+\sqrt{2}i}\right)$

Supongamos que $x = 121 + 1000 = 1121$

$$z = \frac{i^{1121}}{1+\sqrt{2}i} = \frac{i^{4*28+1}}{1+\sqrt{2}i} = \frac{i}{1+\sqrt{2}i} = \frac{\left(1-\sqrt{2}i\right)i}{\left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)} = \frac{i+\sqrt{2}}{1+2} = \frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}i$$

En forma exponencial z se expresará

$$z=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\phi i}\quad ya\;\;que\quad \begin{cases} |z|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \phi=arctg\left(\frac{1/3}{\sqrt{2}/3}\right)\end{cases}$$

Calculamos su logaritmo

$$\log z=\log\left(\frac{i^x}{1+\sqrt{2}i}\right)=\log\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}i\right)=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{3}}{3}+i\left(arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2k\pi\right)\quad k\in\mathbb{Z}$$

La rama principal se obtiene para $k=0$

$$\log z=\ln\frac{\sqrt{3}}{3}+i\left(arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Potencias complejas

18 Sea "z" un número complejo de representación binómica z = a + bi y consideramos la potencia $(1+i)^z$. Se pide, para cada una de las condiciones siguientes el conjunto de todos los complejos que la cumplen y un ejemplo:

$$(1+i)^z=e^{z\log(1+i)}=e^{(x+iy)\log(1+i)}=e^{(x+iy)\left(\log\sqrt{2}+\left(\pi/4+2k\pi\right)i\right)}=$$

$$=e^{x\log\sqrt{2}-y\left(\pi/4+2k\pi\right)}e^{\left(y\log\sqrt{2}+x\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)i}\qquad k\in\mathbb{Z}$$

A - Que la potencia tenga algún valor real.

$$sen\left(y\log\sqrt{2}+x\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)=0\;\Leftrightarrow\; y\log\sqrt{2}+x\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=k'\pi\qquad k'\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{k´\pi - y\log\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4} + 2k\pi} \qquad k, k´ \in \mathbb{Z}$$

Basta dar valores a y, k y k´para obtener x. En esos casos $z = x + i\,y$ verificara que su potencia tiene algún valor real.

B – Que la potencia tenga resultado único.

Si x es entero, $y = 0$ el resultado es único.

$$e^{x\log\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi x}{4} + isen\frac{\pi x}{4}\right)$$

C – Que la potencia tenga sólo un número finito de resultados

Si $x = p\,/\,q$ e $y = 0$ sólo hay q resultados correspondientes a $k = 0,1,2,\ldots,q-1$.

D – Que la potencia tenga todos los resultados con el mismo modulo

$$e^{x\log\sqrt{2} - y\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} = cte \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

E – Que la potencia tenga todos los resultados con el mismo argumento.

$$y\log\sqrt{2} + x\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = cte \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{Z}$$

19 Calcular $\log_{2-2i}(1+i)$

Aplicando la definición

$$\log_{2-2i}(1+i) = \frac{\log(1+i)}{\log(2-2i)} = \frac{\ln\sqrt{2} + \left(\pi/4 + 2k\pi\right)i}{\ln 2\sqrt{2} + \left(-\pi/4 + 2k'\pi\right)i} =$$

$$= \frac{\left[m\sqrt{2} + \left(\pi/4 + 2k\pi\right)i\right]\left[m2\sqrt{2} - \left(-\pi/4 + 2k'\pi\right)i\right]}{\left(m2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\pi/4 + 2k'\pi\right)^2}$$

siendo $k, k' \in \mathbb{Z}$

Polinomios

20 Hallar los números complejos z tales que

$$z^2 + 2\bar{z}^2 + z - \bar{z} + 9 = 0$$

Sea $z = a + bi$ debemos encontrar a y b de forma que:

$$\left(a+bi\right)^2 + 2\left(a-bi\right)^2 + \left(a+bi\right) - \left(a-bi\right) + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 + 2abi + 2a^2 - 2b^2 - 4abi + 2bi + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3a^2 - 3b^2 + 9) + i(-2ab + 2b) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 3b^2 + 9 = 0 \\ -2ab + 2b = 0 \end{cases}$$

Se distinguen dos casos:

Caso 1: $b = 0$, entonces por la primera ecuación $a^2 = -3$, esto es absurdo pues a y b son números reales.

Caso 2: $b \neq 0$, entonces $a = +1$, y sustituyendo en la primera ecuación

$$-3b^2 - 12 \quad \Rightarrow \quad b = \pm 2$$

Luego los números complejos son:

$$z_1 = +1 + 2i \qquad z_2 = +1 - 2i$$

21 ¿Cuántas raíces tienen los polinomios? ¿Puedes decir algo sobre el número de raíces reales? ¿Por qué?

(a) $p(x) = \left(\sqrt{2} + 2i\right)x^5 + 3x^2 + 2i$

5 raíces en $\mathbb{C}$. No se puede decir nada sobre las reales porque $p(x)$ no es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$.

(b) $p(x) = \sqrt{2}x^7 + 3x^6 + 2$

7 raíces en $\mathbb{C}$. Tiene al menos una real por ser el grado impar.

(c) $p(x) = \sqrt{3}x^5 + 3x^2 + 2$

5 raíces en $\mathbb{C}$. Tiene al menos una real por ser grado impar.

(d) $p(x) = \sqrt{3}x^7 + (\sqrt{2} + 2i)x^6 + 2$

7 raíces en $\mathbb{C}$. No se puede decir nada sobre las reales porque $p(x)$ no es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$.

22 Si $F(z)$ es un polinomio con coeficientes reales y $F(2+3i) = 1 - i$ ¿a qué es igual $F(2-3i)$. ¿Queda determinada $F(a-bi)$ conociendo $F(a+bi)$, si los coeficientes de $F(z)$ no son todos reales?

a) Sea $F(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \quad a_n \neq 0$, entonces como sus coeficientes son reales

$$F(\overline{z}) = a_0 + a_1\overline{z} + ... + a_n\overline{z^n} = \overline{\left(a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n\right)} = \overline{F(z)}$$

luego,

$$F(2-3i) = \overline{F(2-3i)} = \overline{1-i} = 1+i$$

b) En el caso de que los coeficientes de $F(z)$ no sean todos reales no se determina el valor de $F(a-bi)$ conocido el de $F(a+bi)$. Por ejemplo, en el caso de $F(z) = iz^2$

$$F(2+3i) = i(2+3i)^2 = i(4+12i-9) = i(-5+12i) = -12-5i$$

$$F(2-3i) = i(2-3i)^2 = i(4-12i-9) = i(-5-12i) = 12-5i$$

23 Hallar la relación que deben verificar los coeficientes a, b, c, d reales para que las raíces de la ecuación

$$z^2 + (a+bi) + (c+di) = 0$$

tengan el mismo argumento.

Sean z_1, z_2 las raíces. Expresándolas en forma exponencial serán

$$z_1 = \rho_1 e^{\theta i}$$
$$z_2 = \rho_2 e^{\theta i}$$

Como,

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = z^2 + (a + bi)z + (c + di)$$

se cumple que $z_1 z_2 = c + di$ y $z_1 + z_2 = -\left(a + bi\right)$. Por lo tanto,

$$z_1 * z_2 = c + di \Rightarrow \rho_1 \rho_2 e^{2\theta i} = c + di$$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 + z_2 = (\rho_1 + \rho_2)e^{\theta i} \\ z_1 + z_2 = -(a + bi) \end{array}\right\} \Rightarrow (\rho_1 + \rho_2)e^{\theta i} = -a - bi$$

luego,

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1 \rho_2 \cos 2\theta = c \\ \rho_1 \rho_2 sen 2\theta = d \\ \left(\rho_1 + \rho_2\right)\cos\theta = -a \\ \left(\rho_1 + \rho_2\right) sen\theta = -b \end{array}\right.$$

De donde,

$$tg 2\theta = \frac{d}{c} \qquad tg\theta = \frac{b}{a}$$

de relacionar la tangente del ángulo doble con la tangente se encontrará la relación entre los coeficientes. Como

$$tg 2\theta = \frac{sen 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2 sen\theta \cos\theta}{\cos^2\theta - sen^2\theta} = \frac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta}$$

Entonces $\frac{d}{c} = 2\frac{\frac{b}{a}}{1 - b^2 / a^2} = 2\frac{ab}{a^2 - b^2}$

La relación buscada es

$$\frac{d}{c} = 2\frac{ab}{a^2 - b^2} \quad si \;\; a^2 \neq b^2$$

Nota: Si en la solución de algún ejercicio crees que hay algún error ponte en contacto con la profesora para su corrección.