# Matemáticas 1

## EJERCICIOS RESUELTOS:

## Sucesiones numéricas

**Elena Álvarez Sáiz**

Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación

Universidad de Cantabria

## Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas

### 1 Sucesiones monótonas: ejemplos

- La sucesión -1, -2, 3, -4, -5, 6, -7, -8, 9 ... no es monótona.
- La sucesión de término general $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ tampoco es monótona.
- La sucesión de término general $a_n = n$ es monótona creciente y también estrictamente creciente.
- La sucesión $-1$, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2 ... es monótona creciente, pero no es estrictamente creciente.
- La sucesión de término general $a_n = -n^2$ es monótona decreciente y es también estrictamente decreciente.
- La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$ es monótona decreciente, sin embargo no es estrictamente decreciente.

### 2 Estudiar la monotonía de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{2n-1}{n} \qquad b_n = \frac{8n}{1+2n} \qquad c_n = \frac{3n}{n+1} \qquad d_n = \frac{1}{n^3}$$

Solución:

a) Vamos a probar que los términos de esta sucesión verifican $a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, es decir que se trata de una sucesión monótona estrictamente creciente.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$$
$$= \frac{(2n+1)\cdot n - (n+1)(2n-1)}{(n+1)\cdot n} = \frac{\cancel{2}n^2 + \cancel{n} - \cancel{2}n^2 - \cancel{n} + 1}{(n+1)\cdot n} = \frac{1}{(n+1)\cdot n} > 0$$

el carácter positivo del anterior cociente está garantizado porque n es un número natural.

b) En este caso vamos a demostrar que $b_n \leq b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con lo cual la sucesión será monótona creciente.

$$b_n \leq b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{8n}{1+2n} \leq \frac{8 \cdot (n+1)}{1+2 \cdot (n+1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{8n}{1+2n} \leq \frac{8n+8}{1+2n+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{8n} + \cancel{16n^2} + \cancel{16n} \leq \cancel{8n} + 8 + \cancel{16n^2} + \cancel{16n} \Leftrightarrow 0 \leq 8$$

lo cual es siempre cierto.

c) La sucesión dada es creciente, ya que $c_n \leq c_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, pues

$$c_n \leq c_{n+1} \Leftrightarrow \frac{3n}{n+1} \leq \frac{3 \cdot (n+1)}{(n+1)+1} \Leftrightarrow \frac{3n}{n+1} \leq \frac{3n+3}{n+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{3n^2} + \cancel{6n} \leq \cancel{3n^2} + \cancel{3n} + \cancel{3n} + 3 \Leftrightarrow 0 \leq 3$$

la expresión última a la cual hemos llegado es siempre cierta, luego la desigualdad inicial también lo es.

d) En este caso demostraremos que $d_n > d_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, es decir que la sucesión es monótona estrictamente decreciente.

$$d_n > d_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n^3} > \frac{1}{(n+1)^3} \Leftrightarrow (n+1)^3 > n^3$$

esta desigualdad es cierta para cualquier número natural, luego se cumple siempre.

## 3 Convergencia, divergencia: ejemplos

1. La sucesión cuyos primeros términos son los siguientes

$$1,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 5,\ \frac{1}{6},\ 7,\ldots$$

Esta sucesión no es convergente, pero tampoco tiende a $\infty$ ni a $-\infty$. Los términos impares se hacen infinitamente grandes a medida que n crece. Sin embargo, los términos pares tienden a 0, para n suficientemente grande. Se dice que esta sucesión no tiene límite o bien que su carácter es oscilante.

2. La sucesión de término general $a_n = (-1)^n \cdot n$, cuyos primeros términos son:

-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8,...

Los términos de esta sucesión tampoco se acercan a un número concreto. Tienden a $\infty$ los términos pares y tienden a $-\infty$ los términos impares. Por tanto, tampoco tiene límite, son oscilantes.

## 4 Monotonía y acotación de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

El término general de esta sucesión es una expresión indeterminada del tipo $1^\infty$, luego no es evidente que sea convergente. Se trata de una sucesión de números reales positivos.

- Comprobamos en primer lugar que la sucesión es creciente.

Por aplicación de la fórmula del binomio de Newton, tenemos

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} = \\
&= 1+1+\frac{n\cdot(n-1)}{2!\cdot n^2} + \dots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!\cdot n^n} = \\
&= 2+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

la expresión de $a_n$ consta de n sumandos. El término siguiente se expresará así

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \\
&+\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

Esta expresión consta de n+1 sumandos. Como los sumandos de $a_{n+1}$ son mayores que sus correspondientes de $a_n$, salvo el primero que es igual, resulta que

$$a_n < a_{n+1} \ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

luego la sucesión $a_n$ es creciente.

- Vamos a comprobar ahora que la sucesión está acotada. Consideramos para ello las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \\
&\qquad + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
b_n &= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} \\
c_n &= 2+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{progresion\ \ geometrica}
\end{aligned}
$$

Comparándolas término a término resulta que, a partir de n = 3, se verifica:

$$2 < a_n < b_n < c_n = 3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

es decir, $$2 < a_n < 3\,,$$

luego la sucesión $a_n$ está acotada. Se puede asegurar, por tanto, que la sucesión de término general $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ es convergente, estando su límite comprendido entre 2 y 3. A este límite se le designa con el nombre de número e. Se trata de un número irracional cuyas diez primeras cifras decimales son:

$$e \approx 2'7182818284$$

5 Se considera para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ la ecuación:

$$\left|n^6x^2 - \frac{13}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

y se define para cada natural $n \in \mathbb{N}$ el número $a_n$ como la suma de las raíces positivas de esta ecuación. Se pide: encontrar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto formado por los números reales $a_n$, es decir, el conjunto $\left\{a_n \;/\; n \in \mathbb{N}\right\}$

Solución (Curso 03-04)

Para cada número natural n consideramos la ecuación $\left|n^6x^2 - \dfrac{13}{2}\right| = \dfrac{5}{2}$. Las raíces de esta ecuación son los valores x que cumplen:

$$n^6x^2 - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} \qquad \text{ó} \qquad -\left(n^6x^2 - \frac{13}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

Nota: En este paso aplico la definición de valor absoluto. Si el valor absoluto de A es 5/2 es porque A es 5/2 ó A es –5/2. También podría haber elevado al cuadrado y resolver la ecuación pero me quedaría de grado cuatro y habría que realizar más cálculos.

- Resolviendo $n^6x^2 - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow n^6x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{n^6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{n^3}$
- Resolviendo $-\left(n^6x^2 - \frac{13}{2}\right) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow n^6x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{n^3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{n^3}$

Para cada n la suma de las raíces positivas de la ecuación $\left|n^6x^2 - \frac{13}{2}\right| = \frac{5}{2}$ es $\frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^3}$.

El conjunto para el que hay que calcular el supremo, ínfimo, máximo y mínimo es $A = \left\{\frac{5}{n^3} \;/\; n \in \mathbb{N}\right\}$ se cumple que el supremo es 5 y el ínfimo es 0. Como el supremo está en el conjunto (para n=1) se trata del máximo pero el ínfimo no es mínimo porque no es un elemento del conjunto A.

## Cálculo de límites: Definición

6 Demostrar, según la definición de límite, que se verifica: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = 0 \quad , \quad con \;\; r > 1$. ¿Qué sucede si r < 1?

- Supongamos r>1. Según la definición de límite, hay que encontrar la expresión de $n_0$ para cada $\varepsilon > 0$, tal que $\left|\frac{1}{r^n} - 0\right| < \varepsilon \quad si \quad n > n_0$.

$$\left|\frac{1}{r^n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r^n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < r^n \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n \cdot \log(r) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log(r)} < n$$

pues hemos supuesto desde el principio que r > 1, luego log (r) > 0. Así pues, si tomamos $n_0 = \frac{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\log(r)}$ se cumple $\left|\frac{1}{r^n} - 0\right| < \varepsilon$

- Si r $<$ 1, será log (r) $<$ 0. Como $\varepsilon$ es muy pequeño, verifica $\varepsilon$ $<$ 1, es decir log( $\varepsilon$ )$<$ 0, luego $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\log(\varepsilon) > 0$.

  Teniendo en cuenta que siempre es n $>$ 0, nunca puede ser $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n \cdot \log(r)$, puesto que n. log (r) será siempre negativo, mientras que $\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ es positivo. Por lo tanto, si r<1 la sucesión no puede tender a cero.

7 Demostrar, aplicando la definición de límite, que se verifican los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-2} = 1$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)} = 2$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{3n^2+1} = 8$

Solución

(a) Se trata de ver que

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \textit{existe } n_0 \textit{ de forma que } \left|\frac{n+1}{n-2} - 1\right| < \varepsilon \;\; \textit{si} \;\; n > n_0$$

Observamos que

$$\left|\frac{n+1}{n-2} - 1\right| < \varepsilon \iff \frac{3}{n-2} < \varepsilon \iff \frac{3}{\varepsilon} < n - 2 \iff \frac{1}{\varepsilon} + 2 < n$$

Luego fijado $\varepsilon > 0$ basta tomar $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\right)$ para que se cumpla la definición de límite.

Nota.- E(x) denota la parte entera de x.

(b) Calcularemos la diferencia $\left|\dfrac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)}-2\right|$ y la haremos menor que $\varepsilon$ .

$$\left|\frac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)}-2\right|=\left|\frac{-6n-5}{n^2+3n+2}\right|=\frac{6n+5}{n^2+3n+2}<\frac{6(n+1)}{n^2+3n+2}$$

Como

$$\frac{6(n+1)}{n^2+3n+2}=\frac{6(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{6}{(n+2)}$$

Si hacemos $\dfrac{6}{(n+2)}<\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{6}{\varepsilon}<n+2 \Leftrightarrow n>\dfrac{6}{\varepsilon}-2$

Cualquiera que sea el valor de $\varepsilon$ , tomando $n_0=E\left(\dfrac{6}{\varepsilon}-2\right)$, se puede asegurar que

si $n > n_0$ entonces $\left|\dfrac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)}-2\right|<\varepsilon$

(c) Operando como en el apartado anterior,

$$\left|\frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{3n^2+1}-8\right|=$$
$$=\left|\frac{8n^3+12n^2+6n+1-(8n^3-12n^2+6n-1)}{3n^2+1}-8\right|=$$
$$=\left|\frac{24n^2+2}{3n^2+1}-8\right|=\left|\frac{-6}{3n^2+1}\right|=\frac{6}{3n^2+1}<\frac{6}{3n^2}=\frac{2}{n^2}$$

Como ha de ser $\dfrac{2}{n^2}<\varepsilon \Rightarrow \dfrac{2}{\varepsilon}<n^2 \Rightarrow n>\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$

Entonces, cualquiera que sea el valor de , tomando $n_0=E\left(\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right)$, se puede asegurar que

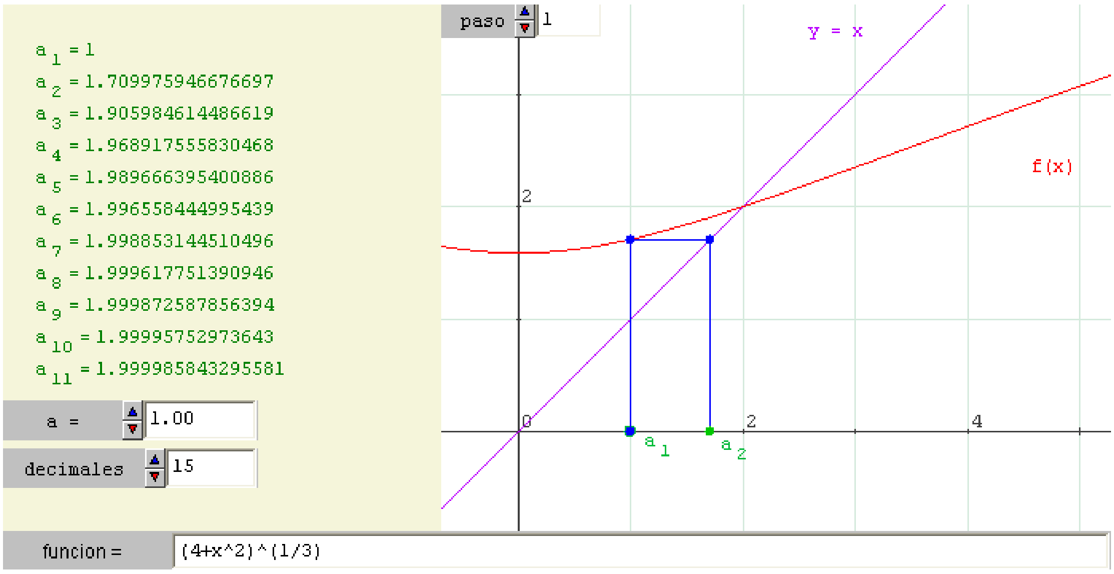
si $n > n_0$ entonces $\left|\dfrac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{3n^2+1}-8\right|<\varepsilon$

## Sucesiones recurrentes

**8** Estudiar la convergencia de la sucesión recurrente dada por

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \qquad n \geq 2$$

Solución: (Curso 03-04)




Applet Laboratorio Sucesiones Recurrentes

Es fácil ver que $0 \leq a_n$ , veamos que $a_n \leq 2$ . Lo probaremos por inducción.

- Para n=1 , $a_1 = 1 \leq 2$
- Supuesto que $a_n \leq 2$ debemos probar que $a_{n+1} \leq 2$ .

  Como por hipótesis de inducción se tiene que $a_n \leq 2$ se cumplirá:

$$(a_n)^2 \leq 4 \Rightarrow 4 + (a_n)^2 \leq 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \leq \sqrt[3]{8} \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \leq 2$$

Veamos ahora que la sucesión es monótona decreciente. Es fácil ver que:

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \geq a_n \Leftrightarrow 4 + (a_n)^2 \geq (a_n)^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a_n)^3 - (a_n)^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(a_n - 2)}_{a_n \leq 2}\underbrace{\left((a_n)^2 + (a_n) + 2\right)}_{0 \leq a_n} \leq 0$$

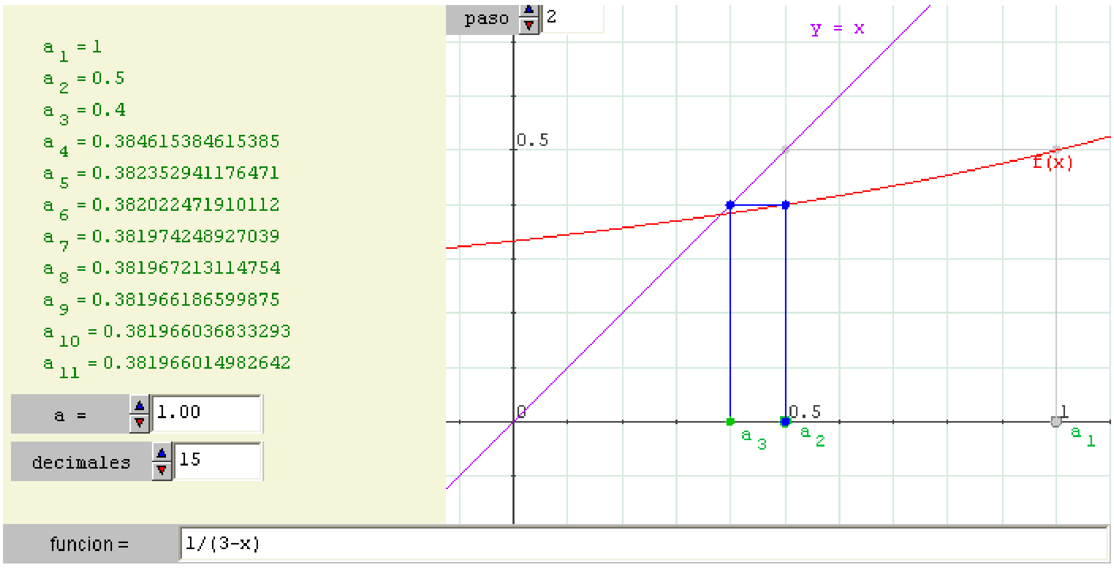
La última desigualdad es trivialmente cierta ya que anteriormente hemos probado $0 \leq a_n \leq 2$. Luego se cumple $a_{n+1} \geq a_n$.

Por el teorema de Weierstrass al ser una sucesión monótona y acotada es convergente.

9 Dada la sucesión $a_1 = 1$ y $a_n = \dfrac{1}{3 - a_{n-1}}$ $n \geq 2$, demostrar que

(a) $(a_n)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$ para todo número natural

(b) la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y calcular su límite.




Applet Laboratorio Sucesiones recurrentes

Solución:

(a) Demostramos por inducción la desigualdad $\left(a_n\right)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$.

- Para $n = 1$ hay que probar: $\left(a_1\right)^2 - 3a_1 + 1 \leq 0$. Como $a_1 = 1$ la desigualdad es cierta: $\left(1\right)^2 - 3 * 1 + 1 = -1 \leq 0$.

- Supongamos que $\left(a_n\right)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$ y probemos ahora que: $\left(a_{n+1}\right)^2 - 3a_{n+1} + 1 \leq 0$. Se tiene que:

$$\left(a_{n+1}\right)^2 - 3a_{n+1} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3 - a_n}\right)^2 - 3\frac{1}{3 - a_n} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(3 - a_n\right)^2} - \frac{3}{3 - a_n} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 3\left(3 - a_n\right) + \left(3 - a_n\right)^2}{\left(3 - a_n\right)^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 9 + 3a_n + 9 - 6a_n + \left(a_n\right)^2}{\left(3 - a_n\right)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 3a_n + \left(a_n\right)^2}{\left(3 - a_n\right)^2} \leq 0$$

En la última expresión el numerador es menor o igual a cero (por hipótesis de inducción) y el denominador es positivo (por ser un cuadrado). Por lo tanto, supuesto $\left(a_n\right)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$ la última desigualdad es cierta y se cumple:

$$\left(a_{n+1}\right)^2 - 3a_{n+1} + 1 \leq 0.$$

(b) Para ver que es convergente intentaremos ver si es monótona y acotada.

Dando valores a n (n=1, n=2, n=3...) parece que es monótona decreciente. En el caso de que lo fuera estaría acotada superiormente por el primer término. Veamos si son ciertas estas impresiones.

- Acotada.

Vamos a probar que $0 < a_n \leq 1$. Lo haremos por inducción.

- $0 < a_1 \leq 1$ ya que $0 < 1 \leq 1$
- Veamos que si $0 < a_n \leq 1$ entonces $0 < a_{n+1} \leq 1$

  Entonces suponiendo $0 < a_n \leq 1$ se tiene que $-1 \leq -a_n < 0$.

  Sumando 3 a ambos miembros:

$$2 < 3 - a_n < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3 - a_n} < \frac{1}{2}$$

  Luego, $0 < a_{n+1} \leq 1$

- Monotonía: Vamos a probar que es monótona decreciente, es decir, si para todo número natural $a_{n+1} \leq a_n$:

  para nuestra sucesión hay que demostrar que $\dfrac{1}{3 - a_n} \leq a_n$

  Como

$$\frac{1}{3 - a_n} \leq a_n \underset{3-a_n>0}{\Leftrightarrow} 1 \leq (3 - a_n)a_n \Leftrightarrow (a_n)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$$

  y la última equivalencia es cierta por el apartado (a) se cumple

$$\frac{1}{3 - a_n} \leq a_n$$

Por el teorema de Weierstrass al ser una sucesión monótona y acotada es convergente. Si llamamos L al límite de la sucesión $a_n$ se tendrá que :

$$\lim_{n\to\infty} a_n \underset{\substack{\text{definición} \\ \text{de la sucesión}}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - a_{n-1}} \underset{\substack{\text{propiedades} \\ \text{de los límites}}}{=} \frac{1}{3 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}}$$

en consecuencia el punto L buscado tiene que cumplir

$$L = \frac{1}{3-L} \Leftrightarrow L\left(3-L\right) = 1$$

es decir será una raíz del polinomio:

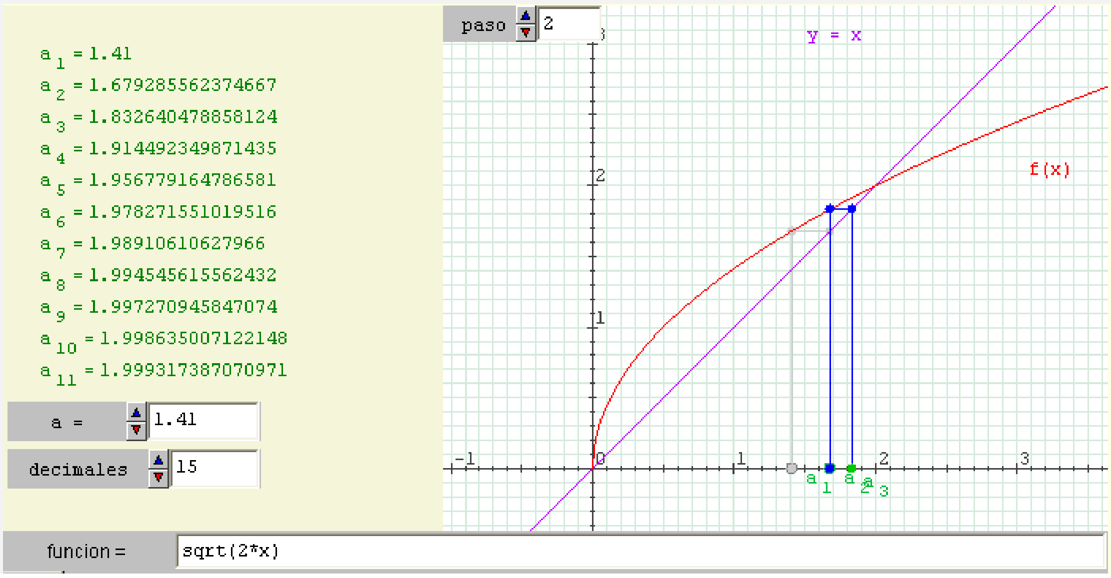
$$x\left(3-x\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

Resolviendo

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

De las dos raíces el valor de L es $L = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ que es menor que 1. (Observar que la sucesión es monótona decreciente y el primer término es menor que 1).

10 Dada la sucesión $a_1 = \sqrt{2}$ $\quad a_n = \sqrt{2\,a_{n-1}}$ $\quad n \geq 2$, demostrar que la sucesión $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y calcular su límite.




Observa que $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \left(2 \cdot 2^{1/2}\right)^{1/2} = 2^{1/2} \cdot 2^{1/4}$

$$a_3 = \sqrt{2\,a_2} = 2^{1/2}\left(2^{1/2+1/4}\right)^{1/2} = 2^{1/2+1/4+1/8}\ldots \quad a_n = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} \underset{\substack{\text{El exponente}\\ \text{es una suma de}\\ n \text{ términos de}\\ \text{una progresión}\\ \text{geométrica de}\\ \text{primer término } 1/2\\ \text{y razón } 1/2}}{=} 2^{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}}$$

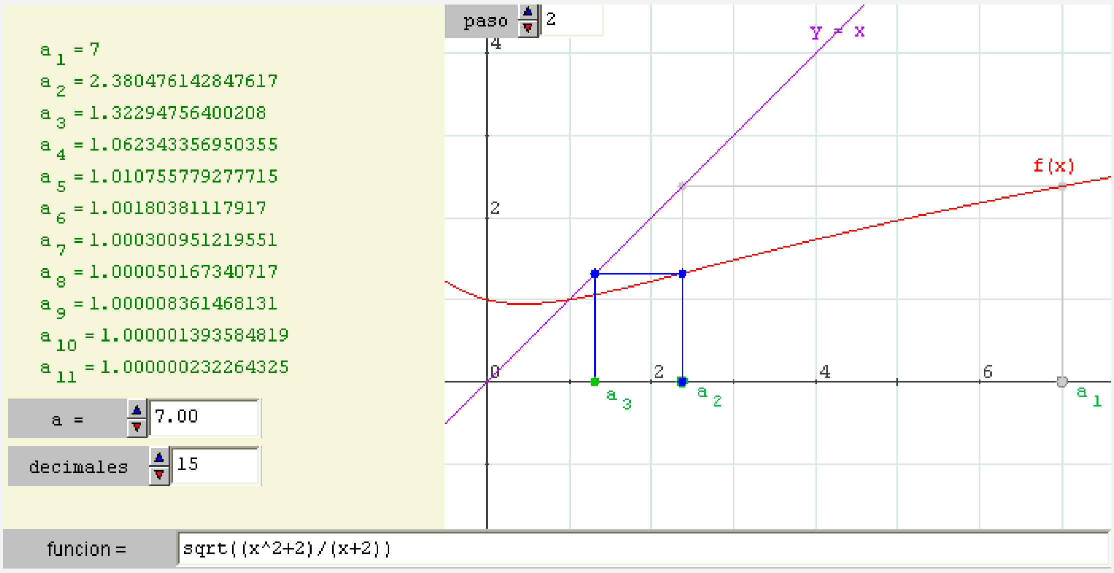
$$\text{Por lo tanto, } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[2^{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}}\right] = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}\right)} = 2^1 = 2$$

11 Dada la sucesión $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ en donde

$$a_1 = 7 \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{\left(a_n\right)^2 + 2}{a_n + 2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Se pide:

- Probar que $a_n \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- Demostrar que $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y calcular su límite.




Applet Laboratorio Sucesiones Recurrentes

Solución: (Parcial I 2003)

(a) Solución: Veamos que $a_n \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ por inducción.

- Se verifica para $n = 1$ ya que $a_1 = 7 \geq 1$
- Suponiendo que $a_n \geq 1$ veamos si $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{(a_n)^2 + 2}{a_n + 2}} \geq 1$. Se tiene que,

$$a_{n+1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{(a_n)^2 + 2}{a_n + 2}} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(a_n)^2 + 2}{a_n + 2} \geq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_n)^2 + 2 \geq a_n + 2 \quad \underset{\substack{a_n \geq 1 \\ \text{por hipótesis} \\ \text{de inducción}}}{\Leftrightarrow} \quad a_n(a_n - 1) \geq 0$$

(b) Veamos si es monótona. Como $a_1 = 7, \ a_2 = \sqrt{\dfrac{7^2 + 2}{7 + 2}} = \sqrt{\dfrac{51}{9}} < 7$ intentaremos ver si es monótona decreciente,

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{(a_n)^2 + 2}{a_n + 2}} \leq a_n \quad \Leftrightarrow$$

$$\underset{\substack{\text{elevando}\\ \text{al cuadrado por}\\ \text{ser cantidades}\\ \text{positivas}}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\left(a_n\right)^2+2}{a_n+2} \le \left(a_n\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a_n\right)^2+2 \le \left(a_n\right)^2\left(a_n+2\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \le \left(a_n\right)^3+\left(a_n\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le a_n\left[\left(a_n\right)^2+1\right]$$

Esta última desigualdad es cierta ya que $1 \le a_n$. Por lo tanto es monótona decreciente.

Como la sucesión es monótona y acotada es convergente. Llamando $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ se tendrá que:

$$L = \sqrt{\frac{L^2+2}{L+2}} \quad \Leftrightarrow \quad L^2 = \frac{L^2+2}{L+2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad L^3+2L^2 = L^2+2 \quad \Leftrightarrow \left(L-1\right)\underbrace{\left(L^2+2L+2\right)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow L = 1$$

12 (1) Dada la sucesión $\left\{a_n\right\}$ definida por $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 4n + a_{n-.1} \qquad n > 1 \end{cases}$ se pide probar por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|a_n - 2n^2\right| < 2n$

(2) A partir de la sucesión anterior se define la sucesión $b_n = \dfrac{a_n}{2n^2}$. Estudiar la acotación de $\left\{b_n\right\}$ y calcular su límite.

Solución: Febrero 2003

(1) La sucesión $\left\{a_n\right\}$ es una sucesión recurrente y la sucesión $b_n = \dfrac{a_n}{2n^2}$ se calcula a partir de $\left\{a_n\right\}$. Los primeros términos de ambas son:

$$a_n = \left\{1, 9, 21, 37, \ldots\right\}$$
$$b_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{9}{8}, \frac{21}{18}, \frac{37}{32}, \ldots\right\}$$

Se pide demostrar la desigualdad por inducción:

- $n = 1$. Se cumple que: $\left|a_1 - 2\right| = 1 < 2$
- Veamos que si: $\left|a_n - 2n^2\right| < 2n$, entonces

$$\left|a_{n+1} - 2(n+1)^2\right| < 2(n+1)$$

Se cumple que:

$$\left|a_{n+1} - 2(n+1)^2\right| = \left|4n + 4 + a_n - 2n^2 - 4n - 2\right| = \left|a_n - 2n^2 + 2\right| \leq$$

$$\leq \left|a_n - 2n^2\right| + 2 \underset{\substack{\textit{Hipotesis}\\ \textit{de inducción}}}{<} 2n + 2 = 2(n+1)$$

Luego, se puede concluir que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|a_n - 2n^2\right| < 2n$$

(2) De la desigualdad se deduce (por definición de valor absoluto):

$$2n^2 - 2n < a_n < 2n^2 + 2n$$

Dividiendo los tres miembros por $2n^2$

$$1 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{2n^2} < 1 + \frac{1}{n},$$

de donde

$$0 \leq 1 - \frac{1}{n} < b_n < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

Por tanto la sucesión $\{b_n\}$ está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 2.

Además, teniendo en cuenta que $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ y $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, por la regla del encaje, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

## Cálculo de límites: Propiedades

**13** Siendo $a_1 = \sqrt{3}$ , $a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}}$ , $a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ , etc. Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$

Observamos los términos de la sucesión:

$$a_1 = 3^{\frac{1}{2}} \; ; \quad a_2 = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \; ; \quad a_3 = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} \; ;\ldots$$

$$a_n = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$$

Sumamos los términos de la progresión geométrica que aparece en el exponente.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = 1-\frac{1}{2^n}$$

de modo que $\qquad a_n = 3^{1-\frac{1}{2^n}}$

y tomando el límite, $\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3^{1-\frac{1}{2^n}} = 3$

## Cálculo de límites: Teorema del encaje

**14** Calcular el siguiente límite: $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$

Calcular el límite de la sucesión que tiene por término general

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

Solución: Construimos dos sucesiones para compararlas con la sucesión anterior, cuyos términos generales son

$$b_n = \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = n \cdot \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}$$

y

$$c_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} = n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$$

observamos que se verifica $b_n < a_n < c_n$ para todo n, además

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

como $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$, también será

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = 1$$

15 (a) Demuestra que para todo número natural se cumple: $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leq \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

(b) Estudia la convergencia de la siguiente sucesión $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

(a) Vamos a probar la desigualdad $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leq \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ por inducción.

- Para n=1, es cierta ya que $\frac{2}{1} \leq \frac{(2)!}{(1!)^2}$
- Supuesta la desigualdad cierta para n, $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, veamos que es cierta para n+1, es decir, que se cumple

$$\frac{2^{2(n+1)-1}}{n+1} \leq \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \Leftrightarrow \frac{2^{2n+1}}{n+1} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$$

Se tiene que

$$\frac{2^{2n+1}}{n+1} = \frac{2^{2n-1}\cdot 2^2}{n+1} \underset{\substack{H.I.\\ 2^{2n-1}\leq n\frac{(2n)!}{(n!)^2}}}{\leq} \frac{4n\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{n+1} = \frac{4n(2n)!}{n!(n+1)!} \underset{\substack{multiplicando\\ y\ dividiendo\\ por (n+1)}}{=} \frac{(n+1)2(2n)(2n)!}{((n+1)!)^2}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n)(2n)!}{((n+1)!)^2} \underset{2n<2n+1}{\leq} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$$

Luego, hemos probado $\frac{2^{2n+1}}{n+1} \leq \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$

(b) Para estudiar la convergencia de la sucesión $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ basta darse cuenta que

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ y que } \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-1}}{n} = \infty$$

Por lo que la sucesión $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ es divergente.

## Cálculo de límites

16 Obtener $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+n}\right)$.

Multiplicando y dividiendo por el "conjugado", resulta una expresión más sencilla, cuyo límite es inmediato

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+n}\right)\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+n}\right)}{\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-(n^2+n)\right)}{\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{n}{n}}{\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=-\frac{1}{2}$$

17 Hallar el límite de la sucesión $a_n=\log\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)\cdot\cos\left(n^2+5\right)$.

Tomando el límite

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\log\left(\frac{n+3}{n+2}\right)}_{\inf initesimo}\cdot\underbrace{\cos\left(n^2+5\right)}_{\substack{funcion\ a\cot ada\\ dentro\ de\ [-1,1]}}\right]=0$$

18 Hallar el límite de la sucesión $a_n=\dfrac{8\,n^6\cdot\log\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\cdot sen^3\dfrac{1}{n}}{\left(2n^2+5n\right)\cdot\cos\dfrac{2\pi n-2}{6n+3}}$.

Aplicando equivalencias, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8\,n^6 \cdot \log\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\cdot sen^3\dfrac{1}{n}}{(2n^2+5n)\cdot\cos\dfrac{2\pi n-2}{6n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\,n^6\cdot\left(\dfrac{1}{2n}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{n}\right)^3}{(2n^2+5n)\cdot\cos\dfrac{2\pi n}{6n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{8\,n^6}{2\,n^4}}{(2n^2)\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{8\,n^6}{(4n^6)\cdot\dfrac{1}{2}} = 4$$

19 Utilizando comparación de infinitos calcular los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3n^2}}{(n+1)!} = \infty \quad , \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(2\,n)!}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n} = \infty \quad , \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{5}{3}\right)^n}{n^{300}} = \infty \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(l\,\mathrm{og}\;n)^5} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0'5\,n^3}{2000\,n^2} = \infty \quad , \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{0'5\,n^3}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n} = 0 \quad , \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^n} = 0 \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot n^{200}}{1'2^n} = 0$$

20 Hallar el límite de la sucesión $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}}$ .

Solución:

El límite es una indeterminación de la forma $1^\infty$ , se resuelve así

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n}\cdot\left(1+\frac{5}{2n-1}-1\right)} =$$
$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+5}{2n\cdot(2n-1)}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+5}{4n^2-2n}} = e^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{e^5}$$

**21** Hallar el límite de la sucesión $a_n = \sqrt[2n]{\dfrac{1+n}{3+n}}$

Solución: Suponemos que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ y tomamos logaritmos

$$\log\,(L) = \log\left[\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1+n}{3+n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\log\sqrt[2n]{\frac{1+n}{3+n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}\cdot\log\left(\frac{1+n}{3+n}\right)\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}\cdot\left(\frac{1+n}{3+n}-1\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\cdot\frac{-2}{3+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{2n^2+6n} = 0$$

$$L = e^0 = 1$$

**22** Hallar el límite de la sucesión $b_n = \left(\dfrac{3-2n}{5-3n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

También en este caso, resulta más sencillo explicar el cálculo tomando logaritmos. Sea $L = \lim_{n\to\infty} b_n$

$$\log\,(L) = \log\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-2n}{5-3n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right] = l\,\mathrm{im}_{n\to\infty}\left[\log\left(\frac{3-2n}{5-3n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right] =$$
$$= l\,\mathrm{im}_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\cdot\log\left(\frac{3-2n}{5-3n}\right)\right] = l\,\mathrm{im}_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\cdot\log\left(\frac{-2n}{-3n}\right)\right] =$$
$$= l\,\mathrm{im}_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\log\left(\frac{2}{3}\right) = \log\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$L = e^{\log\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{3}$$

**23** Hallar el límite de la sucesión $c_n = \left(\dfrac{3n-1}{5n+2}\right)^{-n-3}$

Supongamos que $L = \lim_{n\to\infty} c_n$. Tomando logaritmos

$$\log\,(L) = \log\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{-n-3}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\log\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{-n-3}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(-n-3)\cdot\log\left(\frac{3n-1}{5n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}(-n)\cdot\log\left(\frac{3}{5}\right) = \infty$$

$$L = e^{\infty} = \infty$$

**24** Hallar el límite de la sucesión $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n$

La expresión de la base es una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, que resolvemos multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n}-n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1} = 1$$

luego se trata de una indeterminación del tipo $1^{\infty}$, que resolvemos utilizando el número e, así

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\log\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{-1}{\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+(1+\frac{1}{n})\right)}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

25 Demostrar que $a_n$ y $b_n = \log(1+a_n)$ son equivalentes para $a_n \to 0$. Encontrar una sucesión equivalente a $\log_a(1+a_n)$ para cuando $a_n \to 0$.

Solución:

Para ver que $a_n$ y $b_n = \log(1+a_n)$ son equivalentes basta ver que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1$$

Se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \log(1+a_n)^{1/a_n} = \log\left(\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{1/a_n}\right) = \log e = 1$$

Por definición, $\log_a b = c$ si y solamente si $a^c = b$. Tomando en esta expresión logaritmo neperiano,

$$c \log a = \log b \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\log b}{\log a}$$

Por lo tanto, por definición,

$$\log_a(1+a_n) = \frac{\log(1+a_n)}{\log a}$$

Como $\log(1+a_n) \approx a_n$ cuando $a_n$ es un infinitésimo, se tendrá que: $\log_a(1+a_n) \approx \dfrac{a_n}{\log a}$

26 Dadas las sucesiones $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ ; $b_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ establecer si son o no del mismo orden las siguientes parejas de sucesiones:

$(a)$ $a_n$ $y$ $b_n$ $(b)$ $a_n{}^2$ $y$ $b_n{}^2$

$(c)$ $\dfrac{1}{a_n}$ $y$ $\dfrac{1}{b_n}$ $(d)$ $\log a_n$ $y$ $\log b_n$

Sol.- (a) Sí (b) Sí (c) Sí (d) No.

IMPORTANTE: Aunque para estas dos sucesiones $\log a_n$ y $\log b_n$ no sean equivalentes para la lista de infinitésimos equivalentes dada en el resumen teórico sí se verifica que si $a_n$ y $b_n$ son equivalentes también lo son $\log a_n$ y $\log b_n$

Nota: Si en la solución de algún ejercicio crees que hay algún error ponte en contacto con la profesora para su corrección.