Matemáticas 1

RESUMEN TEORÍA:

Funciones de una variable

Elena Álvarez Sáiz

Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación

Universidad de Cantabria

Objetivos:

- Conocer la definición de derivada y su interpretación geométrica.
- Calcular derivadas de funciones elementales utilizando las siguientes técnicas:
  - Reglas de derivación (derivada de una suma, producto, cociente).
  - Derivada de la función compuesta: Regla de la cadena
  - Derivada de la función inversa.
  - Derivada de funciones implícitas.
  - Derivada de funciones en paramétricas
  - Derivada enésima.
- Comprender la aproximación local que proporciona los polinomios de Taylor
  - Encontrar polinomios de Taylor para funciones derivables
  - Utilizar el resto de Lagrange para estimar la precisión de la aproximación.
  - Estudiar localmente una función (determinación de extremos)
- Comprender la aproximación global que proporcionan las series de Taylor
  - Calcular el campo de convergencia de una serie de potencias
  - Desarrollar una función en serie de potencias.

Isaac Newton

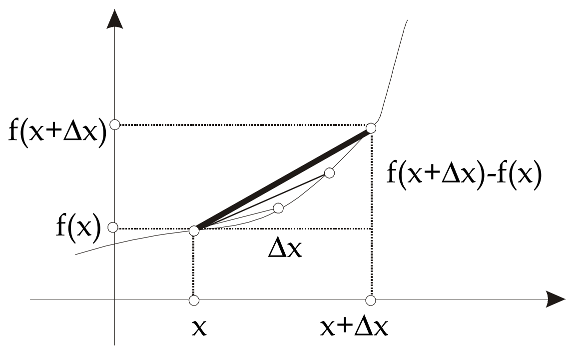
G.W. Leibnitz

DERIVADA: DEFINICIÓN

La expresión

$$\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$$

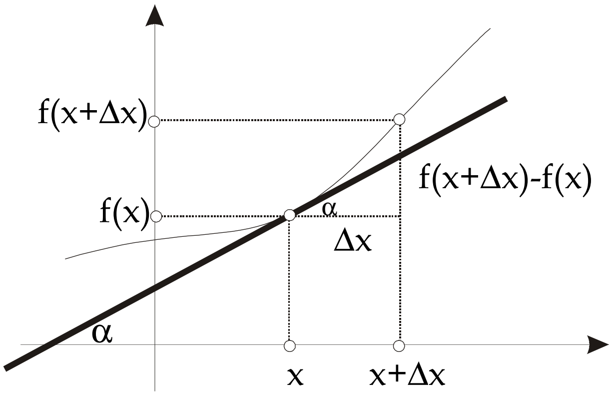
que es la fórmula de la pendiente de la secante a la gráfica de la función f que une los puntos $\left(x+\Delta x, f\left(x+\Delta x\right)\right)$ y $\left(x, f\left(x\right)\right)$, se llama el cociente incremental de f.



La derivada de f en un punto x es el límite del cociente incremental,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$$

La derivada representa la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto $\left(x, f\left(x\right)\right)$. Se representa por $f'\left(x\right)$ ó $\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{df}{dx}$



$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

Regla del producto por una constante $\quad [a\,f(x)]' = af'(x), \quad a \in \mathbb{R}$

Regla de la suma $\quad [f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

Regla del producto $\quad [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Regla del cociente $\quad \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

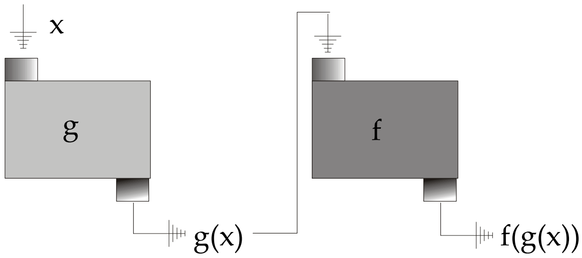
Derivada de la función compuesta: Regla de la cadena

Si $y = f(u)$ es derivable en u y $u = g(x)$ es derivable en x, entonces la función compuesta $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable en x y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

o también

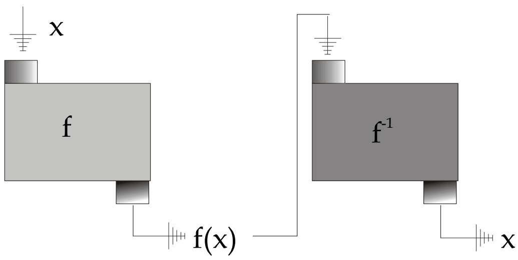
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f[g(x)] = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$



Derivada de la función inversa

Si f es una aplicación inyectiva y derivable en x_o y además $f'(x_o) \neq 0$ entonces la función inversa, f^{-1}, también es derivable en $y_o = f(x_o)$ y además

$$\left(f^{-1}\right)'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)}$$



Derivada enésima

Si $y = f(x)$ es derivable en un dominio D queda definida la función derivada:

$$\begin{aligned} f' : D &\to \mathbb{R} \\ x &\to f'(x) \end{aligned}$$

si esta función $y = f'(x)$ a su vez es derivable se puede calcular su derivada, $y = (f')'(x)$, que recibe el nombre de derivada segunda. Se denota,

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Este proceso puede continuar y se tendría la derivada de orden n o derivada n-ésima que consistiría en derivar la función n veces. Si la función es $y = f(x)$ se denotará: $f^{(n}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

FÓRMULA DE LEIBNIZ.- Si f y g son derivables hasta el orden n entonces la función $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable hasta el orden n y además

$$h^{(n}(x) = (f \cdot g)^{(n}(x) =$$

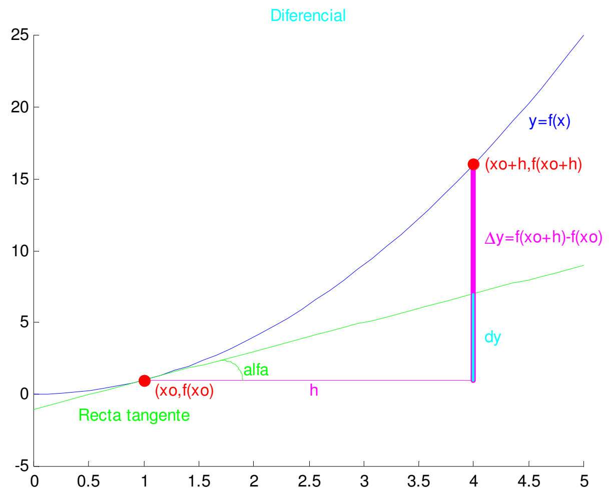
$$= \binom{n}{0} f(x) g^{(n}(x) + \binom{n}{1} f'(x) g^{(n-1}(x) + \ldots + \binom{n}{n-1} f^{(n-1}(x) g'(x) + \binom{n}{n} f^{(n}(x) g(x)$$

RECTA TANGENTE. APROXIMACIÓN LINEAL

Definición (Diferencial).- Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número x,

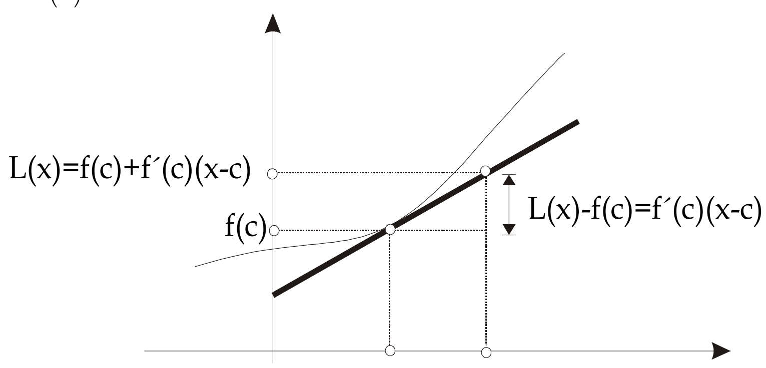
- La diferencial de x es igual al incremento de x, $\Delta x = dx$
- La diferencial de y se define como $dy = f'(x)dx$

La diferencial de y para un incremento de x, dx, corresponde el incremento de la ordenada de la recta tangente correspondiente a ese incremento.



Aproximación lineal: Consideremos la gráfica de una función $y = f(x)$ derivable en $x = c$. Si dibujamos la tangente en el punto $(c, f(c))$ vemos que, para un intervalo pequeño de x, centrado en c, los valores de la función casi coinciden con las ordenadas de los puntos de la curva. Por esta razón llamamos a la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto $x = c$ una linealización de la función en ese punto.

Teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ tiene por pendiente $f'(c)$ se tendrá que su ecuación es:



$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

y se llama a $L(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$ la linealización de f en c

POLINOMIOS DE TAYLOR

Supongamos que $f(x)$ es una función derivable n veces en el punto x=a. Se define el polinomio de Taylor de grado n correspondiente a la función f en el punto x=a como

$$T_n\left[f(x);a\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k =$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el caso en que a=0 el polinomio se llama de MacLaurin.

Veamos algunas propiedades que nos permitirán obtener polinomios de Taylor a partir de otros conocidos

Sean f y g funciones que admiten polinomio de Taylor hasta el grado n en el punto a entonces se cumplen las propiedades siguientes:

- Linealidad: $T_n(\alpha f + \beta g; a) = \alpha T_n(f;a) + \beta T_n(f;a)$
- Derivación, integración: $\left[T_n(f;a)\right]' = T_{n-1}(f';a)$
- Otras operaciones: Se puede obtener el desarrollo de productos y cocientes de funciones a partir del desarrollo de cada una de las involucradas.

Definición (Resto n-ésimo de Taylor).- Sea f una función para la que existe $T_n\left[f\left(x\right);a\right]$. Se define el resto n-ésimo de Taylor correspondiente a la función f en el punto x=a, y lo escribiremos $R_n\left[f\left(x\right);a\right]$ como

$$R_n\left[f\left(x\right);a\right] = f\left(x\right) - T_n\left[f\left(x\right);a\right]$$

La expresión $T_n\left[f\left(x\right);a\right] + R_n\left[f\left(x\right);a\right]$ se llama fórmula de Taylor de f(x) de grado n en el punto x=a.

En las proximidades del punto x=a se verifica no sólo que el resto n-ésimo es pequeño (infinitésimo) sino que se hace pequeño en comparación con $\left(x-a\right)^n$ (es un infinitésimo de orden superior a $\left(x-a\right)^n$ para x=a). Esto se expresa en el siguiente resultado

TEOREMA DE TAYLOR: Si f es derivable n veces en el punto x=a y $R_n\left[f\left(x\right);a\right]$ es su correspondiente resto de Taylor entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n\left[f\left(x\right);a\right]}{\left(x-a\right)^n} = 0$$

EXPRESIONES DEL RESTO: Sea f es una función derivable (n+1) veces en un intervalo abierto I, que contenga al punto x=a. Si $R_n\left[f\left(x\right);a\right]$ es el resto n-ésimo de Taylor correspondiente a la función f en el punto x=a entonces:

(1) Resto de Cauchy

$$R_n\left[f\left(x\right);a\right] = \frac{f^{(n+1}\left(t\right)}{n!}\left(x-t\right)^n\left(x-a\right)$$

siendo t un punto intermedio entre a y x.

(2) Resto de Lagrange

$$R_n\left[f(x);a\right]=\frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

siendo t un punto intermedio entre a y x.

(3) Resto Integral

$$R_n\left[f(x);a\right]=\int_a^x \frac{f^{(n+1}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

definido si la derivada (n+1) de f es integrable en el intervalo I.

POLINOMIOS DE TAYLOR: APLICACIONES

- Cálculo de valores aproximados (ver hoja 10)
- Cálculo de límites indeterminados
- Estudio local de una función: Determinar máximos y mínimos

Cálculo de límites indeterminados

En el cálculo de límites de funciones surgen las mismas indeterminaciones que en el caso de sucesiones y se aplican las mismas técnicas para su resolución.

Definición (Infinitésimo).- Llamaremos infinitésimo para x tendiendo a x_o a cualquier función que tienda a cero. Es decir, $\varphi(x)$ es un infinitésimo para $x=x_o$ si

$$\lim_{x\to x_o}\varphi(x)=0$$

PROPOSICION.-

(a) La suma, diferencia y producto de infinitésimos es un infinitésimo.

(b) El producto de un infinitésimo por una función acotada en un entorno de x_o es un infinitésimo.

Definición (Infinitésimos del mismo orden, orden superior y orden inferior).- Se dice que

- $\varphi(x)$ y $\mu(x)$ son dos infinitésimos del mismo orden para $x = x_o$ si

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\varphi(x)}{\mu(x)} = \lambda \quad con\ \lambda \neq 0,\ \lambda \neq \infty$$

En este caso se escribe $\varphi(x) = O(\mu(x))$.

- $\varphi(x)$ y $\mu(x)$on equivalentes para $x = x_o$ si $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\varphi(x)}{\mu(x)} = 1$

- $\varphi(x)$es de orden superior a $\mu(x)$ para $x = x_o$ si $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\varphi(x)}{\mu(x)} = 0$. En este caso se escribe $\varphi(x) = o(\mu(x))$

Definición (Infinitésimos de orden p).- Decimos que un infinitésimo es de orden p para $x = x_o$ si $\varphi(x) = O\left((x - x_o)^p\right)$ es decir, si

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\varphi(x)}{(x - x_o)^p} = \lambda \quad \lambda \neq 0,\ \lambda \neq \infty$$

PROPOSICION.- El orden de un infinitésimo no varía al sumarle o restarle otro de orden superior.

Consideremos ahora $\varphi(x)$ un infinitésimo de orden p para $x = x_o$, esto significa que

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\varphi(x)}{(x - x_o)^p} = \lambda \quad \lambda \neq 0, \lambda \neq \infty$$

En este caso se tiene que:

$$\varphi(x) - \lambda(x - x_o)^p = o\left((x - x_o)^p\right) \Leftrightarrow \varphi(x) = \lambda(x - x_o)^p + o\left((x - x_o)^p\right)$$

Entonces al término $\lambda(x - x_o)^p$ se le llama **parte principal del infinitésimo** $\varphi(x)$ para $x = x_o$.

PRINCIPIO DE SUSTITUCION.- Si en una expresión de un límite se sustituye un factor o divisor por su parte principal o por otro equivalente el valor del límite no se ve alterado.

IMPORTANTE: Cuando los infinitésimos aparezcan como sumandos la sustitución de un infinitésimo por otro equivalente puede conducir en general a errores

Tabla de equivalencias

(1) Si $x \to 0$ entonces $senx \approx x$

(2) Si $x \to 0$ entonces $1 - \cos x \approx \dfrac{x^2}{2}$

(3) Si $x \to 0$ entonces $tgx \approx x$

(4) Si $x \to 0$ entonces $\log(1 + x) \approx x$

(5) Si $x \to 0$ entonces $\log(1 + x^k) \approx x^k \qquad (k > 0)$

(6) Si $x \to 0$ entonces $a^x - 1 \approx x \log a$

(7) Si $x \to 0$ entonces $arcsenx \approx x$

(8) Si $x \to 0$ entonces $arctgx \approx x$

(9) Si $x \to 0$ entonces $\left(1 + x^a\right) \approx 1 + ax$

(10) Si $x \to 0$ entonces $P_n\left(x\right) \approx$ término de menor grado

Definición (Infinitos).- Llamaremos infinito para x tendiendo a x_o a cualquier función $\omega\left(x\right)$ que tienda a infinito. Es decir, $\omega\left(x\right)$ es un infinito para $x = x_o$ si $\lim_{x \to x_o} \omega\left(x\right) = \infty$

OBSERVACION.- Todo lo visto anteriormente para infinitésimos puede aplicarse a infinitos teniendo en cuenta que si $\omega\left(x\right)$ es un infinito para $x = x_o$ entonces

$$\varphi\left(x\right) = \frac{1}{\omega\left(x\right)} \text{ es un infinitésimo para x=x}_o$$

es un infinitésimo. En particular, la sustitución de infinitos en la expresión de un límite se rige por las mismas reglas que las de los infinitésimos.

Definición (Infinitos de orden inferior, superior).- Se dice que $\omega\left(x\right)$ y $\tau\left(x\right)$ dos infinitos para $x = x_o$ se dice que:

- $\omega\left(x\right)$ es un infinito de orden inferior a $\tau\left(x\right)$ para $x = x_o$ si

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\omega\left(x\right)}{\tau\left(x\right)} = 0$$

- $\omega\left(x\right)$ es un infinito de orden superior a $\tau\left(x\right)$ para $x = x_o$ si

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\omega\left(x\right)}{\tau\left(x\right)} = \infty$$

- $\omega(x)$ es un infinito del mismo orden que $\tau(x)$ para $x = x_o$ si

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\omega(x)}{\tau(x)} = \lambda \quad \lambda \neq 0,\ \lambda \neq \infty$$

En el caso particular de que λ entonces se dice que son equivalentes.

Definición (Infinito de orden p).- Decimos que un infinito $\omega(x)$ para $x = x_o$ es de orden p si

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\omega(x)}{\dfrac{1}{\left(x - x_o\right)^p}} = \lambda \quad \lambda \neq 0,\ \lambda \neq \infty$$

continuación, se dan en la tabla los denominados *órdenes fundamentales de infinitud*. Según se avance de izquierda a derecha en las columnas los órdenes van decreciendo.

Potencial - Exponencial	Exponencial	Potencial	Logaritmo
x^{ax} $a > 0$	b^x $b > 1$	x^c $c > 0$	$\left(\log_q x\right)^p$ $q > 1 \quad p > 0$

APLICANDO POLINOMIOS DE TAYLOR

Sea $y = f(x)$ una función que es infinitésimo para x=a que tiene todas sus derivadas nulas hasta el orden k-1 en el punto a y que $f^{(k}(a) \neq 0$, entonces se cumplirá:

$$f(x) = \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left(\left(x-a\right)^k\right)$$

de lo que se deduce que el orden del infinitésimo $y = f(x)$ para x=a es k y su parte principal es $\dfrac{f^{(k}(a)}{k!}$.

Estudio local de una función

Consideremos una función $y = f(x)$ con derivadas hasta el orden n+1 en el punto a. Se cumple que:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1}(a) = 0$, entonces

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$ entonces en el punto "a" la función tiene un mínimo local
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$ entonces en el punto "a" la función tiene un máximo local
- Si n es impar en el punto "a" hay un punto de inflexión.

SERIES DE POTENCIAS. SERIES DE TAYLOR

Una expresión de la forma

$$a_o + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Recibe el nombre de serie de potencias centrada en el punto a. Una serie de potencias puede ser interpretada como una función de x

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

Convergencia de una serie de potencias

El dominio de la función $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ será el conjunto de valores de x donde la serie converge y el valor de $f(x)$ será precisamente la suma de la serie.

Nota: Es evidente que la serie converge en el punto a

$$f(a)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-a)^n = a_o$$

TEOREMA DE ABEL.

Se considera la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Entonces se cumple una y solo una de las afirmaciones siguientes:

(a) La serie converge solo en a

(b) Existe un número $R>0$ de forma que la serie converge en $|x-a|<R$ y no converge en $|x-a|>R$

(c) La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$

Puede decirse que la serie converge siempre en un intervalo de la forma $(a-R,a+R)$ considerando que en el caso (a) el valor de R es cero y en el caso (c) el valor de R es infinito. Al número R se le llama radio de convergencia y al intervalo $(a-R,a+R)$ intervalo de convergencia. Es importante notar que el teorema no dice nada sobre la convergencia en los extremos de dicho intervalo.

TEOREMA.

Si la función viene definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Entonces se cumple una y solo una de las afirmaciones siguientes:

(a) La serie converge solo en a

(b) Existe un número $R > 0$ de forma que la serie converge en $|x-a| < R$ y no converge en $|x-a| > R$

(c) La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$

TEOREMA.

Si la función f viene definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ con radio de convergencia $R > 0$ entonces

(a) f es continua en todo punto interior al intervalo de convergencia.

(b) f es derivable en el intervalo de convergencia y su derivada $f'(x)$ puede obtenerse mediante la derivación término a término: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ siendo el radio de convergencia de esta serie también R.

(c) f es integrable en el intervalo de convergencia y, además, se puede integrar término a término:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int a_n (x-a)^n \, dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + k$$

siendo el radio de convergencia de esta serie también R.

Desarrollo de una función en serie de potencias

Ahora analizamos el problema de encontrar el desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$ analizando qué condiciones debe cumplir $f(x)$ para que pueda encontrarse una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ que converja a $f(x)$.

Recordemos ahora el Teorema de Taylor que permitía expresar el valor de una función mediante su polinomio de Taylor.

FÓRMULA DE TAYLOR: Si la función f es derivable n+1 veces en un intervalo $(a-R, a+R)$ entonces

$$f(x) = T_n(f;a) + R_n(x)$$

siendo $T_n(f;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$ el polinomio de Taylor de grado n de f en el punto a y Rn el resto del polinomio que cumple:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Considerando la expresión de Lagrange del resto se tendrá:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

con c un punto intermedio entre a y x.

TEOREMA: Si la función f es infinitamente derivable en un intervalo I abierto centrado en a y si $R_n(x)$ es el resto de la fórmula de Taylor entonces:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$ se llama Serie de Taylor de la función $f(x)$.

Importante: Puede probarse que si existe una constante $k > 0$ de forma que

$$\left|f^{(n}(x)\right| \leq k \text{ para todo } n \geq 0,\ x \in I$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ejemplos: Teniendo en cuenta los últimos resultados se pueden obtener los siguientes desarrollos en serie de Taylor de algunas funciones elementales:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \qquad |x| < \infty$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad |x| < \infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad |x| < \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \ldots \qquad |x| < 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)}{n!} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \ldots \qquad |x| < 1$$

Teniendo en cuenta la dificultad de encontrar la derivada enésima para muchas funciones y de probar que el resto enésimo tiende a cero cuando n tiende a infinito es frecuente, para encontrar el desarrollo de una función en serie de potencias, utilizar funciones de las que ya se conoce su desarrollo y luego integrar, derivar o realizar operaciones algebraicas como se indican en el siguiente resultado:

Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ en $(-R,R)$ entonces

- $f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ en $(-R,R)$
- $f(kx)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$ en $\left(-\frac{R}{|k|},\frac{R}{|k|}\right)$
- $f(x^k)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nk}$ en $\left(-\sqrt[k]{R},\sqrt[k]{R}\right)$ siendo k>0

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Una ecuación de la forma $F(x,y)=0$ define a la variable y como función x ($y=f(x)$) en un cierto dominio D si se verifica que para todo x en D existe un único y de forma que $F(x,y)=0$.

Cuando, para este tipo de funciones no se pueda despejar la variable y explícitamente en términos de x, y se quiere obtener la derivada, $\frac{dy}{dx}$, se procede de la siguiente forma:

1. Se deriva ambos miembros de la expresión con respecto a x, aplicando la regla de la cadena sabiendo que y es función de x, es decir, $y=y(x)$.

2. Se despeja la expresión $\dfrac{dy}{dx}$.

En general, el valor obtenido para $\dfrac{dy}{dx}$ es

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\text{derivar la función F respecto a x considerando y como constante}}{\text{derivar la función F respecto a } y \text{ considerando } x \text{ como constante}}$$

DERIVACIÓN PARAMÉTRICA

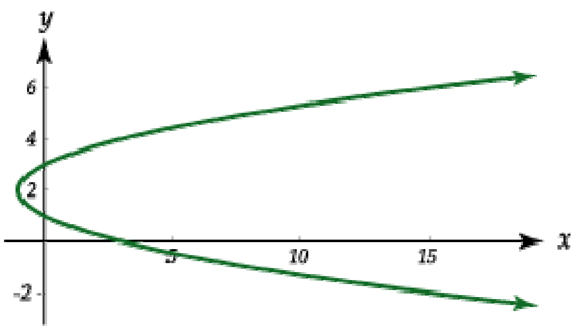
En algunas ocasiones la ecuación de una curva no está dada en la forma $y=f\left(x\right)$ ó $F\left(x,y\right)=0$ sino que está determinada por un par de ecuaciones en términos de una misma variable.

Por ejemplo, consideremos las ecuaciones $\begin{cases} x=t^2-2t \\ y=t+1 \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$.

Se tiene que a cada valor de t le corresponde un punto (x,y) del plano. En el ejemplo anterior, la siguiente tabla de valores:

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x	24	15	8	3	0	-1	0	3	8	15
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

nos permite hacer la representación gráfica de la relación de la siguiente manera:



En general, las ecuaciones $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$, con g, h funciones continuas en un intervalo real I, reciben el nombre de ecuaciones paramétricas o representación paramétrica de una curva en el plano XY. La gráfica de las ecuaciones paramétricas está dada por el conjunto de puntos del plano XY, que se obtiene cuando t, que recibe el nombre de parámetro, toma todos sus valores posibles en el dominio I.

TEOREMA: Sean $g(t), h(t)$ funciones derivables en un intervalo (c, d). Supongamos que g tiene una inversa derivable en ese intervalo. Entonces en cada punto donde $g'(t) \neq 0$, las ecuaciones $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ implican que existe una función derivable f tal que $y = f(x)$, y además

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{h'(t)}{g'(t)}$$

Nota: Si detectas algún error o errata ponte en contacto con la profesora para su corrección.