Matemáticas 1

EJERCICIOS RESUELTOS:

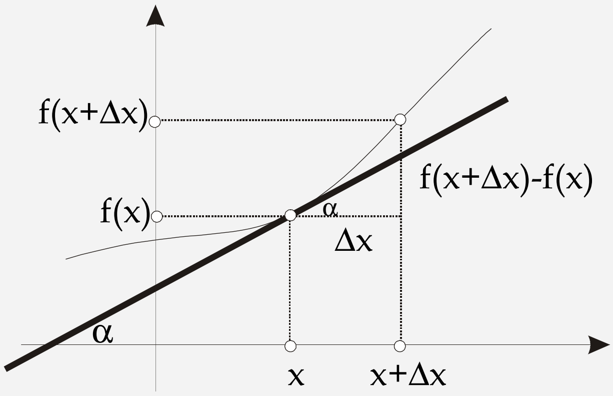
Funciones de una variable

Elena Álvarez Sáiz

Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación

Universidad de Cantabria

1 En el siguiente gráfico se considera una función $y = f(x)$. Representa la derivada en el punto x, el incremento de $y = f(x)$ para un incremento de x, Δx , y la diferencial de $y = f(x)$ en x para Δx . Calcula estos dos valores para $y = x^x$ en el punto $x = 2$.



Solución:

$x^x = y \quad \rightarrow \; x \log x = \log y$

Derivando implícitamente

$$\log x + \frac{x}{x} = \frac{y'}{y} \rightarrow y' = y(\log x + 1) \rightarrow y' = x^x(\log x + 1)$$

Para x=2

$$y'(2) = 2^2(\log 2 + 1)$$

$$dy = 2^2(\log 2 + 1)\Delta x$$

2 Deduce la derivada de la función $y = arcsenx$

Solución:

Sea $y = arcsenx$ entonces

$$seny = x$$

Derivando respecto a x:

$$(\cos y)\, y' = 1 \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3 Hallar la derivada enésima de $f(x) = sen(2x)\cos(2x)$ en x=0 (utilizar fórmula del seno del ángulo doble)

Solución:

Teniendo en cuenta que: $f(x) = sen(2x)\cos(2x) = \frac{1}{2} sen(4x)$ se tiene:

$$f'(x) = 2\cos(4x)$$
$$f''(x) = -2 \cdot 4 sen(4x)$$
$$f'''(x) = -2 \cdot 4^2 \cos(4x)$$
$$f^{iv}(x) = 2 \cdot 4^3 sen(4x)$$

Luego, para todo $n \geq 1$

$$f^{(2n}(x) = (-1)^n\, 2 \cdot 4^{2n-1} sen(4x)$$
$$f^{(2n-1}(x) = (-1)^{n+1}\, 2 \cdot 4^{2n-2} \cos(4x)$$

Otra forma: Teniendo en cuenta que:

$$\cos(\alpha) = sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

se tiene que:

$$f'(x) = 2\cos(4x) = 2sen\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x) = 2 \cdot 4\cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 4 \cdot sen\left(4x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f'''(x) = 2 \cdot 4^2 \cos\left(4x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 4^2 \cdot sen\left(4x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

...

-

Fórmula que se demuestra por inducción sobre n.

4 Se considera la ecuación:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=x^3$$

y se realiza el cambio $x=e^t$. Escribir la ecuación después de haber realizado el cambio considerando la variable y dependiente de t.

Solución:

Se tiene el siguiente árbol de dependencia:

y-----x-----t

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}\qquad(1)$$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena derivando respecto de x sabiendo que

x-----t

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\underset{\substack{t=\log x\\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}}}{=}\left(-e^{-t}\frac{dy}{dt}+e^{-t}\frac{d^2y}{d^2t}\right)e^{-t}\qquad(2)$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$e^{2t}\left(-e^{-2t}\frac{dy}{dt}+e^{-2t}\frac{d^2y}{d^2t}\right)-4e^te^{-t}\frac{dy}{dt}+6y=e^{3t}$$

$$\left(-\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{d^2t}\right)-4\frac{dy}{dt}+6y=e^{3t}$$

$$\frac{d^2y}{d^2t}-5\frac{dy}{dt}+6y=e^{3t}$$

5 Sea $g(x)=f(senx)$, sabiendo que $f'(0)=0$ calcular $g'(\pi)$. Comprueba **además** el resultado obtenido para una función f concreta.

Solución:

Aplicando la regla de la cadena,

$g'(x)=f'(senx)\cdot\cos x\Rightarrow g'(\pi)=f'(sen\pi)\cdot\cos\pi=f'(0)\cdot(-1)=0$

Por ejemplo, podemos considerar $f(x)=x^2\Rightarrow g(x)=f(senx)=(senx)^2$

Se tendría para este ejemplo $g'(x)=2(senx)(\cos x)\Rightarrow g'(\pi)=2sen\pi\cdot\cos\pi=0$

6 Dada la curva $x^2+y^2-2x+6y+6=0$, se pide representarla y calcular la recta tangente y normal a dicha curva en el punto $P\left(2,-3+\sqrt{3}\right)$.

Solución:

Completando cuadrados

$$x^2+y^2-2x+6y+6=\boxed{x^2-2x}+\boxed{y^2+6y}+6=\boxed{(x-1)^2-1}+\boxed{(y+3)^2-9}+6$$

Se tiene que

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + \left(y+3\right)^2 = 4$$

luego la curva es una circunferencia centrada en el punto (1, -3) y de radio 2. Para calcular la pendiente de la recta tangente calculamos la derivada en el punto P. Derivando implícitamente:

$$2x + 2yy' - 2 + 6y' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2x-2}{2y+6}$$

en el punto P

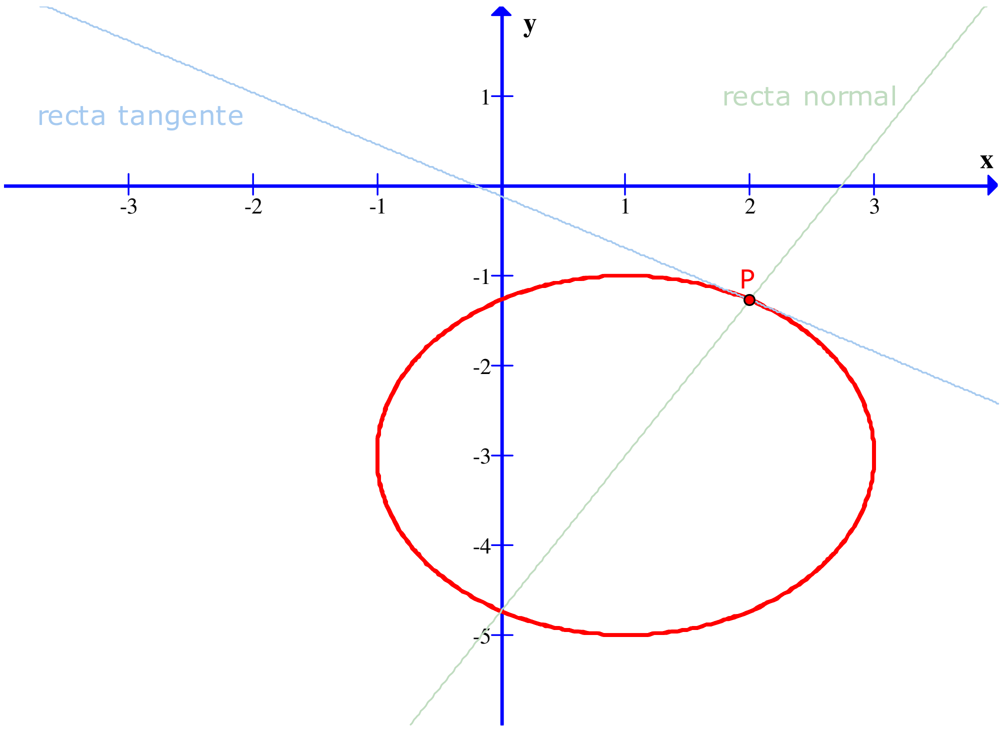
$$y'_P = -\frac{2\cdot 2-2}{2\left(-3+\sqrt{3}\right)+6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

la ecuación de la recta tangente es:

$$y = \left(-3+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-2\right)$$

y la de la recta normal

$$y = \left(-3+\sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\left(x-2\right)$$



7 Un punto P se mueve sobre la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5 cm/seg. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando x=9.

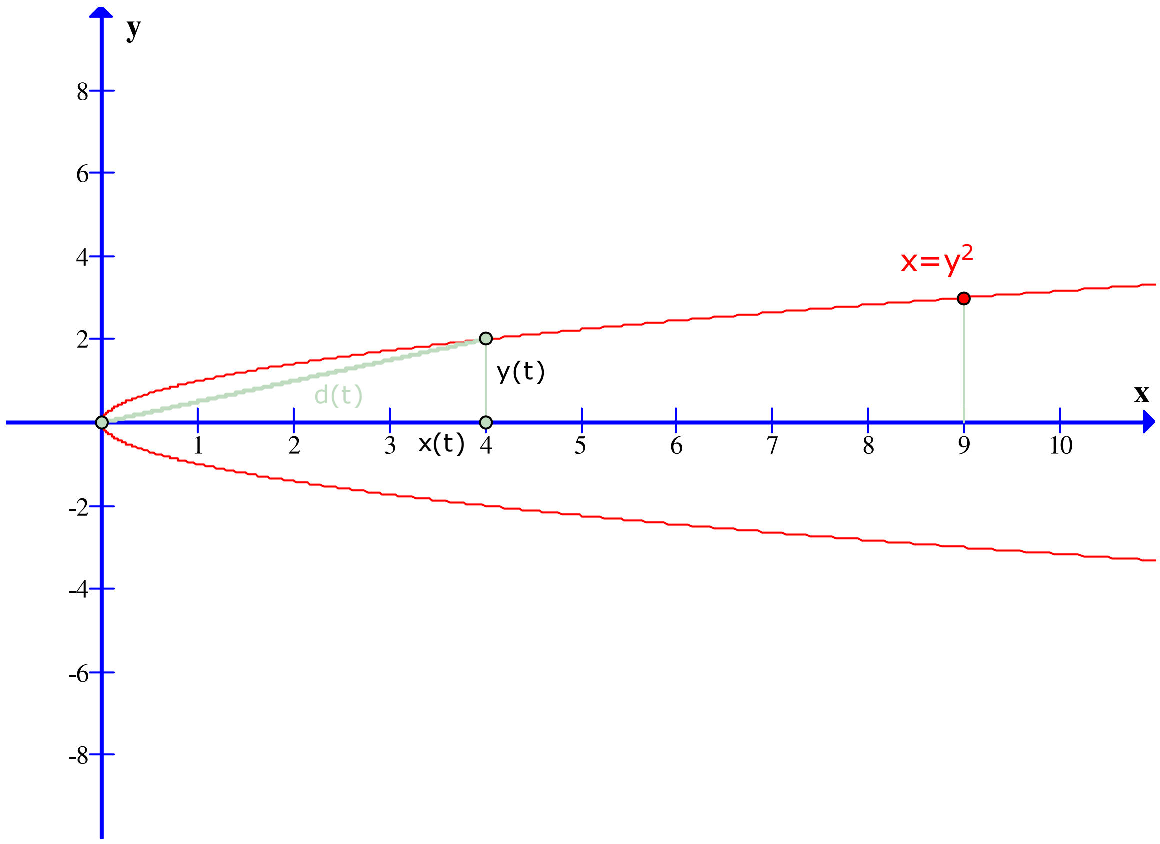
Solución:

Se trata de un problema de razón de cambio relacionadas. La función distancia de un punto situado en las coordenadas (x, y) al origen es:

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

Si el punto (x, y) está en la parábola $x = y^2$ será:

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$



La velocidad a la que se aleja del origen aplicando la regla de la cadena es:

$$d'(t) = \frac{1}{2}\left(x^2(t) + x(t)\right)^{-1/2}\left(2x(t)\cdot x'(t) + x'(t)\right)$$

En el instante en que x=9 y teniendo en cuenta que $x'(t) = 5cm\,/\,seg$ se concluye que la velocidad a la que el punto P se aleja del origen es:

$$\frac{1}{2}\left(9^2 + 9\right)^{-1/2}\left(2\cdot 9\cdot 5 + 5\right) = \frac{95}{2\sqrt{90}} = \frac{95}{6\sqrt{10}}$$

8 Determina el punto de corte de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^{\log x}$ en el punto x=e con el eje X.

Utilizando la regla de la cadena (derivación logarítmica)

$$\log f(x) = \log\left(x^{\log x}\right) = \left(\log x\right)^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2\log x}{x}$$

$$f'(x) = x^{\log x}\frac{2\log x}{x} \qquad f'(e) = e^{\log e}\frac{2\log e}{e} = 2$$

luego la recta tangente es:

$$y - e = 2(x - e)$$

que corta al eje X en el punto $0 - e = 2(x - e) \Leftrightarrow x = \frac{e}{2}$ $\left(\frac{e}{2}, 0\right)$

9 En una empresa la fuerza laboral L se mide en horas-trabajador y es una función del tiempo, $L = f(t)$. Sea $M = g(t)$ la producción media por persona. Suponga que la producción Q está dada por el producto LM. En cierto momento la fuerza laboral L está creciendo a un ritmo de 4% anual y la producción media está creciendo a una razón de 5% al año. Encontrar la razón de cambio de la producción total cuando Q=10.

Solución:

Datos del problema:

$$Q = LM = f(t)g(t)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0'04 \cdot L$$
$$\frac{dM}{dt} = 0'05 \cdot M$$

Se pide:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dL}{dt} \cdot M + L \cdot \frac{dM}{dt}$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Q=10} = 0'04 \cdot L \cdot M + L \cdot 0'05M = 0'09 \cdot L \cdot M = 0'09 \cdot Q = 0{,}9$$

10 Calcular $\frac{dy}{dx}$ suponiendo que y(x) está dada implícitamente por la ecuación $x^{arctgy} = \sqrt{y}Chx$.

Solución:

Tomando logaritmos a ambos lados de la expresión:

$$x^{arctgy} = \sqrt{y}Chx$$

se obtiene

$$arctgy \cdot logx = \frac{1}{2}\log y + \log\left(Chx\right)$$

Derivando implícitamente respecto de x:

$$\frac{y'\log x}{1+y^2} + \frac{arctgy}{x} = \frac{y'}{2y} + \frac{Shx}{Chx}$$

Reagrupando los términos en y':

$$\frac{y'\log x}{1+y^2} - \frac{y'}{2y} = \frac{Shx}{Chx} - \frac{arctgy}{x}$$

Despejando y'

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{xThx - arctgy}{x} \cdot \frac{2y\left(1+y^2\right)}{2y\log x - 1 - y^2}$$

Nota: El ejercicio se puede resolver derivando respecto de x a ambos lados de la igualdad implícitamente:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{arctgy}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{y}Chx\right)$$

- Derivación implícita del término de la izquierda:

$$h(x) = x^{arctgy} \qquad\qquad \log\left(h\left(x\right)\right) = arctgy \cdot \log x$$

$$\frac{h'\left(x\right)}{h\left(x\right)} = \frac{y'}{1+y^2} \cdot \log x + arctgy \cdot \frac{1}{x}$$

$$h'\left(x\right) = x^{arctgy}\left[\frac{y'}{1+y^2} \cdot \log x + arctgy \cdot \frac{1}{x}\right]$$

- Derivando implícitamente el término de la derecha:

$$\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' \cdot Chx + \sqrt{y} \cdot Shx$$

Entonces se tendrá:

$$x^{arctgy}\left[\frac{y'}{1+y^2} \cdot \log x + arctgy \cdot \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' \cdot Chx + \sqrt{y} \cdot Shx$$

Despejando y':

$$y'\left[x^{arctgy} \cdot \frac{\log x}{1+y^2} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot Chx\right] = \sqrt{y} \cdot Shx - \frac{arctgy \cdot x^{arctgy}}{x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y} \cdot Shx - \dfrac{arctgy \cdot x^{arctgy}}{x}}{x^{arctgy} \cdot \dfrac{\log x}{1+y^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot Chx}$$

Operando se puede llegar al resultado:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{xThx - arctgy}{x} \cdot \frac{2y\left(1+y^2\right)}{2y\log x - 1 - y^2}$$

11 Un depósito de agua es cónico, con el vértice hacia arriba, y tiene 40 m. de alto y 20 m. de radio en la base. El depósito se llena a $80\ m^3 / \min$. ¿A qué velocidad se eleva el nivel de agua cuando la profundidad del agua es de 12 m.?

Nota: El volumen de un cono de altura h y radio de la base r es: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

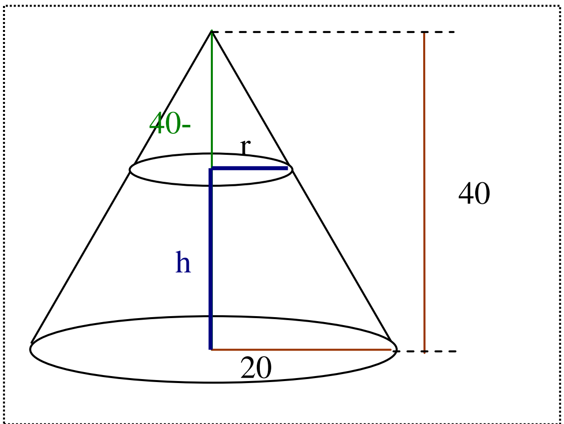
Solución:

En cualquier instante de tiempo el volumen V es

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 40 - \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot \left(40 - h\right)$$

donde r y h son funciones del tiempo. Además estás dos funciones están relacionadas de la manera siguiente:

$$\frac{40}{40-h} = \frac{20}{r} \qquad r = \frac{40-h}{2}$$



En consecuencia el volumen en un instante t es:

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 40 - \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\left[40 - h(t)\right]^3}{4}$$

Derivando respecto de t en ambos lados de la igualdad

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{3 \cdot 4}\pi \cdot \left[40 - h(t)\right]^2 \frac{dh}{dt}$$

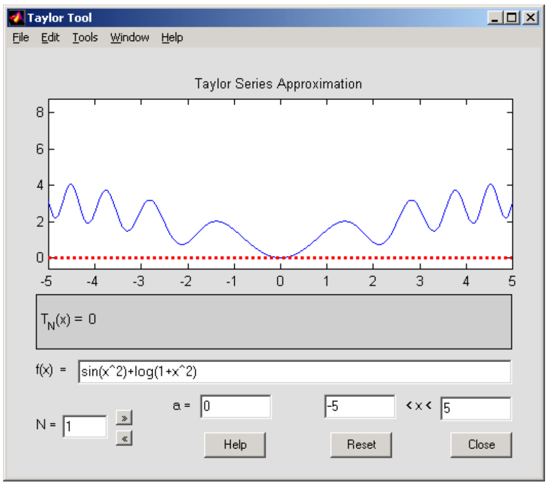
En el instante en el que h=12 m el deposito se llena a $80\ m^3 / \min$ luego,

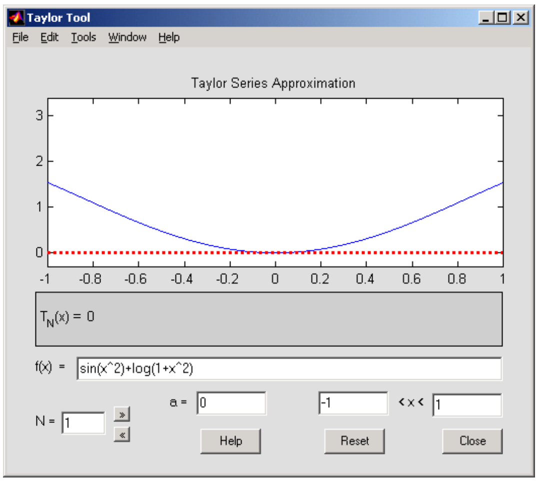
$$80 = \frac{\pi}{4} \cdot \left[40 - 12\right]^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{49\pi} \approx 0'13 m / \min$$

Ejemplo:	$f(x) = sen\left(x^2\right) + \log\left(1 + x^2\right)$

Polinomio de Taylor de grado 1 (recta tangente) en x=0

$$T_1\left(f(x),0\right) = 0$$

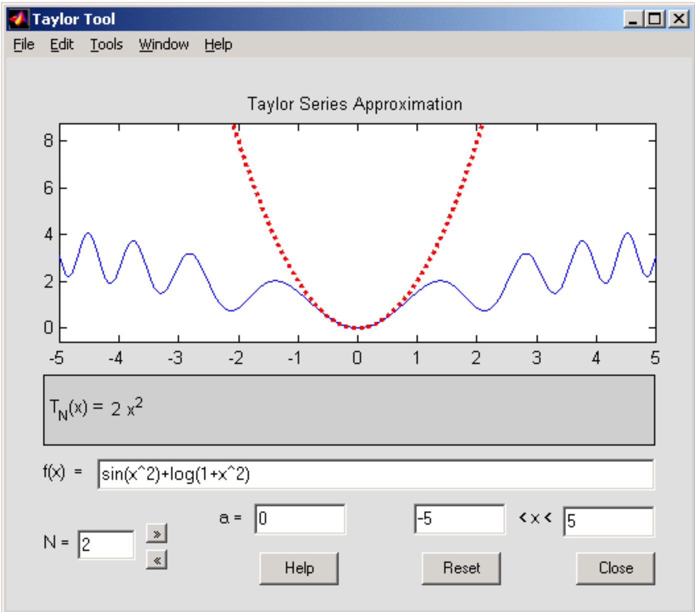


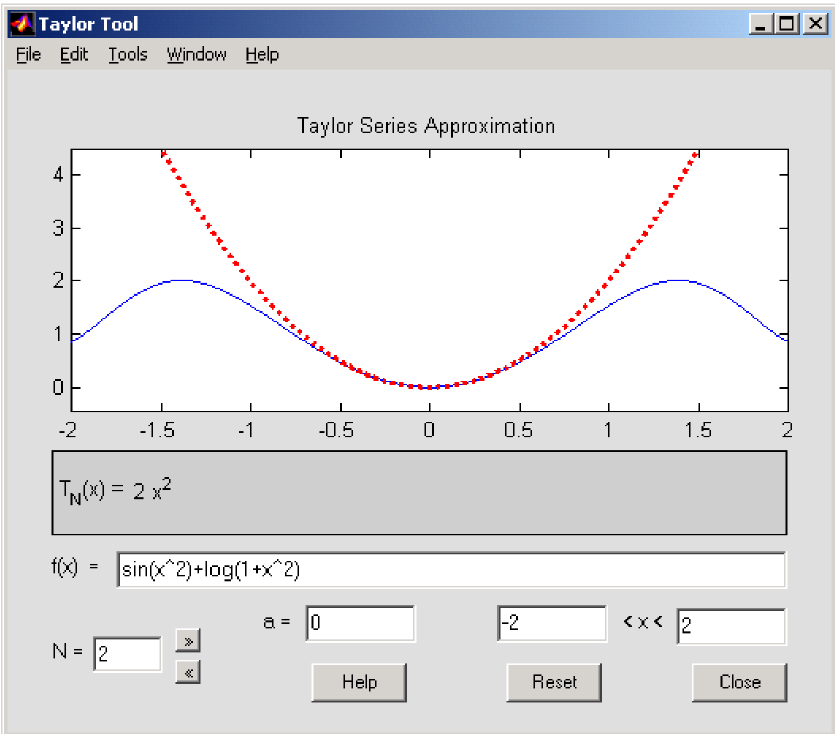


Polinomio de Taylor de grado 2:

$$T_2\left(f(x),0\right) = 2x^2$$

$$f(x) = 2x^2 + R_2\left(f(x),0\right) \qquad R_2\left(f(x),0\right) = \mathrm{O}\left(x^2\right) \; para \; x = 0$$

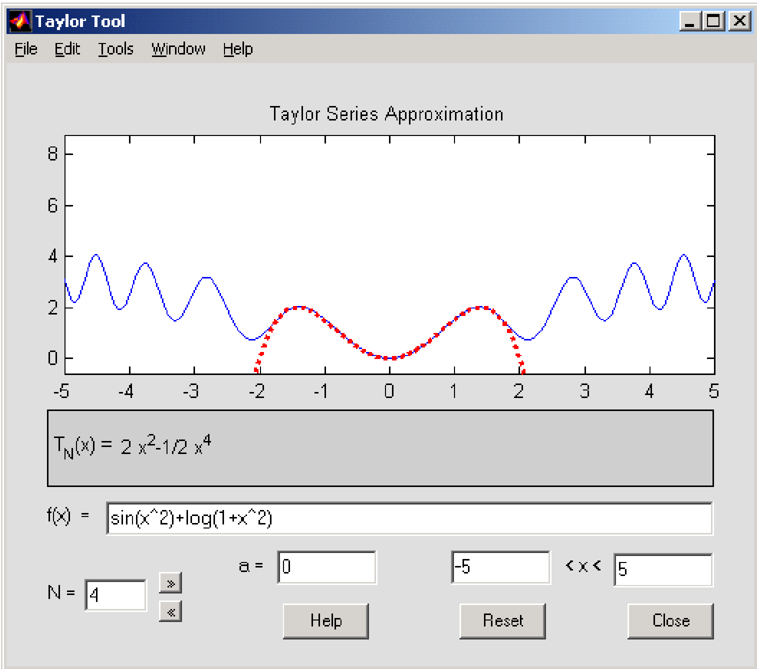


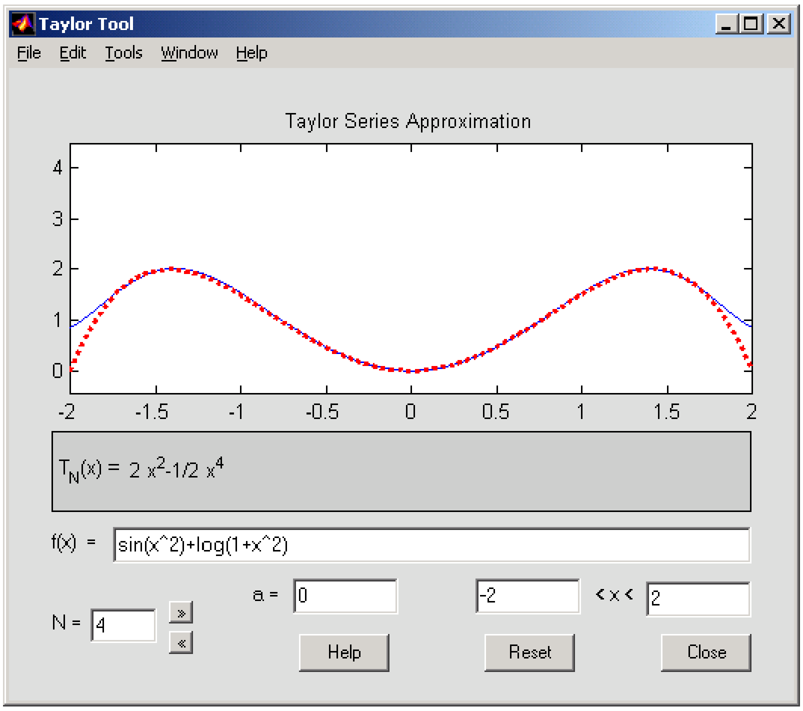


Polinomio de Taylor de grado 4:

$$T_4\left(f\left(x\right),0\right)=2x^2-\frac{1}{2}x^4$$

$$f\left(x\right)=2x^2-\frac{1}{2}x^4+R_4\left(f\left(x\right),0\right) \qquad R_4\left(f\left(x\right),0\right)=\mathrm{O}\left(x^4\right)\ para\ x=0$$





12 Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

(a) Calcula una estimación del error de la aproximación de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ por su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a = 0$ cuando x pertenece al intervalo $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$

(b) Calcula para esta función la diferencial en $a = 0$ e $\Delta x = 0.5$. Haz un bosquejo de esta función y representa el valor obtenido.

(c) ¿Puedes dar una cota del error que se comete al aproximar $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ por 1?

Solución

(a) Consideramos la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ derivando

$$f(x)=(1+x)^{-1/2} \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2} \quad f'(0)=\frac{-1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 3}{2^2}(1+x)^{-5/2} \qquad f''(0)=\frac{3}{4}$$

El polinomio de Taylor de grado 2 es:

$$T_2(f(x),0)=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$$

Utilizando el resto de Lagrange el error es

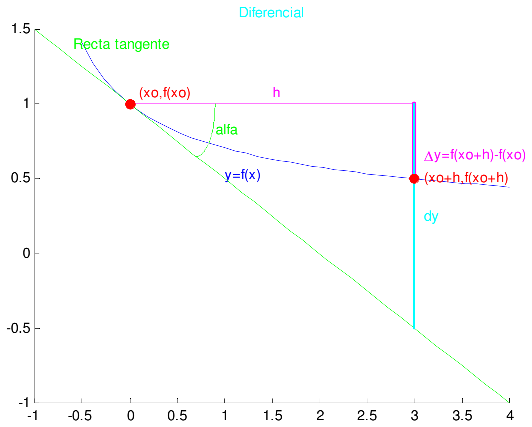
$$\left|f(x)-T_2(f(x);0)\right|=\left|\frac{f'''(c)}{3!}x^3\right|=\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}(1+c)^{7/2}x^3\right| \qquad c \textit{ punto } \text{intermedio } a\ 0\ y\ a\ x$$

Si $0\le x\le \dfrac{1}{2}$ el error una estimación del error es

$$\left|\frac{5}{16}(1+c)^{-7/2}x^3\right| \underset{\substack{0\le c\le x\le\frac{1}{2}\\ 1\le 1+c\le 1+x\\ (1+x)^{-7/2}\le(1+c)^{-7/2}\le 1}}{\le} \frac{5}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{2^7}$$

(b) La diferencial es:

$$dy=f'(0)\Delta x=\frac{-1}{2}\cdot 0,5=-0,25$$



Para que se vea mejor la gráfica corresponde a un incremento de valor 3.

(c) Se está pidiendo calcular una cota del error de sustituir $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ por $f(0)=1$. Es decir acotar Δy que sabemos que para incrementos pequeños se puede aproximar por la diferencial, luego, $\Delta y \approx 0.25$.

Otra forma es utilizar el resto de Lagrange

$$\Delta y = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = \frac{f'(c)}{1!}x \qquad con\ 0 < c < \frac{1}{2}$$

es decir,

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right| = \left|-\frac{1}{2}(1+c)^{-3/2}x\right| \qquad con\ 0 < c < \frac{1}{2}$$

Por el mismo razonamiento que antes

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right| = \left|-\frac{1}{2}(1+c)^{-3/2}x\right| \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0{,}25$$

13 Sea $f(x) = x\log(1+x)$. Se pide:

(a) Escribir la fórmula de Taylor para f(x) en x=0 de orden n con el resto de Lagrange.

(b) Dar una cota del error al aproximar $\frac{1}{10}\log\left(\frac{11}{10}\right)$ mediante el polinomio de Taylor de grado 3.

Solución:

(a)

$$f(x) = x\log(1+x)$$

En primer lugar calculamos la derivada n-ésima.

Método 1: Calculamos las derivadas sucesivas

$$f'(x) = \log(1+x) + \frac{x}{1+x}$$
$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = (1+x)^{-1} + (1+x)^{-2}$$
$$f'''(x) = (-1)(1+x)^{-2} + (-2)(1+x)^{-3}$$
$$f^{iv}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} + (-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

$$\vdots$$
$$f^{(n}(x) = (-1)^n (n-2)!(1+x)^{-(n-1)} + (-1)^n (n-1)!(1+x)^{-n} =$$

$$= (-1)^n (n-2)!\left[\frac{(1+x)}{(1+x)^n} + \frac{n-1}{(1+x)^n}\right] = \frac{(-1)^n (n-2)!(n+x)}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n}(0) = (-1)^n n \quad (n-2)! \qquad\qquad \frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n-1}(n \geq 2)$$

Método 2: Aplicando la fórmula de Leibniz

$$f^{(n}(x) = \binom{n}{0} x\left[\log(1+x)\right]^{(n} + \binom{n}{1}\left[\log(1+x)\right]^{(n-1}$$

Calculamos entonces la derivada n-ésima de $g(x) = \log(1+x)$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$
$$g''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$$
$$g'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$
$$\vdots$$
$$g^{(n}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} \qquad n \geq 2$$

En el origen $g'(0) = 1 \qquad , \quad g^{(n}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! \qquad n \geq 2$

Nota: En esta última expresión si consideramos n=1 se obtiene la derivada primera en el origen por lo que puede considerarse válida para

$$g^{(n}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! \qquad n \geq 1$$

Por lo tanto,

$$f^{(n}(x) = x\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} + n\frac{(-1)^n(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} =$$
$$= \frac{(-1)^n(n-2)!}{(1+x)^n}\left(-x(n-1) + n(1+x)\right) = \frac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}$$
$$f^{(n}(0) = (-1)^n n \ (n-2)! \qquad \frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n-1}(n \geq 2)$$

La fórmula de Taylor será:

$$x\log(1+x) = x^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n-1}x^n + \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \textit{con } t \textit{ entre } 0 \textit{ y } x$$

Como

$$f^{(n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(x+n+1)}{(1+x)^{n+1}}$$

el resto es:

$$R_n = \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(t+n+1)}{(n+1)n(1+t)^{n+1}}x^{n+1}$$

Apartado (b) Si consideramos $x = \frac{1}{10}$ la aproximación por este polinomio es

$$\frac{1}{10}\log\left(1+\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{100} + \dots + \frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

cometiéndose por error,

$$Error = R_n = \frac{(-1)^{n+1}(t+n+1)}{(n+1)n(1+t)^{n+1}}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \qquad con\ t\ entre\ 0\ y\ \frac{1}{10}$$

Una cota del error para n=3 es:

$$\left|Error\right| = \left|\frac{(-1)^4(t+4)}{12(1+t)^4}\left(\frac{1}{10}\right)^4\right| \le$$
$$\le \frac{1}{12\cdot 10^4}\left(\frac{1}{10}+4\right) = \frac{41}{12\cdot 10^5} \qquad 0 < t < \frac{1}{10}$$

Donde se ha tenido en cuenta que:

- Si $0 < t < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad (t+4) < \frac{1}{10} + 4 = \frac{41}{10}$
- Si $0 < t < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad 1 < (1+t) < \frac{11}{10} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 1 < (1+t)^4 < \left(\frac{11}{10}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{11}{10}\right)^4} < \frac{1}{(1+t)^4} < 1$$

Por lo tanto una cota del error podría ser: $\left|Error\right| \leq \dfrac{41}{12 \cdot 10^5}$

14 Considera la función $f\left(x\right) = x\sqrt{1+x}$.

(a) Determina la expresión del resto n-ésimo del polinomio de Taylor de la función en x=0

(b) Determina el grado del polinomio de Taylor de la función $f\left(x\right)$ en x=0 que permite aproximar $\sqrt{2}$ con un error menor que una décima.

Solución:

(a) Aplicando la fórmula de Leibniz para obtener la derivada n-ésima de $f\left(x\right) = x\sqrt{1+x}$

Se tiene que

$$f^{(n}\left(x\right) = \binom{n}{0} x g^{(n}\left(x\right) + \binom{n}{1} g^{(n-1}\left(x\right) \quad siendo \quad g\left(x\right) = \sqrt{1+x} = \left(1+x\right)^{1/2}$$

Por inducción puede probarse que

$$g^{(n}\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{\left(-1\right)^n 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \left(2n-3\right)}{2^n}\left(1+x\right)^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)} & n \geq 2 \\ \dfrac{\left(-1\right)}{2}\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}} & n = 1 \end{cases}$$

Podemos considerar que la derivada

$$g^{(n}\left(x\right) = \frac{\left(-1\right)^n 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \left(2n-3\right)}{2^n}\left(1+x\right)^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)} \quad n \in \mathbb{N}$$

tomando como convenio que en la fórmula anterior se tomará

$$1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \left(2n-3\right) \equiv 1 \quad si \quad \left(2n-3\right) < 1$$

Luego,

$$f^{(n}\left(x\right)=x\frac{\left(-1\right)^{n+1}1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot\left(2n-3\right)}{2^{n}\sqrt{\left(1+x\right)^{2n-1}}}+n\frac{\left(-1\right)^{n+1}1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot\left(2n-5\right)}{2^{n-1}\sqrt{\left(1+x\right)^{2n-3}}}$$

La expresión del resto n-ésimo es:

$$R_n\left(f,x\right)=\frac{f^{(n+1}\left(t\right)}{\left(n+1\right)!}x^{n+1}\ \text{con t un punto intermedio entre 0 y x}$$

sustituyendo

$$\frac{f^{(n+1}\left(t\right)}{\left(n+1\right)!}x^{n+1}=\left[t\frac{\left(-1\right)^{n+2}1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{2^{n+1}\sqrt{\left(1+t\right)^{2n+1}}}+n\frac{\left(-1\right)^{n+1}1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot\left(2n-3\right)}{2^{n}\sqrt{\left(1+t\right)^{2n-1}}}\right]\frac{x^{n+1}}{\left(n+1\right)!}$$

con t un punto intermedio entre 0 y x.

(b) Se tiene que $f\left(1\right)=\sqrt{2}$ luego se trata de determinar el valor de n de forma que

$$\left|R_n\left(f,1\right)\right|=\left|\frac{f^{(n+1}\left(t\right)}{\left(n+1\right)!}1^{n+1}\right|<\frac{1}{10}\qquad \text{siendo t un punto intermedio a 0 y a 1.}$$

Se tiene, aplicando la desigualdad triangular,

$$\left|R_n\left(f,1\right)\right|=\frac{1}{\left(n+1\right)!}\left|t\frac{\left(-1\right)^{n+2}1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{2^{n+1}\sqrt{\left(1+t\right)^{2n+1}}}+n\frac{\left(-1\right)^{n+1}1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot\left(2n-3\right)}{2^{n}\sqrt{\left(1+t\right)^{2n-1}}}\right|\leq$$

$$\leq\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{\left(n+1\right)!\cdot 2^{n+1}}\left|\frac{t}{\sqrt{\left(1+t\right)^{2n+1}}}\right|+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot\left(2n-3\right)\cdot n}{\left(n+1\right)!2^{n}}\left|\frac{1}{\sqrt{\left(1+t\right)^{2n-1}}}\right|$$

siendo t un punto intermedio a 0 y a 1.

Como $0<t<1\Rightarrow 1<\left(1+t\right)<2\Rightarrow 1^{k}<\left(1+t\right)^{k}<2^{k}$ *si k es natural*

$$\Rightarrow 1 = \sqrt{1^k} < \sqrt{(1+t)^k} < \sqrt{2^k} \; si \; k \; es \; natural \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1+t)^k}} < 1$$

Luego,

$$\left|R_n(f,1)\right| \leq \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-3)\cdot n}{(n+1)!2^n}$$

Para resolver el problema basta encontrar el número n que hace que:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-3)\cdot n}{(n+1)!2^n} \leq \frac{1}{10}$$

Dando valores a n vemos que se cumple para n=3, es decir,

$$R_3(f,1) \leq \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!2^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 3}{4!2^3} \leq \frac{1}{10}$$

y el polinomio que se ha de tomar es de grado 3.

15 Calcular mediante el polinomio de Taylor con un error menor que una décima el valor de $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ Representar de forma aproximada la gráfica de la función y del polinomio de Taylor obtenido en el apartado anterior.

Solución:

(a) Observamos que $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^{-2/3}$. Una posibilidad para hacer el ejercicio es tomar como función $f(x) = e^x$. El punto donde desarrollaremos será a=0 y el punto donde aproximaremos la función por el polinomio de Taylor será $x = -\frac{2}{3}$

Como

$$f^{(n}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow f^{(n}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es sencillo ver que la fórmula de Taylor es

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(f,x)$$

donde $R_n(f,x) = \dfrac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!}$ siendo t un punto intermedio a 0 y a "x"

Haciendo $x = -\dfrac{2}{3}$ se tiene que el error al sustituir $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = e^{-2/3}$ por el polinomio de Taylor de grado n en el punto $-2/3$ es

$$\left|R_n\left(f, -\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{e^t\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \text{ siendo } -\frac{2}{3} < t < 0$$

Como

$$\left|R_n\left(f, -\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{e^t\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \underset{\substack{-\frac{2}{3}<t<0 \\ \Rightarrow e^t < e^0 = 1}}{\leq} \frac{1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}$$

Hay que encontrar el valor de n que hace

$$\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10\cdot 2^{n+1} < 3^{n+1}(n+1)! \qquad \text{(I)}$$

ya que así se tendrá:

$$\left|R_n\left(f, -\frac{2}{3}\right)\right| \leq \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{10}$$

Dando valores a n en la desigualdad (I)

$$n = 1 \Rightarrow 10\cdot 2^2 < 3^2\cdot 2! \qquad NO$$

$$n = 2 \Rightarrow 10\cdot 2^3 < 3^3\cdot 3! \qquad SI$$

Luego el polinomio buscado es el segundo

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^{-2/3} \cong 1 + \frac{-2}{3} + \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{2!} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

16 La fórmula de Machin

$$\frac{1}{4}\pi = 4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239}$$

puede usarse para aproximar los valores de π. Utilizar el desarrollo de Taylor de la función $arctg(x)$ hasta tercer orden y la fórmula de Machin para calcular el valor de π. Dar una cota para el error de la aproximación justificando adecuadamente la respuesta.

Nota: En el caso de cálculos finales se puede dejar indicada la operación.

Solución:

Se considera la función $f(x) = arctg(x)$ $\quad a = 0$

Las derivadas necesarias son:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3} \qquad f'''(0) = -2$$

$$f^{iv}(x) = \frac{24\left(x-x^3\right)}{\left(1+x^2\right)^4}$$

El polinomio de Taylor en a=0 es: $P_3 = x - \frac{1}{3}x^3$

El error:

$$\left|f(x)-P_3(x)\right| = \left|R_3\right| = \frac{24\left|t-t^3\right|}{4!\left(1+t^2\right)}x^4 \le \left(\left|x\right|+\left|x\right|^3\right)x^4 \quad (*)$$

siendo t un punto intermedio entre 0 y x.

El valor aproximado es:

$$\pi = 16arctg\frac{1}{5} - 4arctg\frac{1}{239} \approx 16P_3\left(\frac{1}{5}\right) - 4P_3\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{5359397032}{1706489875} \approx 3.1406$$

y una estimación del error es:

$$error \le 16\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^3}\right)\frac{1}{5^4} + 4\left(\frac{1}{239}+\frac{1}{239^3}\right)\frac{1}{239^4} = \frac{18530137318094369864}{3479968693705631171875} \approx 0.0053248$$

Luego: $\pi = 3.1406 \pm 0.0053248$

Observación: En la acotación (*) se ha utilizado la desigualdad triangular. Podía haberse obtenido otra cota por ejemplo, considerando la función $g(t) = \frac{\left|t-t^3\right|}{\left(1+t^2\right)}$ y observando que es creciente en el intervalo [0, 1/5]. Para valores de x en este intervalo se podrá acotar:

$$g(t) = \frac{\left|t-t^3\right|}{\left(1+t^2\right)} \le g(x) \qquad\qquad 0 < t < x$$

En este caso, para valores de x en el intervalo [0, 1/5] se tendrá:

$$\left|f(x)-P_3(x)\right| = \left|R_3\right| \le \frac{\left|x-x^3\right|}{\left(1+x^2\right)}x^4 = \frac{x^5\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)}$$

De esta manera para x=1/5, x=1/239

$$\left|arctg\left(\frac{1}{5}\right)-P_3\left(\frac{1}{5}\right)\right|=\left|f\left(\frac{1}{5}\right)-P_3\left(\frac{1}{5}\right)\right|=\left|R_3\right|\le\frac{\left|\frac{1}{5}-\frac{1}{5^3}\right|}{\left(1+\frac{1}{5^2}\right)}\frac{1}{5^4}=\frac{5^2-1}{5^5\left(5^2+1\right)}$$

$$\left|arctg\left(\frac{1}{239}\right)-P_3\left(\frac{1}{239}\right)\right|=\left|f\left(\frac{1}{239}\right)-P_3\left(\frac{1}{239}\right)\right|=$$

$$=\left|R_3\right|\le\frac{\left|\frac{1}{239}-\frac{1}{239^3}\right|}{\left(1+\frac{1}{239^2}\right)}\frac{1}{239^4}=\frac{239^2-1}{239^5\left(239^2+1\right)}$$

17 (a) Calcular la derivada enésima de la función $f(x)=\log\left((1-x)^5\right)$.

(b) Calcular el conjunto de números reales x de manera que el polinomio de MacLaurin de $f(x)=\log\left((1-x)^5\right)$ de grado 3 permita aproximar f(x) con un error menor que 10^{-4}

(c) Calcular de forma aproximada el valor de $\log\left(1'1^5\right)$ con la aproximación de la ordenada de la recta tangente dando una estimación del error

Solución:

(a) **Derivando**

$$f(x)=\log\left((1-x)^5\right)=5\log(1-x)\quad\to\quad f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{-5}{1-x}=-5(1-x)^{-1}\quad\to\quad f'(0)=-5$$

$$f''(x)=\left[-5(1-x)^{-1}\right]'=-5(1-x)^{-2}\quad\to\quad f''(0)=-5$$

$$f'''(x)=-5\cdot 2(1-x)^{-3}\quad\to\quad f'''(0)=-10$$

$$\ldots$$

$$f^{(n}(x)=-5\cdot(n-1)!\cdot(1-x)^{-n}\quad\to\quad f^{(n}(0)=-5\cdot n!$$

(a)El polinomio de Taylor de grado 3 es:

$$f(x) = -5x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{-5}{4(1-t)^4}x^4$$ siendo t intermedio a 0 y x:

Para que $\left|error\right| = \left|f(x) - T_3\right| = \left|\frac{-5}{4(1-t)^4}x^4\right| < 10^{-4}$ basta que:

- Si x>0. Como el logaritmo solo está definido para valores positivos se tiene que se deberá cumplir: $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Por lo tanto supondremos que $0 < x < 1$

Entonces 0<t<x<1 0<1-x<1-t<1como

$$error = \left|\frac{-5}{4(1-t)^4}x^4\right| < \frac{5}{4(1-x)^4}x^4 = \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)^4$$

Basta hacer $\frac{5}{4}\left(\frac{x}{1-x}\right)^4 < 10^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{1-x}\right)^4 < \frac{4\cdot 10^{-4}}{5} \underset{0<x<1}{\Leftrightarrow} \frac{x}{1-x} < \sqrt[4]{\frac{4}{5}}\cdot 10^{-1} = A$

Es decir,

$$\frac{x}{1-x} < A \Leftrightarrow x < (1-x)A \Leftrightarrow x < \frac{A}{1+A}$$

- Si x<0 entonces x<t<0 1<1-t<1-x como

$$error = \left|\frac{-5}{4(1-t)^4}x^4\right| < \frac{5}{4}x^4$$

Basta hacer $\frac{5}{4}x^4 < 10^{-4} \Leftrightarrow x^4 < \frac{4\cdot 10^{-4}}{5} \Leftrightarrow x < \sqrt[4]{\frac{4}{5}}\cdot 10^{-1}$

(b)Si se aproxima por la recta tangente:

$$\log\left(\left(1-x\right)^5\right) = -5x - \frac{5}{2\left(1-t\right)^2}x^2 \text{ con t intermedio entre 0 y x}$$

Se tiene que:

$$\log\left(\left(1'1\right)^5\right) = \log\left(\left(1-x\right)^5\right) \Leftrightarrow 1'1 = 1-x \Leftrightarrow x = -0'1$$

Luego

$$5\log\left(1'1\right) = -5\cdot\left(-0'1\right) - \frac{5}{2\left(1-t\right)^2}\left(-0'1\right)^2 \text{ con t intermedio entre 0 y -0'1}$$

El valor aproximado es:

$$5\log\left(1'1\right) \approx 0'5$$

y una cota del error:

$$\left|error\right| = \left|5\log\left(1'1\right) - 0'5\right| = \left|\frac{5}{2\left(1-t\right)^2}\left(0'01\right)\right| \underset{\left[\begin{smallmatrix}-0'1<t<0\\ 0<-t<0'1\\ 1<1-t<1'1\\ \frac{1}{1-t}<1\end{smallmatrix}\right]}{<} \frac{5\cdot 10^{-2}}{2}$$

18 Sea $f\left(x\right) = x\log\left(1+x\right)$. Se pide:

(a) Escribir la fórmula de Taylor para f(x) en x=0 de orden n con el resto de Lagrange.

(b) Dar una cota del error al aproximar $\frac{1}{10}\log\left(\frac{11}{10}\right)$ mediante el polinomio de Taylor de grado 3.

Solución:

Apartado (a)

$$f\left(x\right) = x\log\left(1+x\right)$$

En primer lugar calculamos la derivada n-ésima.

Método 1: Calculamos las derivadas sucesivas

$$f'(x) = \log(1+x) + \frac{x}{1+x}$$
$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = (1+x)^{-1} + (1+x)^{-2}$$
$$f'''(x) = (-1)(1+x)^{-2} + (-2)(1+x)^{-3}$$
$$f^{iv}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} + (-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

$\vdots$

$$f^{(n}(x) = (-1)^n (n-2)!(1+x)^{-(n-1)} + (-1)^n (n-1)!(1+x)^{-n} =$$

$$= (-1)^n (n-2)!\left[\frac{(1+x)}{(1+x)^n} + \frac{n-1}{(1+x)^n}\right] = \frac{(-1)^n (n-2)!(n+x)}{(1+x)^n}$$

$$f^{(n}(0) = (-1)^n n \quad (n-2)! \qquad\qquad \frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n-1}(n \geq 2)$$

Método 2: Aplicando la fórmula de Leibniz

$$f^{(n}(x) = \binom{n}{0} x\left[\log(1+x)\right]^{(n} + \binom{n}{1}\left[\log(1+x)\right]^{(n-1}$$

Calculamos entonces la derivada n-ésima de $g(x) = \log(1+x)$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$
$$g''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$$
$$g'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$\vdots$$
$$g^{(n}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n} \qquad n \geq 2$$

En el origen $g'(0) = 1 \quad , \quad g^{(n}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! \qquad n \geq 2$

Nota: En esta última expresión si consideramos n=1 se obtiene la derivada primera en el origen por lo que puede considerarse válida para

$$g^{(n}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! \qquad n \geq 1$$

Por lo tanto,

$$f^{(n}(x) = x\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} + n\frac{(-1)^n(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} =$$
$$= \frac{(-1)^n(n-2)!}{(1+x)^n}(-x(n-1) + n(1+x)) = \frac{(-1)^n(n-2)!(x+n)}{(1+x)^n}$$
$$f^{(n}(0) = (-1)^n n \quad (n-2)! \qquad\qquad \frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n-1}(n \geq 2)$$

La fórmula de Taylor será:

$$x\log(1+x) = x^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n-1}x^n + \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \textit{con } t \textit{ entre } 0 \textit{ y } x$$

Como

$$f^{(n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(x+n+1)}{(1+x)^{n+1}}$$

el resto es:

$$R_n = \frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(t+n+1)}{(n+1)n(1+t)^{n+1}}x^{n+1}$$

Apartado (b) Si consideramos $x = \frac{1}{10}$ la aproximación por este polinomio es

$$\frac{1}{10}\log\left(1+\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{100} + \ldots + \frac{\left(-1\right)^n}{n-1}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

cometiéndose por error,

$$Error = R_n = \frac{\left(-1\right)^{n+1}\left(t+n+1\right)}{\left(n+1\right)n\left(1+t\right)^{n+1}}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \qquad con\ t\ entre\ 0\ y\ \frac{1}{10}$$

Una cota del error para n=3 es:

$$\left|Error\right| = \left|\frac{\left(-1\right)^4\left(t+4\right)}{12\left(1+t\right)^4}\left(\frac{1}{10}\right)^4\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{12\cdot 10^4}\left(\frac{1}{10}+4\right) = \frac{41}{12\cdot 10^5} \qquad 0 < t < \frac{1}{10}$$

Donde se ha tenido en cuenta que:

- Si $0 < t < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \left(t+4\right) < \frac{1}{10} + 4 = \frac{41}{10}$
- Si $0 < t < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad 1 < \left(1+t\right) < \frac{11}{10} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 1 < \left(1+t\right)^4 < \left(\frac{11}{10}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{11}{10}\right)^4} < \frac{1}{\left(1+t\right)^4} < 1$$

Por lo tanto una cota del error podría ser: $\left|Error\right| \leq \frac{41}{12\cdot 10^5}$

19 Encuentra un infinitésimo equivalente a la función $f\left(x\right) = e^x - e^{\operatorname{sen} x}$ en x=0

Solución:

Utilizando polinomios de Taylor analizamos el orden de la primera derivada no nula en x=0. Se tiene que:

$$f'(x) = e^x - e^{senx}\cos x \;\Rightarrow\; f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^x - e^{senx}\cos^2 x + e^{senx} senx \qquad \Rightarrow\; f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^x - e^{senx}\cos^3 x + e^{senx} 2\cos x senx + e^{senx} senx \cos x + e^{senx}\cos x$$
$$\Rightarrow\; f'''(1) = 1 \neq 0$$

Aplicando la fórmula de Taylor:

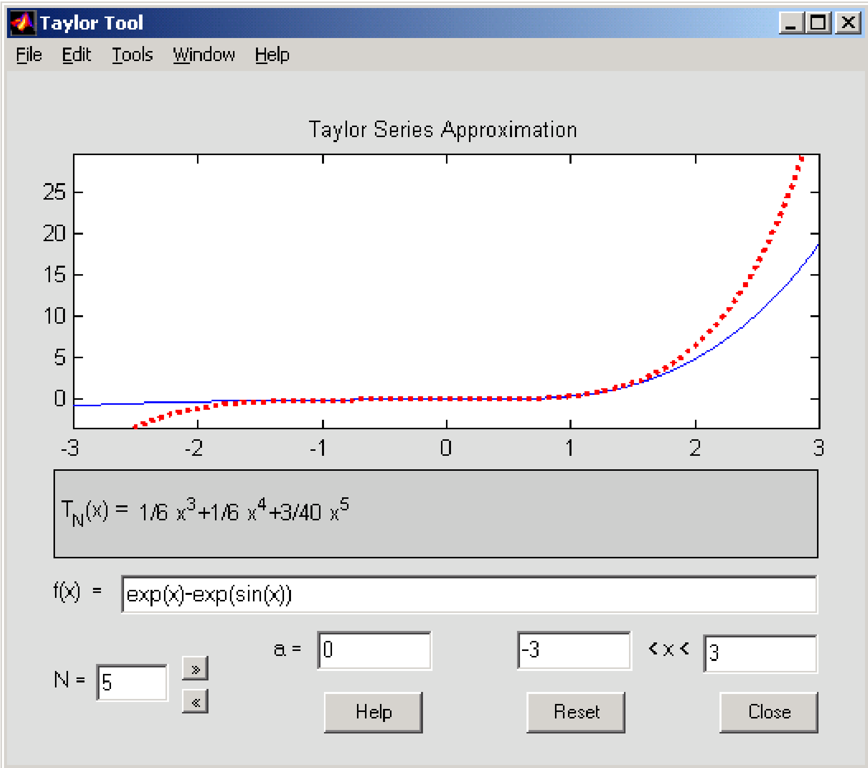
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_3 = \frac{1}{6}x^3 + R_3$$

donde el resto es un infinitésimo de orden superior a tres. Por lo tanto f(x) es un infinitésimo de orden 3.

Polinomio de Taylor	$f(x) = e^x - e^{sen(x)}$

Polinomio de Taylor de grado 5 en x=0

$$T_5\left(f(x),0\right) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5$$



20 Calcular la parte principal de los infinitésimos:

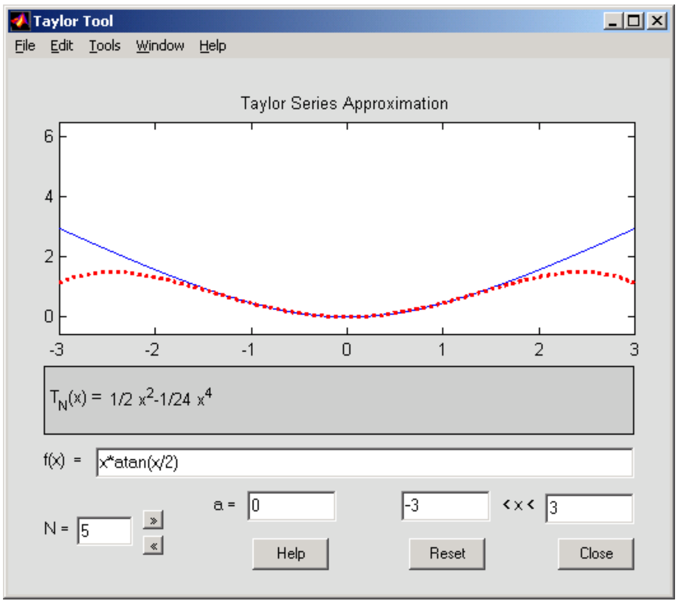
(a) $x \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$ (b) $sen x - x\cos x$

Solución:

Polinomio de Taylor: Apartado (a)	$f(x) = x arctg\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Polinomio de Taylor de grado 4 en x=0

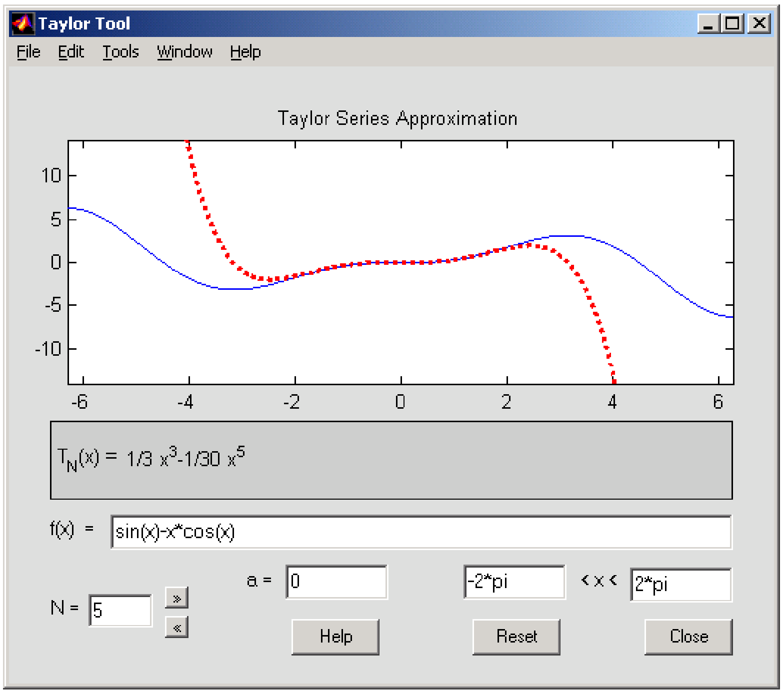
$$T_4\left(f(4),0\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$$



Polinomio de Taylor: Apartado (b) $f(x) = senx - x\cos x$

Polinomio de Taylor de grado 5 en x=0

$$T_5\left(f(4),0\right) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5$$



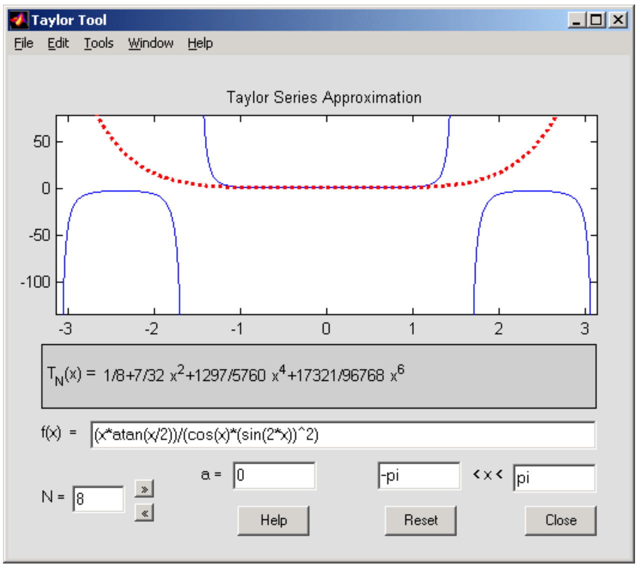
21 Utilizando polinomios de Taylor calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}}{\cos x\,\left(\operatorname{sen} 2x\right)^2} = \dfrac{1}{8}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x\left(1-\cos x\right)} = \dfrac{2}{3}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{e^x + senx} = 1$

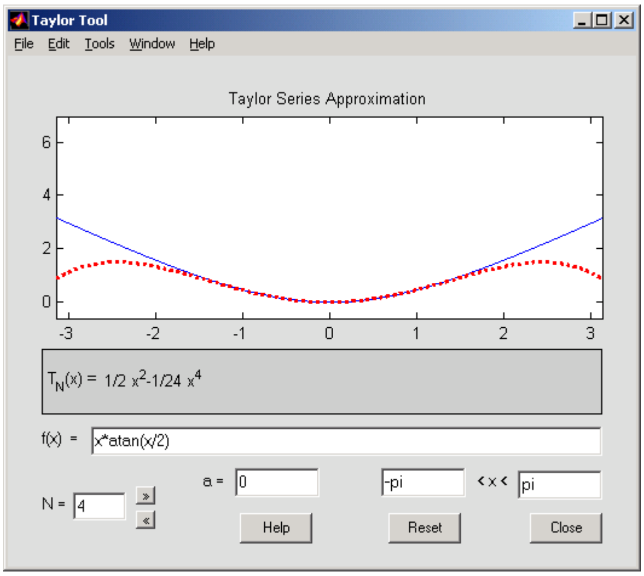
Solución:

Función	$f\left(x\right) = \dfrac{xarctgx}{\cos x\left(sen\left(2x\right)\right)^2}$

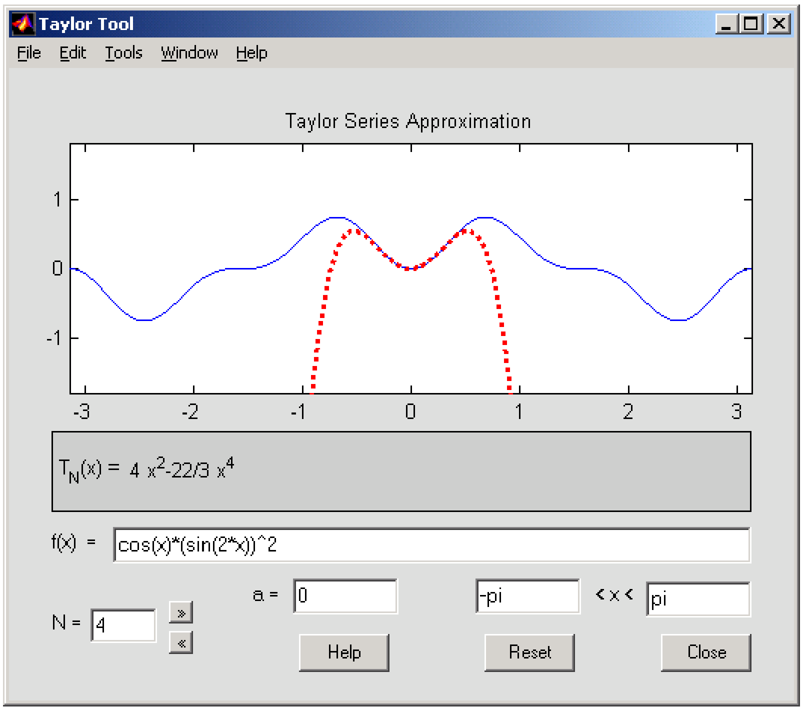
El polinomio de Taylor en x=0 es:



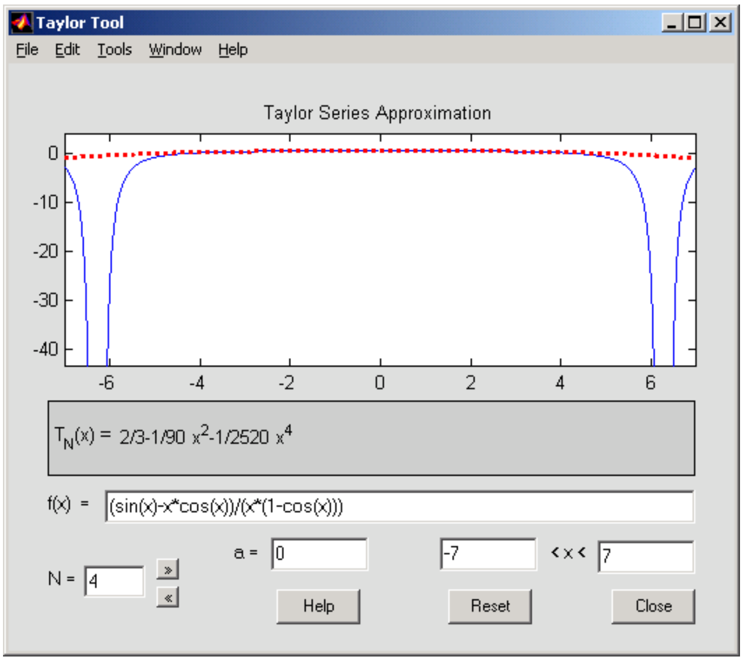
- Función: $f_1(x) = x arctg \frac{x}{2}$



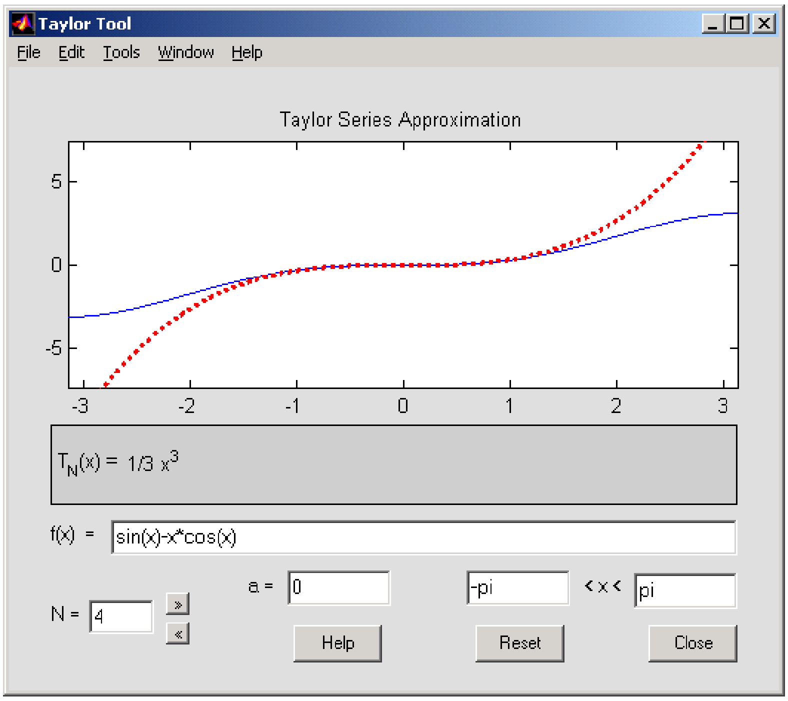
- Función: $f_2(x) = \cos(x)\left(sen(2x)\right)^2$



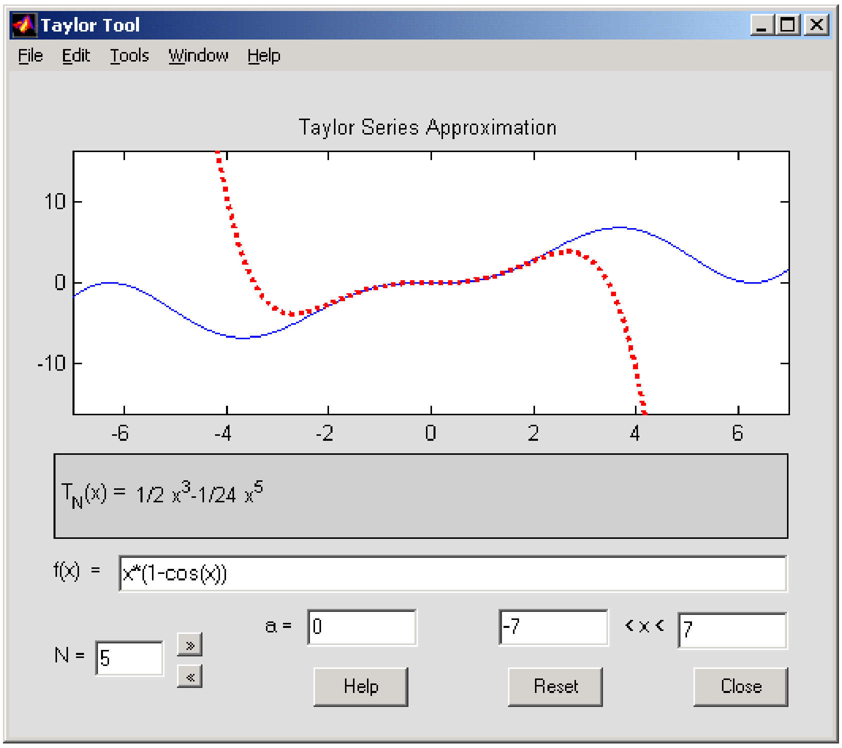
Función	$f(x) = \dfrac{senx - x\cos x}{x(1-\cos x)}$



- Función: $f_1(x) = senx - x\cos x$



- Función: $f_2(x) = x(1 - \cos x)$



Función	$f(x) = \dfrac{senx}{x}$

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

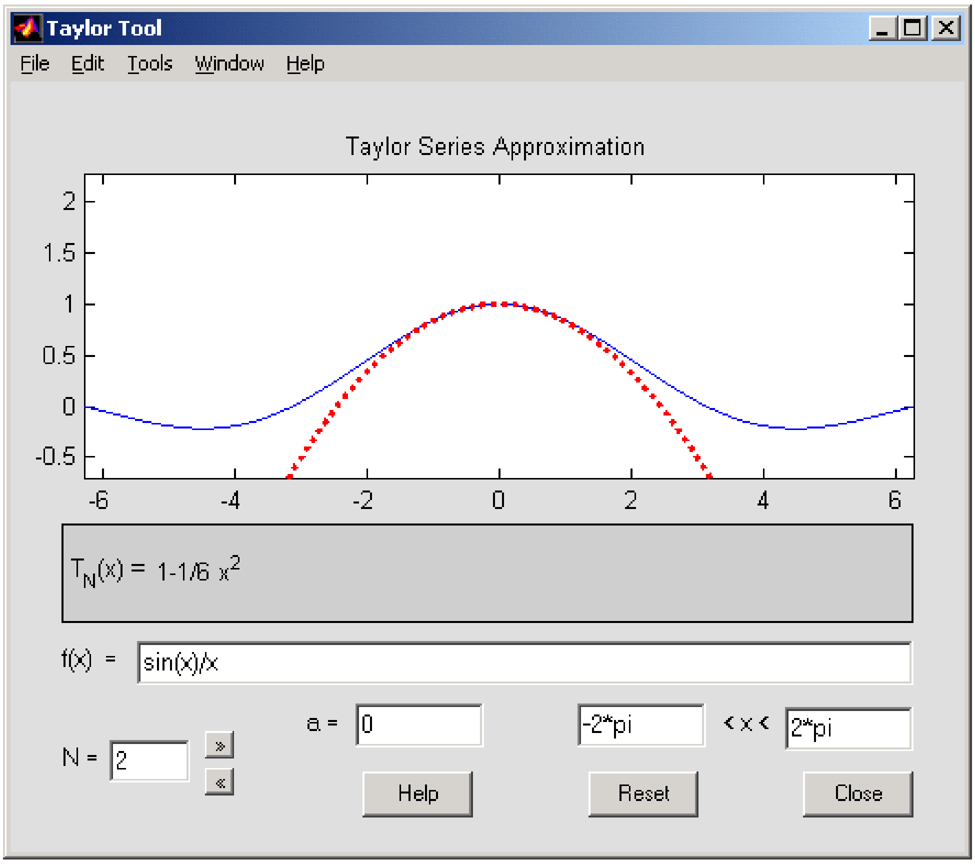
Las derivadas son:

$$f'(x) = \frac{x\cos x - senx}{x^2} \qquad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+f) - f(0)}{h} = 0$$

$$f'(x) = -\frac{senx}{x} - 2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{senx}{x^3} \qquad f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(0+f) - f'(0)}{h}$$

$$f'''(x) = -\frac{\cos x}{x} + 3\frac{senx}{x^2} + 6\frac{\cos x}{x^3} - 6\frac{senx}{x^4}$$

El polinomio de Taylor de orden 2 es $T_2 = 1 - \frac{1}{6}x^2$



Nota: Si en la solución de algún ejercicio crees que hay algún error ponte en contacto con la profesora para su corrección.