Matemáticas 1

RESUMEN TEORÍA:

Funciones de varias variables

Elena Álvarez Sáiz

Dpto. Matemática Aplicada y C. Computación

Universidad de Cantabria

Objetivos

1. Comprensión del concepto de límite, continuidad y diferenciabilidad de una función de dos variables.
2. Conocimiento del concepto de derivada parcial de una función de dos variables y comprensión de su interpretación geométrica.
3. Destreza en el cálculo de derivadas y diferenciales.

Contenidos

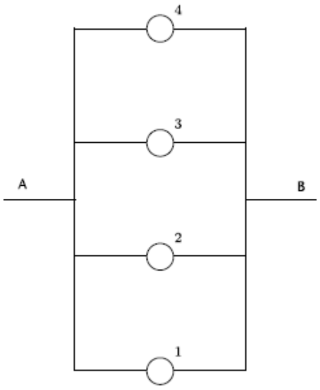
1. Derivadas direccionales. Derivadas parciales.
2. Diferencial. Regla de la cadena y derivación implícita.
3. Gradiente. Plano tangente.
4. Extremos de funciones de varias variables.

Ejemplos de funciones de varias variables

- Dados dos números cualesquiera x e y, su media aritmética es el número comprendido entre ambos es decir $f(x,y)=\dfrac{x+y}{2}$. En general si se tienen n números su media aritmética es: $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$
- Dados dos números positivos x e y, su media geométrica es el número comprendido entre ambos es decir $f(x,y)=\sqrt{xy}$. En general si se tienen n números su media geométrica es: $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$
- Un sistema de fiabilidad (o bien en circuitos eléctricos) funciona (la corriente pasa) si hay algún camino activado para ir des el principio (A) hasta el final (B) del sistema (circuito). Así pues, en una estructura en serie como ésta:

La función de varias variables que describe el sistema es: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2x_3x_4$, donde el componente i funciona si $x_i=1$ y no lo hace si $x_i=0$. De este modo, el sistema funciona si los cuatro componentes lo hacen es decir, si $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. En caso de que alguno de los componentes no funcione $x_i = 0$ la corriente no pasa de A a B.

Un sistema paralelo como por ejemplo:



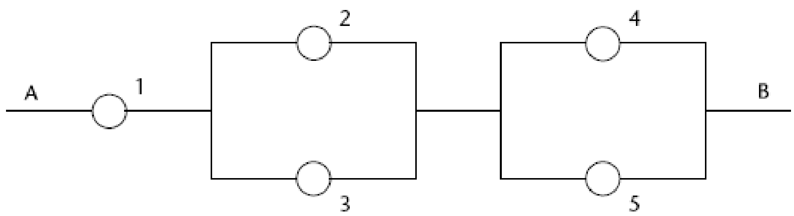
Se puede describir mediante la función de varias variables:

$$f(x_1, x_2, x_3.x_4.x_5) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)$$

- Un sistema estéreo hi-fi tiene los cinco componentes que presentamos a continuación: (1) amplificador, (2) sintonizador de FM, (3) sintetizador de onda media, (4) altavoz A y (5) altavoz B. Se considera que el sistema funciona si podemos obtener sonido por medio de la FM o bien mediante la onda media. La función que modeliza este sistema es:

$$f(x_1, x_2, x_3.x_4.x_5) = x_1\left[1 - (1 - x_2)(1 - x_3)\right]\left[1 - (1 - x_4)(1 - x_5)\right]$$

Esta es una representación esquemática del sistema



Funciones de dos variables

Una función real de dos variables, f, no es más que una correspondencia que asigna a cada pareja (x, y) de números reales otro número real único $f(x, y)$.

Se define el *dominio* de la función f como el conjunto de pares reales en los que la función está definida. El *rango* es el conjunto de números reales dado por

$$\operatorname{Im} f = \left\{ z \in \mathbb{R} \;/\; \left(x, y\right) \in D \right\}$$

Ejemplos:

Consideremos las siguientes funciones y determinemos su dominio:

1) $h\left(x, y\right) = \sqrt{2x - 3y + 4}$

Es el semiplano inferior determinado por la recta **$2x$–$3y$+4=0** incluyendo los puntos de la recta

2) $f\left(x, y\right) = \log\left(4x + y - 5\right)$

Se trata del semiplano superior determinado por la recta **$4x$+y–5=0** sin incluir los puntos de la recta

3) $g\left(x, y, z\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 3y + 4z - 6}}$

Se trata de la región del espacio determinada por el plano **$2x$–$3y$+$4z$=6** que queda del otro lado del origen sin incluir los puntos del plano.

4) $K\left(x, y, z\right) = \log\left(1 - x^2 - y^2\right)$

Consta del interior de la circunferencia **x+y=1** sin incluir la frontera.

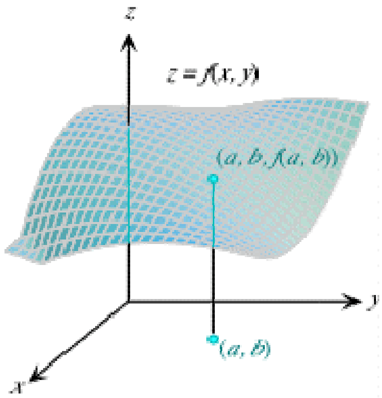
5) $T\left(x, y, z\right) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

Son todos los puntos del plano externos a la circunferencia **x+y=4**.

6) $Q\left(x, y, z\right) = \log\left(4 - x^2 - y^2 - z^2\right)$

Es el interior de la esfera con centro en el origen y radio 4 sin incluir los puntos de la esfera.

La gráfica de una función de dos variables $z = f(x, y)$ es la representación en el espacio $\mathbb{R}^3$ de todas las combinaciones posibles de valores (x, y, z) siendo z la imagen de (x, y) por la función f.



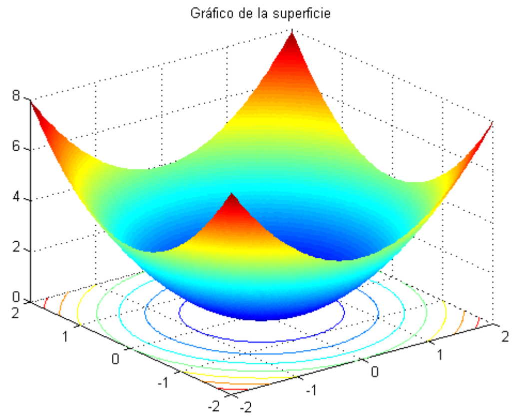
Como no es sencillo representar una función de dos variables, ya que su gráfica es una superficie en $\mathbf{R}^3$, pueden usarse conjuntos bidimensionales para obtener información tridimensional a través de los conceptos de **trazas** y de **curvas de nivel.**

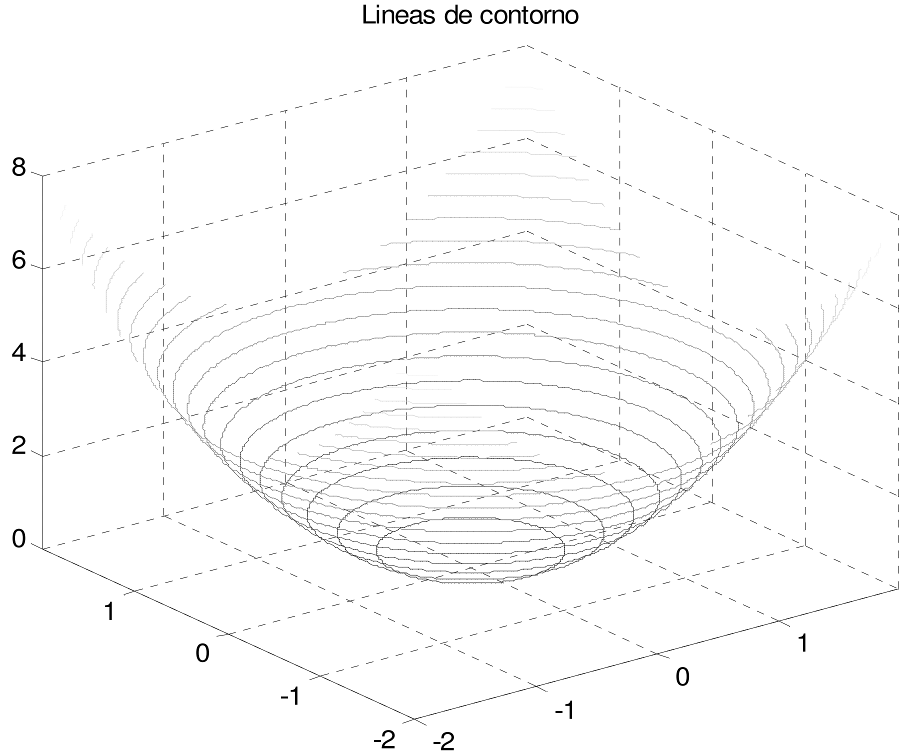
Dada una superficie **S** en $\mathbf{R}^3$ y un plano **P** cualquiera, la **traza** de **S** determinada por **P** se define como la curva obtenida de **S∩P**.

Las trazas más utilizadas además de las curvas de nivel para el análisis de una superficie son los planos coordenados ***x*=0** y ***y*=0** ó planos paralelos a ellos ***x*=*c*** y ***y*=*c*.**

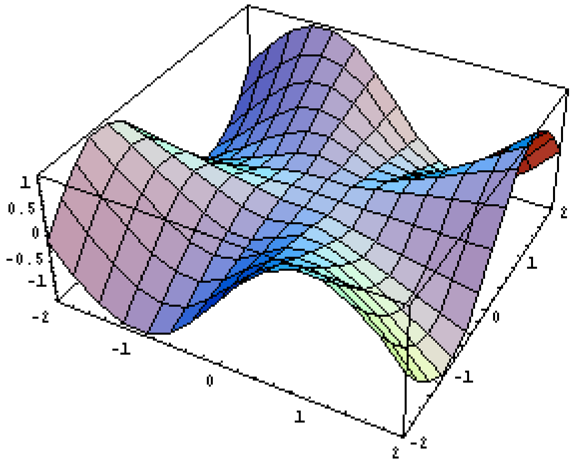
Curvas de nivel

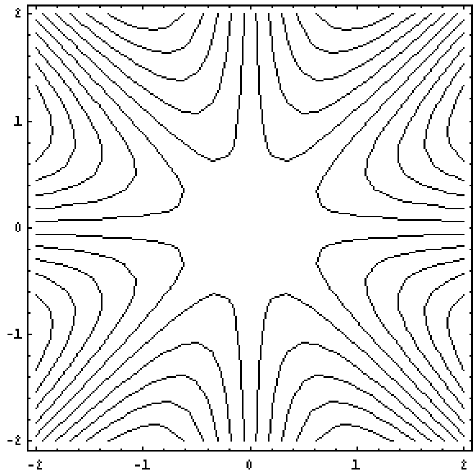
Para una función de dos variables, $z = f(x, y)$, la curva de nivel para $z = k$ es el conjunto de todos los pares de valores (x, y) tales que su imagen es el valor k.

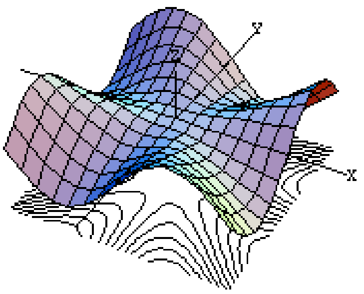


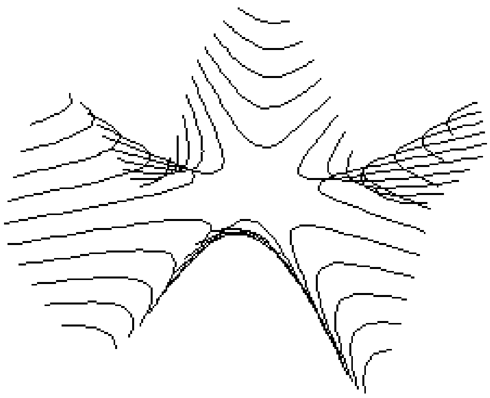


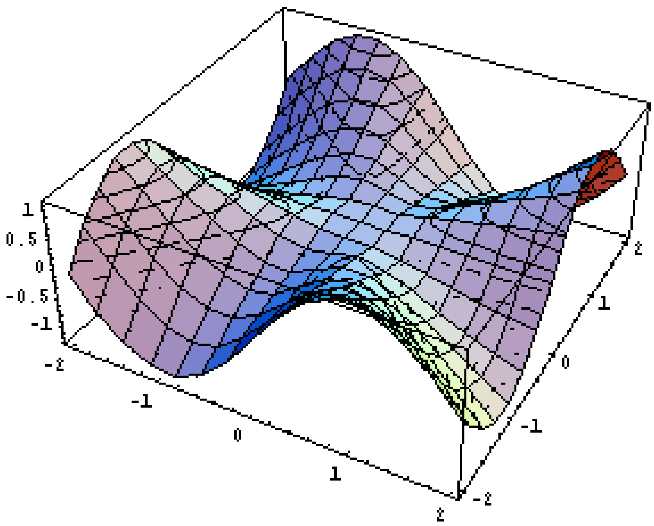
Ejemplo: Observa las curvas de nivel de $f\left(x,y\right) = xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en las figuras siguientes.


1
0.5
0
-0.5
-1
-2
-1
0
1
2
-2
-1
0
1
2


2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2


Y
X




1
0.5
0
-0.5
-1
-2
-1
0
1
2
-2
-1
0
1
2

Superficies de nivel

Para el caso de funciones de tres variables, como ya lo comentamos, es imposible hacer su gráfica por lo que siguiendo la idea anterior buscamos obtener información de un conjunto de dimensión cuatro a partir de conjuntos tridimensionales, las superficies de nivel, que son una generalización de las curvas de nivel por lo que podemos dar la siguiente definición:

Dada la función w=f(x,y,z), sus **superficies de nivel** se definen como los conjuntos

$$S=\{(x,y,z)/\ f(x,y,z)=c\}$$

Observa que los conjuntos definidos son superficies y al igual que para las curvas de nivel, una función de tres variables tiene un número infinito de superficies de nivel por lo que en la práctica (otra vez) sólo se toman algunas que sean representativas.

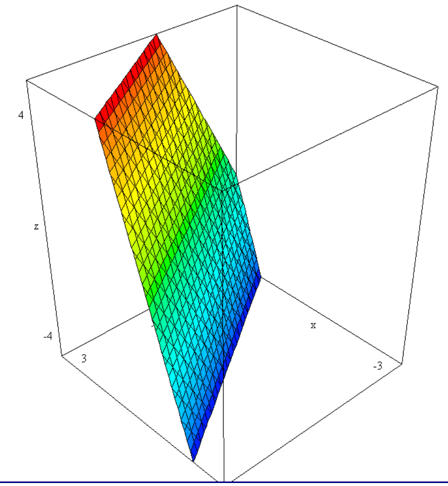
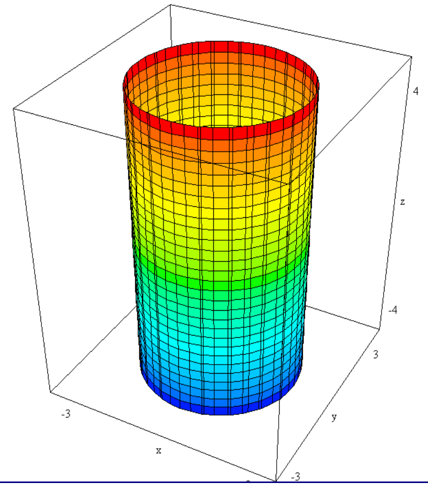
Así como las curvas de nivel sirven para señalar los puntos con la misma altitud, misma presión, etc., las superficies de nivel también tienen aplicaciones físicas.

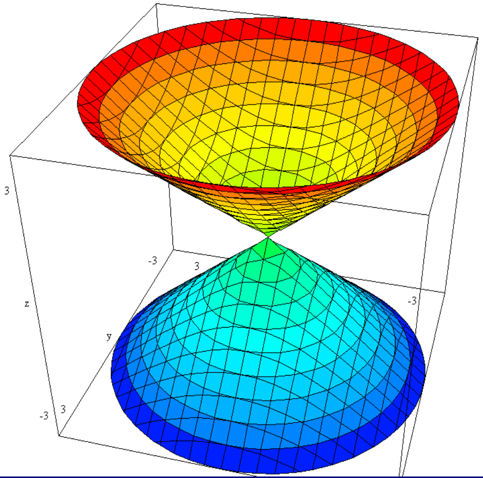
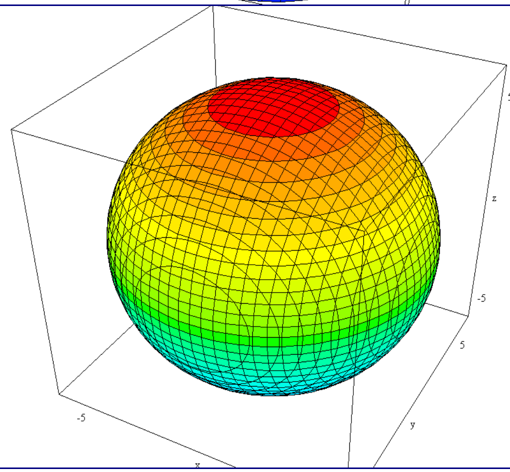
Por ejemplo, si V(x,y,z) representa el voltaje (o potencial) de un campo eléctrico en el punto (x,y,z), entonces las superficies de nivel V(x,y,z)=c se dicen superficies equipotenciales y representan a todos los puntos en el espacio con el mismo potencial.

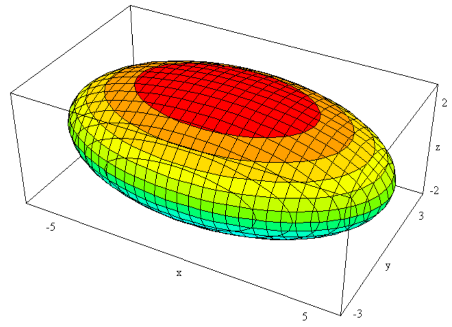
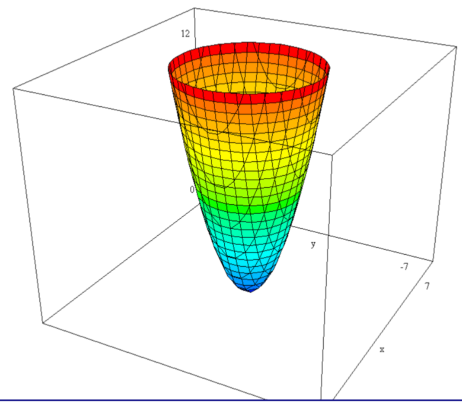
Por otra parte, cualquier gráfica de una función z=f(x,y), es una superficie de nivel, basta considerar g(x,y,z)=z−f(x,y) y entonces la superficie de nivel g(x,y,z)=0 es la gráfica de z=f(x,y). Es por esto que a las gráficas de este tipo de funciones o de las ecuaciones de tres variables se les llama superficies.

Para trazar una superficie de nivel se usan sus trazas con planos de la forma $\boldsymbol{x}=\mathbf{c}$, $\boldsymbol{y}=\mathbf{c}$ y $\boldsymbol{z}=\mathbf{c}$.

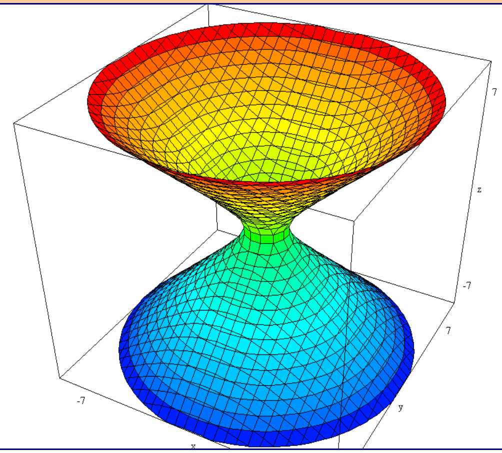
Las superficies de nivel más importantes son las llamadas **superficies cuadráticas** y es muy conveniente que las repases en cualquier libro de Geometría Analítica o de Cálculo. Dichas superficies son elipsoides, conos elípticos, paraboloides elípticos, paraboloides hiperbólicos, hiperboloides de uno y dos mantos, cilindros (o sábanas) elípticos, parabólicos e hiperbólicos.

	Ecuaciones paramétricas	Ecuaciones implícitas	Gráfica
Plano	$x = x_o + ua_1 + vb_1$ $y = y_o + ua_2 + vb_2$ $z = z_o + ua_3 + vb_3$	$Ax + By + Cz + D = 0$	
Cilindro	$x = r\cos u$ $y = rsenu$ $z = v$	$x^2 + y^2 = r^2$	

	Ecuaciones paramétricas	Ecuaciones implícitas	Gráfica
Cono (recto de sección circular)	$x = u\cos v$ $y = u sen v$ $z = u$	$z^2 = x^2 + y^2$	
Esfera (centrado en (0,0,0) y radio r	$x = r\, sen\, u \cos v$ $y = r\, sen\, u\, sen v$ $z = r\cos u$	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	

	Ecuaciones paramétricas	Ecuaciones implícitas	Gráfica
Elipsoide	$x = a\,\mathrm{sen}\,u\cos v$ $y = b\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen} v$ $z = c\cos u$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	
Paraboloide (de sección circular)	$x = u\ \cos v$ $y = u\,\mathrm{sen} v$ $z = u^2$	$z = x^2 + y^2$	

Profesora: Elena Álvarez Sáiz

	Ecuaciones paramétricas	Ecuaciones implícitas	Gráfica
Hiperboloide	$x = Chu\ \cos v$ $y = Shu\ senv$ $z = Shu$	$z^2 = x^2 + y^2 - 1$	

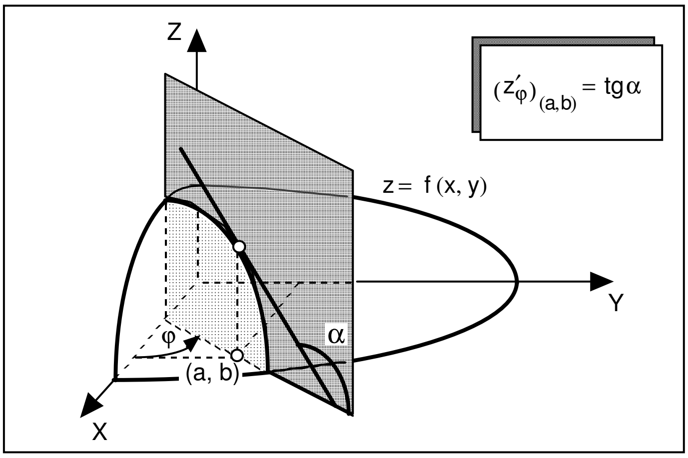
Derivada direccional

Definición (Dirección).- Una dirección en $\mathbb{R}^2$ es cualquier vector de norma 1.

Su $\overline{u}$ es una dirección en el plano entonces se puede expresar como $\overline{u} = (\cos\varphi, sen\varphi)$ siendo ϕ el ángulo que forma el vector con el eje positivo de las X.

Definición (Derivada direccional en un punto): Sea f una función de dos variables y $\overline{u}$ una dirección. Se define la derivada direccional de f en el punto $\overline{x_o}(a,b)$ en la dirección de $\overline{u}$ como el valor del siguiente límite en el caso de que exista:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\overline{x_o}+t\overline{u}\right)-f\left(\overline{x_o}\right)}{t} = D_u f\left(\overline{x_o}\right) = f_u'\left(\overline{x_o}\right)$$



En el caso de que $\overline{u} = (\cos\phi, sen\phi)$ la derivada direccional se puede expresar como:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(a+t\cos\phi, b+tsen\phi\right)-f\left(a,b\right)}{t} = D_u f\left(\overline{x_o}\right) = f_u'\left(\overline{x_o}\right)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: es la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie con el plano vertical que contiene a la dirección dada.

Derivada parcial

Las derivadas parciales son derivadas direccionales según las direcciones $\overline{e_1} = (1,0)$ y $\overline{e_2} = (0,1)$ representan la razón de cambio de una función f con respecto a una de sus variables independientes manteniendo constantes las demás. Este proceso es conocido con el nombre de derivación parcial.

Definición (Derivadas parciales).- Si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables se define la derivada parcial de f en el punto (a,b)

- con respecto a x como

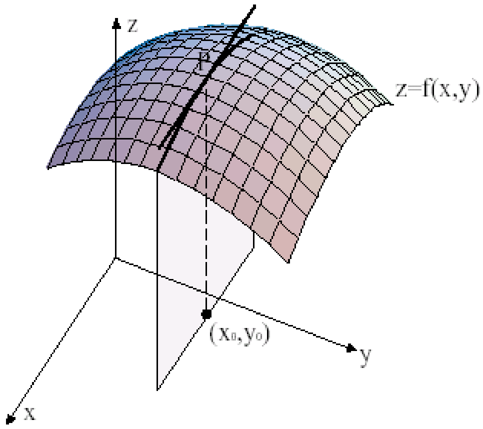
$$f'_x(a,b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x}$$

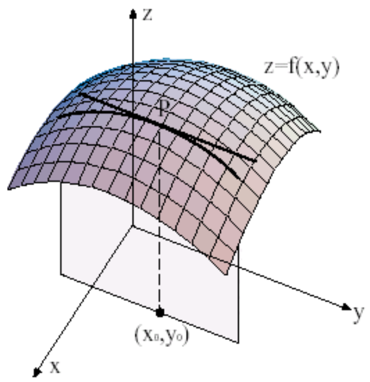
- con respecto a y como

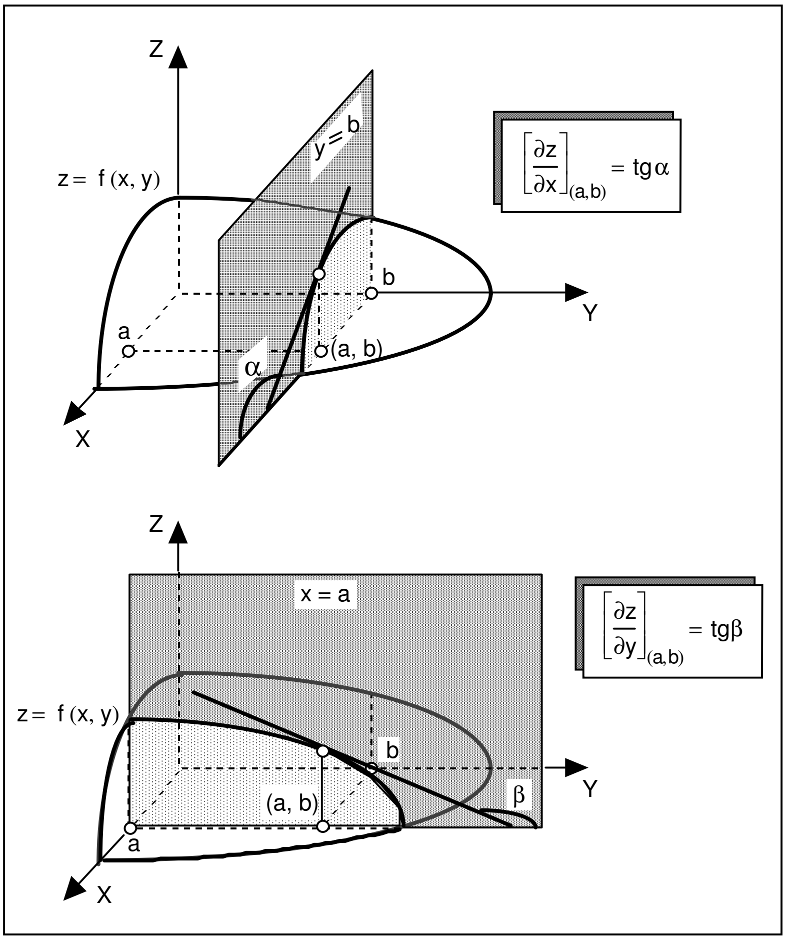
$$f'_y(a,b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y}$$

siempre que los límites anteriores existan.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA de las derivadas parciales.- Las derivadas parciales no son más que derivadas de una función de una variable: la función cuya gráfica se obtiene como intersección de la superficie con los planos verticales $x = a$, $y = b$ en los casos de derivada parcial en la dirección de y y en la dirección de x, respectivamente.







Interpretación de la derivada Parcial respecto a x y respecto a y

NOTACIÓN: Para hacer referencia a la derivada parcial de la función $z = f(x,y)$ respecto a la variable x e y se suelen utilizar las siguientes notaciones:

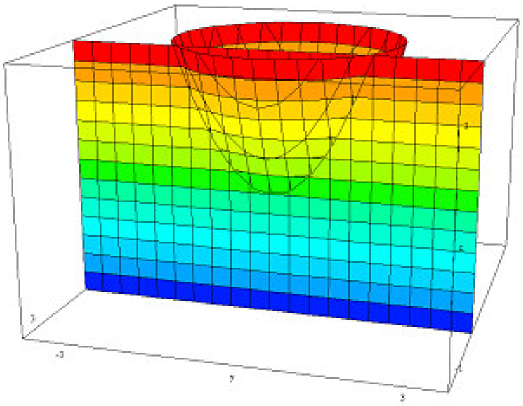
$$f_x'\left(a,b\right)=\frac{\partial z}{\partial x}\left(a,b\right)=z_x'\left(a,b\right) \qquad f_y'\left(a,b\right)=\frac{\partial z}{\partial y}\left(a,b\right)=z_y'\left(a,b\right)$$

Ejemplo:

DERIVADA PARCIAL

$z=x^2+y^2$ Punto: $P\left(1,1\right)$ $\vec{u}=\left(0,1\right)$

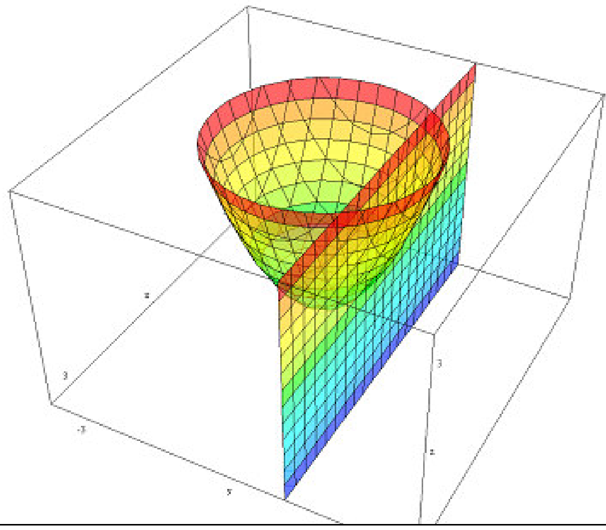
$x=1$



DERIVADA PARCIAL

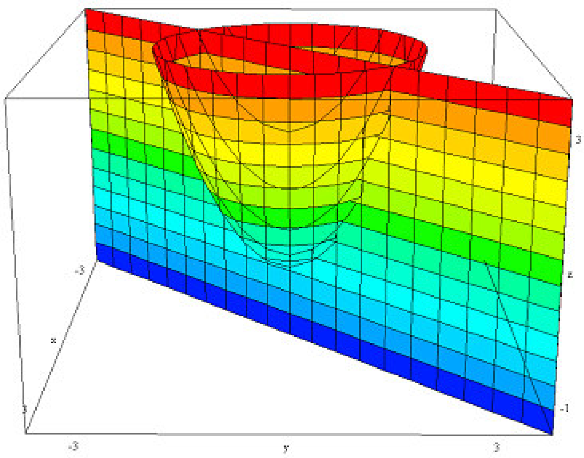
$z=x^2+y^2$ Punto: $P\left(1,1\right)$ $\vec{u}=\left(1,0\right)$

$y=1$



DERIVADA DIRECCIONAL

$z=x^2+y^2$ Punto: $P\left(1,1\right)$ $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



IMPORTANTE:

- Una función de dos variables puede ser continua en un punto y no ser derivable parcialmente en él.
- La existencia de derivadas parciales para las funciones de varias variables no implica la continuidad de la función en el punto.

DERIVADAS PARCIALES de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}\left(x,y\right) = f'_{xx}\left(x,y\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z'_x\left(x+\Delta x, y\right) - z'_x\left(x,y\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}\left(x,y\right) = f_{xy}\left(x,y\right) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z'_x\left(x, y+\Delta y\right) - z'_x\left(x,y\right)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}\left(x,y\right) = f_{yy}\left(x,y\right) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z'_y\left(x, y+\Delta y\right) - z'_y\left(x,y\right)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}\left(x,y\right) = f_{yx}\left(x,y\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z'_y\left(x+\Delta x, y\right) - z'_y\left(x,y\right)}{\Delta x}$$

TEOREMA DE SCHWARZ.- Sea $z = f\left(x,y\right)$ es una función de dos variables. Si se verifica que existen $f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ y además f_{xy} es continua en una región abierta D entonces se cumple que en dicha región se da la igualdad de las derivadas cruzadas de segundo orden.

Funciones diferenciables. Diferencial de una función de dos variables

Definición (Diferenciable y diferencial).- Sea $z = f\left(x,y\right)$ una función definida y acotada en un dominio D al cual pertenece $\overline{x_o} = \left(a,b\right)$ y que tiene derivadas parciales en dicho punto. Se dice que es diferenciable en $\overline{x_o}$ si el incremento total:

$$\Delta z = f\left(a+\Delta x, b+\Delta y\right) - f\left(a,b\right)$$

correspondiente a los incrementos arbitrarios de Δx e Δy se puede expresar como

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

cumpliendo que:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon(\Delta x,\Delta y) = 0$$

A la parte lineal en Δx e Δy se le llama *diferencial* de $z = f(x,y)$ en $\overline{x_o} = (a,b)$ y se le denota,

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\ .}$$

TEOREMA (Condición necesaria de diferenciabilidad).- Si la función $z = f(x,y)$ es diferenciable en el punto (a,b) entonces es continua en (a,b).

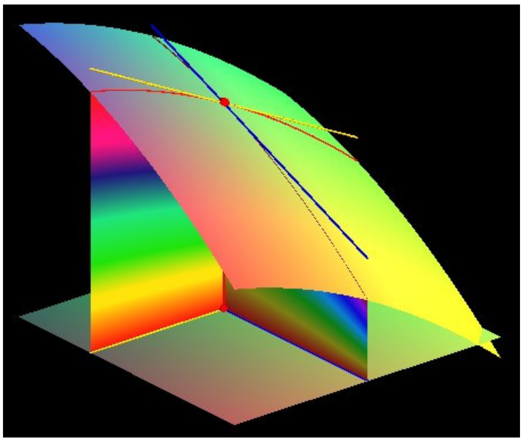
TEOREMA.- Si la función $z = f(x,y)$ y una o las dos derivadas parciales primeras son continuas en un entorno del punto (a,b) entonces la función es diferenciable en dicho punto.

Plano tangente. Aproximación de la función por la diferencial

Sea S una superficie de ecuación z=f(x,y) diferenciable en (a,b) se puede calcular el plano tangente a la superficie en el punto P(a, b, f(a,b)) como el plano que pasa por P y sus vectores directores son los directores de las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = a + t \\ y = b \\ z = f(a,b) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot t \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = a \\ y = b + t \\ z = f(a,b) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot t \end{cases}$$

$$v_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) \qquad v_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$



Por lo tanto un vector normal al plano tangente es:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\vec{j} - \cdot\vec{k}$$

La ecuación del plano tangente es entonces:

$$\left\langle (x,y,z) - (a,b,f(a,b)), \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)\right\rangle = 0$$

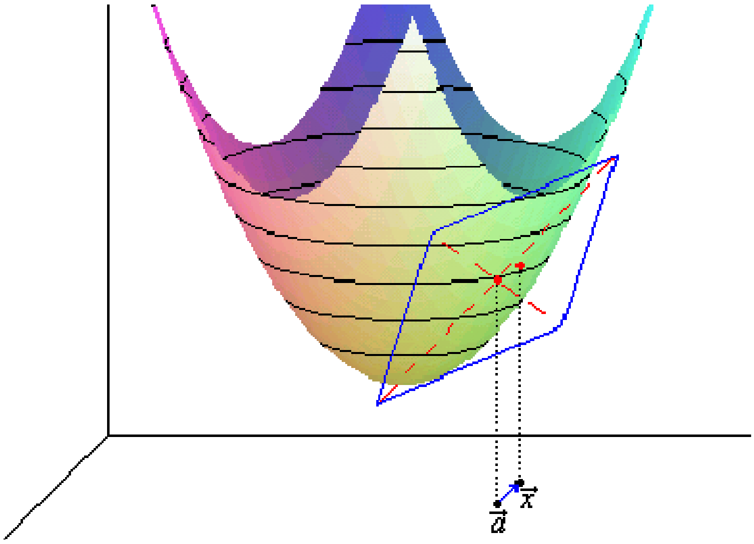
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Si f es diferenciable

$$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y$$

para $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$



Relación entre la diferenciabilidad y la derivada direccional

TEOREMA: Si una función es diferenciable existe la derivada direccional en cualquier dirección.

TEOREMA.- Si $z = f(x,y)$ es una función diferenciable en (a,b) entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\overline{u} = (\cos\phi, sen\phi)$ es

$$D_u f(a,b) = f_x(a,b)\cos\phi + f_y(a,b)sen\phi$$

Gradiente

Definición.- Si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables se define el gradiente de f en el punto $\overline{x_o} = (a,b)$ como el vector:

$$\nabla f(a,b) = f_x(a,b)\mathbf{i} + f_y(a,b)\mathbf{j}$$

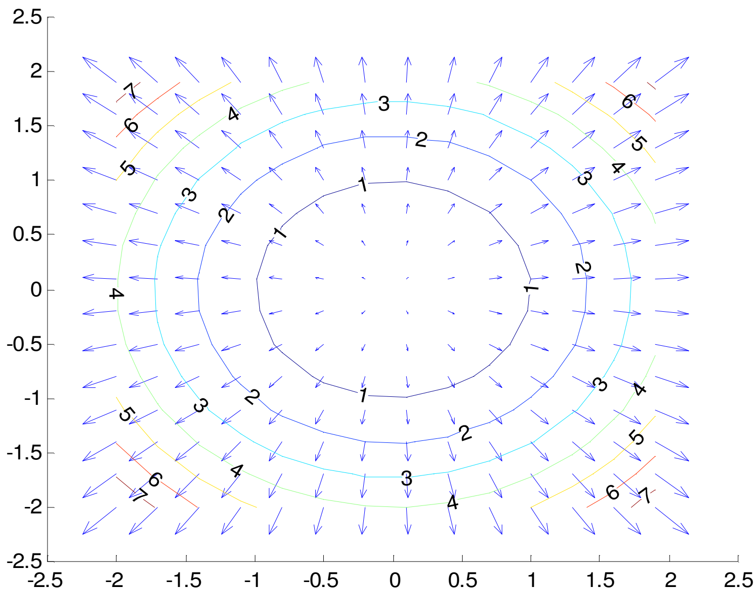
PROPIEDADES DEL GRADIENTE: Sea f una función diferenciable en el punto (a,b). Se cumplen las siguientes propiedades:

(a) Si el gradiente de f en (a,b) es el vector nulo entonces la derivada direccional de f en cualquier dirección es cero.

(b) La dirección de máximo crecimiento de f viene dada por $\nabla f(x,y)$. El valor máximo de la derivada direccional es $\|\nabla f(x,y)\|$.

(c) La dirección de mínimo crecimiento de f viene dada por $-\nabla f(x,y)$. El valor mínimo de la derivada direccional es $-\|\nabla f(x,y)\|$.

(d) El vector gradiente es normal a las curvas de nivel.

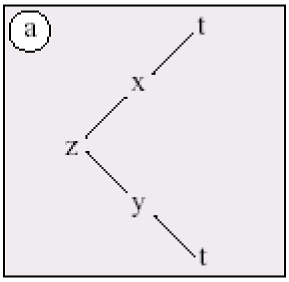


Curvas de nivel de la superficie $z = x^2 + y^2$

Regla de la cadena

REGLA DE LA CADENA.- Sea $z = f(x,y)$ una función definida en un dominio D siendo cada una de las variables x e y una función de la variable t

$$x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ t_o < t < t_1$$



Si en el punto t existen las derivadas

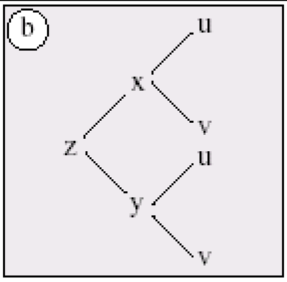
$$\frac{dx}{dt} = \phi'(t) \qquad \frac{dy}{dt} = \psi'(t)$$

y para cada una de las variables $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ la función $z = f(x,y)$ es diferenciable entonces se tiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

DERIVACIÓN COMPUESTA DE DOS VARIABLES.- Sea $z = f(x,y)$ una función definida en un dominio D siendo cada una de las variables x e y una función de dos variables u y v

$$x = \phi(u,v),\ y = \psi(u,v)$$



Si en el punto (u,v) existen las derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$$

y en el punto (x,y) la función es diferenciable entonces se tiene:

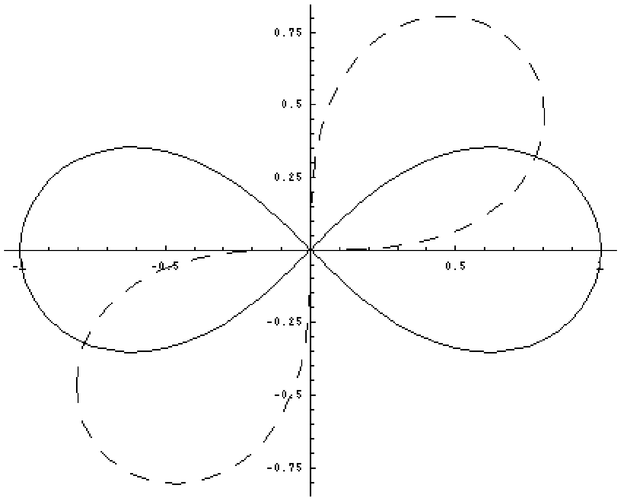
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Derivación implícita

TEOREMA FUNCION IMPLÍCITA: Sea la ecuación $F(x,y) = 0$. Dicha ecuación define en un entorno del punto $P(a,b)$ a la variable y como función implícita de x, es decir, $y = f(x)$ si:

- El punto (a,b) pertenece a la curva de ecuación $F(x,y) = 0$
- Las derivadas parciales $F'_x(x,y)$ y $F'_y(x,y)$ son funciones continuas en un entorno del punto (a,b)
- $F'_y(x,y) \neq 0$

NOTA: En el caso de que se cumplan los dos primeros puntos y el tercero se sustituya por $F'_x(x,y) \neq 0$ entonces es la x la que se define como función implícita de y, es decir, $x = h(y)$.



En trazo continuo:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$$

En trazo discontinuo:

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$$

TEOREMA.- Si la ecuación $F\left(x,y\right)=0$ define a y como función derivable de x entonces:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x\left(x,y\right)}{F_y\left(x,y\right)}\ ,\ F_y\left(x,y\right)\neq 0$$

Demostración: Basta derivar $F\left(x,y\right)=0$ respecto a x aplicando la regla de la cadena:

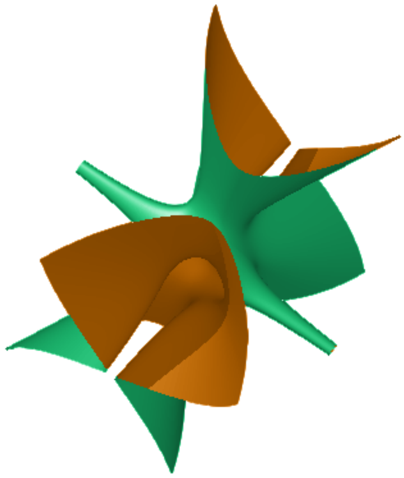
$$F_x+F_y\frac{dy}{dx}=0$$

TEOREMA FUNCION IMPLÍCITA: Sea la ecuación $F\left(x,y,z\right)=0$. Dicha ecuación define en un entorno del punto $P\left(a,b,c\right)$ a la variable z como función implícita de x e y es decir, $z=f\left(x,y\right)$ si:

- El punto $\left(a,b,c\right)$ pertenece a la superficie de ecuación $F\left(x,y,z\right)=0$
- Las derivadas parciales $F_x'\left(x,y,z\right)$, $F_y'\left(x,y,z\right)$ y $F_z'\left(x,y,z\right)$ son funciones continuas en un entorno del punto $\left(a,b,c\right)$
- $F_z'\left(a,b,c\right)\neq 0$

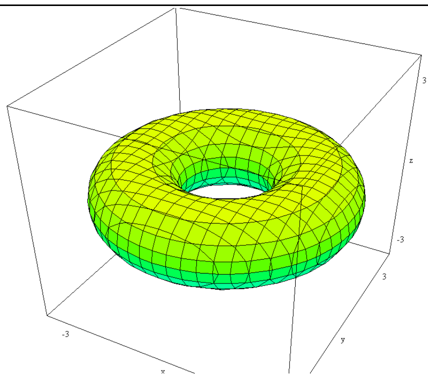
TEOREMA.- Si la ecuación $F(x,y,z)=0$ define a z como función diferenciable de x e y entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\;,\quad F_z(x,y,z)\neq 0 \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\;,\quad F_z(x,y,z)\neq 0$$



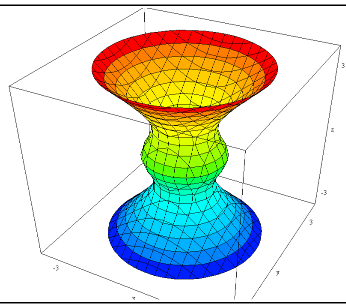
Superficie implícita de ecuación: $\sqrt{xy}-\sqrt{yz}-\sqrt{zx-y}=1$

OTROS EJEMPLOS:

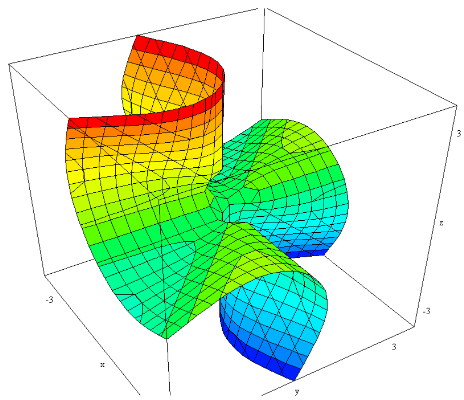


$$z^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2=1$$

$$0.8z^2-\log\left(0.8\left(z^2+0.3\right)\right)=x^2+y^2$$



$$-5\left(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x\right) + 2\left(xy + xz + yz\right) = 0$$



Superficies implícitas: Plano tangente: Sea S una superficie de ecuación $F\left(x,y,z\right) = C$ y sea Po un punto de S donde F es diferenciable. La ecuación del plano tangente a S en $P_o\left(x_o,y_o,z_o\right)$ es:

$$F_x\left(x_o,y_o,z_o\right)\left(x - x_o\right) + F_x\left(x_o,y_o,z_o\right)\left(y - y_o\right) + F_z\left(x_o,y_o,z_o\right)\left(z - z_o\right) = 0$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal a S en $P_o\left(x_o,y_o,z_o\right)$ son

$$\begin{cases} x = x_o + F_x\left(x_o,y_o,z_o\right)\cdot t \\ y = y_o + F_y\left(x_o,y_o,z_o\right)\cdot t \\ z = z_o + F_z\left(x_o,y_o,z_o\right)\cdot t \end{cases}$$

siempre y cuando no sean simultáneamente cero todas las derivadas parciales en el punto.

Fórmula de Taylor

En este apartado generalizamos la fórmula de Taylor vista para funciones de una variable. Como es sabido si $y = f\left(x\right)$ es una función de una variable con derivadas de cualquier orden en un entorno del punto $x = a$, la fórmula de Taylor en este punto viene dada por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

donde R_n es un infinitésimo de orden superior a $(x-a)^n$, es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n}{(x-a)^n} = 0$$

Utilizando la expresión del resto de Lagrange se tiene que

$$R_n = \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

siendo c un punto intermedio entre a y x.

La generalización de la fórmula anterior para una función de dos variables, $z = f(x,y)$, que admite derivadas parciales de cualquier orden en un entorno de (a,b) viene dada por:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \\ & + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) \right] + R_2 \end{aligned}$$

donde R_2 es un infinitésimo verificando:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{R_2}{\left\| (x-a, y-b) \right\|^2} = 0$$

Haciendo

$$\begin{aligned} x = a + \Delta x \quad &\Leftrightarrow \quad x - a = \Delta x \\ y = b + \Delta y \quad &\Leftrightarrow \quad y - b = \Delta y \end{aligned}$$

[1] Con objeto de no complicar la notación se ha considerado únicamente la fórmula de Taylor de orden 2 pudiendo generalizarse fácilmente a cualquier orden.

la expresión de la fórmula de Taylor es:

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x, b+\Delta y) &= f(a,b) + f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(\Delta x)^2 + f_{yy}(a,b)(\Delta y)^2 + 2f_{xy}(a,b)\Delta x \Delta y \right] + R_2 \end{aligned}$$

Esta expresión puede escribirse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} &\vec{x} = (a+\Delta x, b+\Delta y) \\ &\overrightarrow{x_o} = (a,b) \\ &f(\vec{x}) = f(\overrightarrow{x_o}) + \left\langle \nabla f(\overrightarrow{x_o}), \vec{x} - \overrightarrow{x_o} \right\rangle + \frac{1}{2}\left(\vec{x} - \overrightarrow{x_o}\right)^T \cdot Hf(\overrightarrow{x_o}) \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{x_o}\right) + R_2 \end{aligned}$$

donde

$$Hf(\overrightarrow{x_o}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overrightarrow{x_o}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overrightarrow{x_o}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overrightarrow{x_o}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overrightarrow{x_o}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx}(\overrightarrow{x_o}) & f_{xy}(\overrightarrow{x_o}) \\ f_{yx}(\overrightarrow{x_o}) & f_{yy}(\overrightarrow{x_o}) \end{pmatrix}$$

se llama **matriz hessiana**. El término entre corchetes se le denomina diferencial segunda y escribiendo $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ se tendrá:

$$\begin{aligned} d^2 f &= f_{xx}(a,b)dx^2 + f_{yy}(a,b)dy^2 + 2f_{xy}(a,b)dxdy = \\ &= \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definición de extremos. Puntos críticos

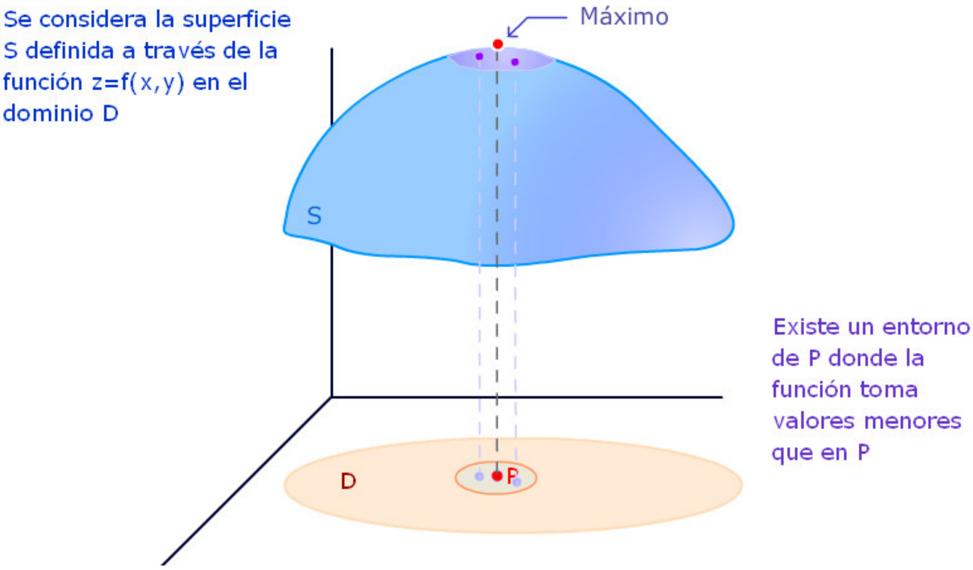
Definición (Extremos absolutos).- Sea $z = f(x,y)$ una función definida en una región D y sea $(a,b) \in D$ se dice que

(a) $f(a,b)$ es un valor máximo absoluto de f en D si

$$f(a,b) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$$

(b) $f(a,b)$ es un valor mínimo absoluto de f en D si

$$f(a,b) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$$



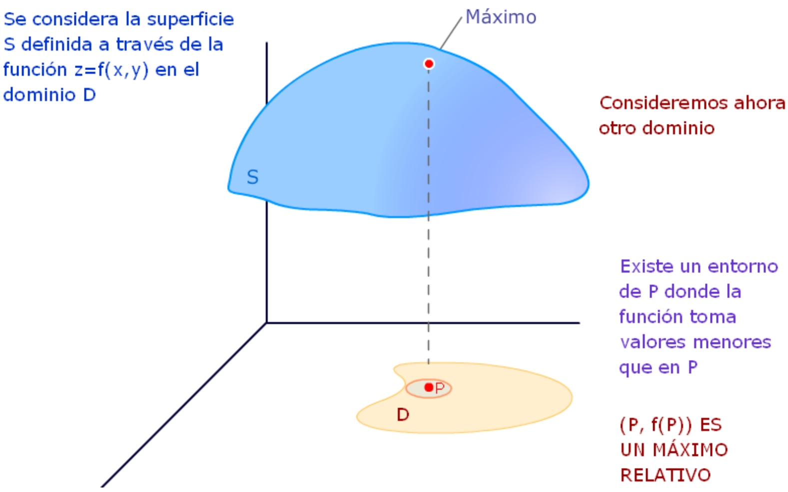
Definición (Extremos relativos).- Sea $z = f(x,y)$ una función definida en una región D y sea $(a,b) \in D$ se dice que

(a) $f(a,b)$ es un valor máximo relativo de f en D si existe un entorno B (a,b) tal que

$$f(a,b) \geq f(x,y) \ \ \forall (x,y) \in B$$

(b) $f(a,b)$ es un valor mínimo relativo de f en D si existe un entorno B (a,b) tal que

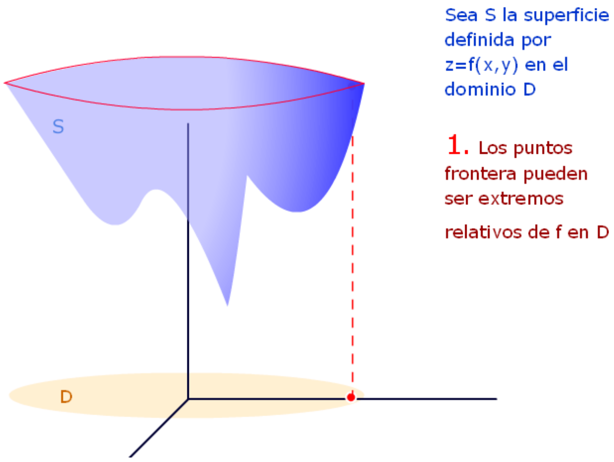
$$f(a,b) \leq f(x,y) \ \ \forall (x,y) \in B$$



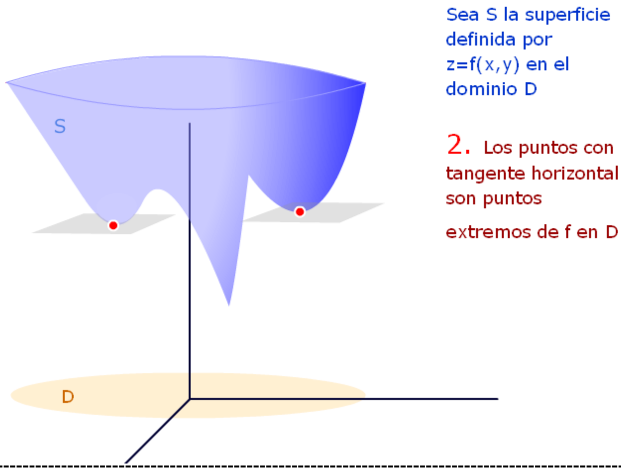
TEOREMA DE WEIERSTRASS.- Si $z = f(x,y)$ una función continua en un subconjunto de D de $\mathbb{R}^2$ acotado y que contiene a su frontera entonces la función f tiene máximo y mínimo en D.

Definición (Punto crítico).- Sea $z = f(x,y)$ una función definida en una región D y sea $(a,b) \in D$ se dice que es un punto crítico si se cumple una de las afirmaciones siguientes:

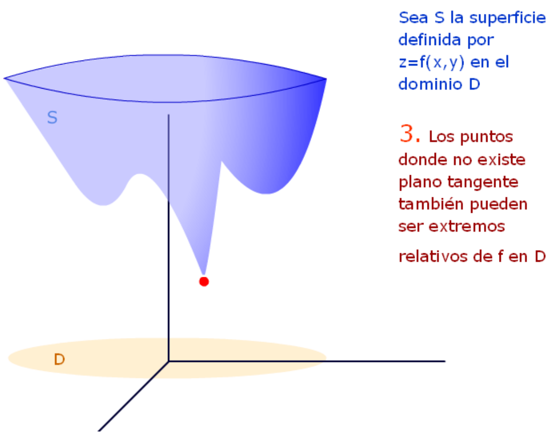
(1) (a,b) está situado en el contorno de D. A estos puntos se les llama puntos *frontera.*



(2) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, es decir, $\nabla f(a,b) = 0$. A estos puntos se les llama *estacionarios.*



(3) no existe $f_x(a,b)$ ó $f_y(a,b)$. A estos puntos se les llama *singulares*.

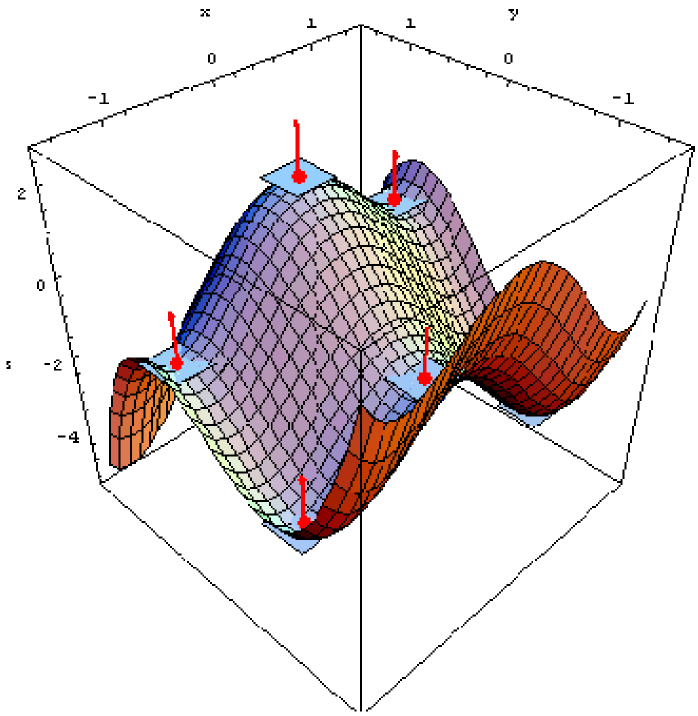


TEOREMA.- Si $f(a,b)$ es un extremo relativo de f en una región abierta de D entonces el punto (a,b) es un punto crítico de f.

Condición necesaria para la existencia de extremo de funciones diferenciables

TEOREMA.- Sea $z = f(x,y)$ una función diferenciable en D. Es condición necesaria para la existencia de un extremo relativo de f en $(a,b) \in D$ que se verifique

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$



IMPORTANTE.- Es condición necesaria pero no suficiente. Basta tomar como ejemplo la función $f(x,y) = y^2 - x^2$ que cumple que $(0,0)$ es un punto estacionario y sin embargo no es extremo relativo (ni máximo ni mínimo).

En efecto, se cumple

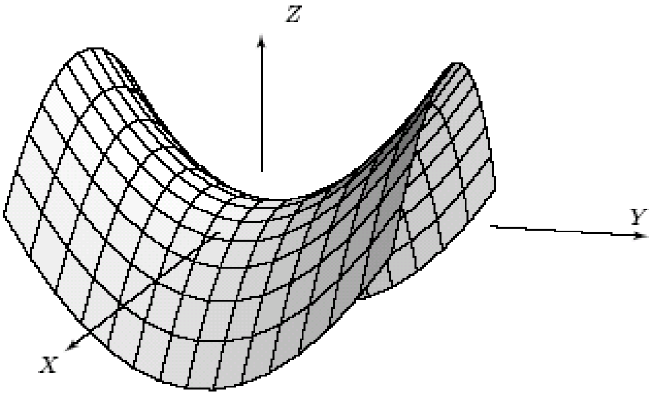
$$f_x(x,y) = -2x \quad \rightarrow \; f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = 2y \quad \rightarrow \; f_y(0,0) = 0$$

y sin embargo el punto (0,0) no es ni máximo ni mínimo.

$$f(0,0) = 0 \qquad\qquad f(x,0) = -x^2 < 0 \qquad\qquad f(0,y) = y^2 > 0$$

Luego en todo entorno del punto (0, 0) existen puntos (x, y) cumpliendo $f(x,y) > f(0,0)$ y puntos (x, y) cumpliendo $f(x,y) < f(0,0)$. La siguiente imagen muestra la gráfica de la función



Cálculo de los extremos relativos de una función de dos variables z=f(x,y)

Teniendo en cuenta la fórmula de Taylor

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x, b+\Delta y) &= f(a,b) + f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(\Delta x)^2 + f_{yy}(a,b)(\Delta y)^2 + 2f_{xy}(a,b)\Delta x\Delta y\right] + R_2 \end{aligned}$$

si (a, b) es un punto cumpliendo $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ se tendrá que:

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) &= \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(\Delta x)^2 + f_{yy}(a,b)(\Delta y)^2 + 2f_{xy}(a,b)\Delta x\Delta y\right] + R_2 \end{aligned}$$

Considerando Δx e Δx suficientemente pequeños se cumple que:

$$\begin{aligned} signo\big(f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)\big) &= \\ &= signo\left[f_{xx}(a,b)(\Delta x)^2 + f_{yy}(a,b)(\Delta y)^2 + 2f_{xy}(a,b)\Delta x\Delta y\right] \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} d^2 f &= f_{xx}(a,b)dx^2 + f_{yy}(a,b)dy^2 + 2f_{xy}(a,b)dxdy = \\ &= \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

se trata de determinar el signo de la diferencial segunda o equivalentemente si la matriz hessiana es definida positiva o negativa

Método práctico: Los pasos a seguir son:

(1) Cálculo de los puntos críticos como solución del sistema

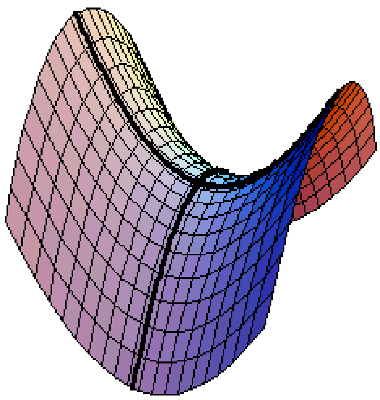
$$\left.\begin{array}{l} f_x\left(x,y\right)=0 \\ f_y\left(x,y\right)=0 \end{array}\right\}$$

(b) Si (a, b) es un punto crítico el estudio del hessiano

$$H=\begin{vmatrix} f_{xx}\left(a,b\right) & f_{xy}\left(a,b\right) \\ f_{yx}\left(a,b\right) & f_{yy}\left(a,b\right) \end{vmatrix}$$

nos permitirá concluir:

$$\begin{array}{l} H>0 \quad f_{xx}\left(a,b\right)>0 \quad \Rightarrow \quad \left(a,b\right) \ \textit{mínimo relativo} \\ H>0 \quad f_{xx}\left(a,b\right)<0 \quad \Rightarrow \quad \left(a,b\right) \ \textit{máximo relativo} \\ H<0 \quad \Rightarrow \quad \left(a,b\right) \ \textit{punto de silla} \end{array}$$



Cálculo de los extremos relativos de una función de n variables

Los pasos a seguir son:

(1) Cálculo de los puntos críticos como solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} f_{x_1}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=0 \\ f_{x_2}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{x_n}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=0 \end{array}\right\}$$

(2) Si $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ es un punto crítico construimos

$$d^2 f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

- si $d^2 f$ es definida positiva el punto $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ es un mínimo relativo
- si $d^2 f$ es definida negativa entonces el punto $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ es un máximo relativo
- si $d^2 f$ no es definida ni semidefinida en el punto de coordenadas $(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ no hay punto extremo.
- si $d^2 f$ es semidefinida no puede afirmarse nada y hay que recurrir a la definición.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se definen las submatrices siguientes obtenidas a partir de la matriz A

$$A_1 = \left(a_1\right),\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

Llamamos $\Delta_n = \det\left(A_n\right)$ y estudiamos el signo de estos determinantes: $\left[\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\ldots,\Delta_n\right]$, entonces:

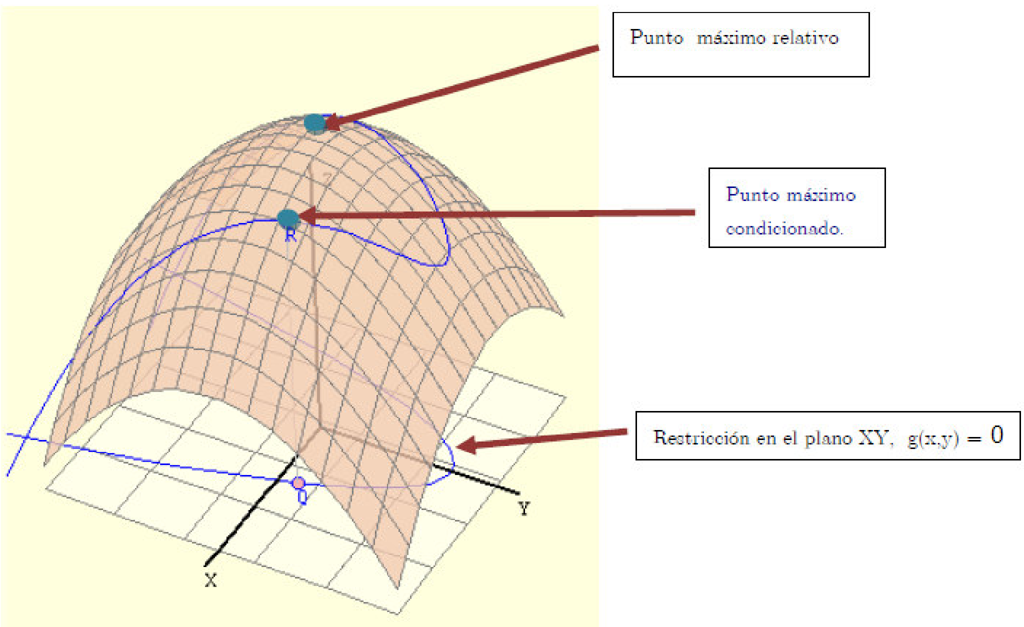
- [+,+,+,+,...,+] MÍNIMO RELATIVO
- [+, - ,+, - ,...] MÁXIMO RELATIVO

Extremos condicionados

Hasta este momento se han calculado los extremos locales de funciones cuyas variables no están ligadas por ninguna condición. Sin embargo, muchos problemas de optimización presentan restricciones o condiciones que debe verificar la solución.

Un extremo (máximo o mínimo) de la función $f(x,y)$ cuando (x,y) está sobre una curva del plano contenida en el dominio de f, cuya ecuación es $g(x,y)=0$, se dice que es un extremo condicionado a la condición o restricción $g(x,y)=0$.

Por ejemplo:



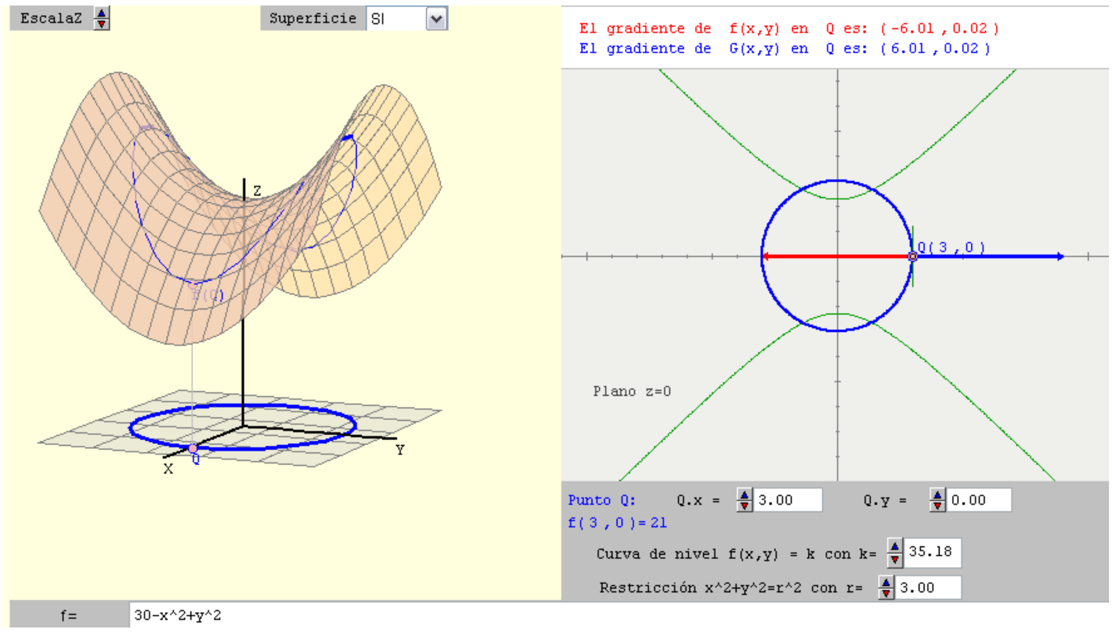
El método de Lagrange[2] permite hallar analíticamente los puntos extremos condicionados de una función suave, es decir, con derivadas parciales continuas.

Sea F(x,y) la función objetivo. Supongamos que (x,y) están condicionadas por la ecuación g(x,y) = K. Las funciones F y g son suaves.

TEOREMA (Método de Lagrange para funciones de dos variables y una condición).- Sean f y g dos funciones con derivadas parciales continuas tal que f tiene un máximo o mínimo sujeto a la restricción dada por $g(x,y)=0$ entonces dicho extremo se producirá en uno de los puntos críticos de la función F dada por

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

Al número **λ** (lambda) se le llama "multiplicador de Lagrange".



OBSERVACIÓN.- Según este teorema, los extremos libres de F coinciden con los extremos condicionados de f.

---

[2] El método lo realizó uno de los matemáticos más grandes del siglo XVIII, Joseph Lagrange, cuando tenía 19 años.

Para analizar si el punto crítico $\left(a,b,\lambda_o\right)$ obtenido del sistema

$$\left.\begin{array}{l} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ g\left(x,y\right) = 0 \end{array}\right\}$$

es máximo o mínimo se analiza el signo de la diferencial segunda de F en el punto $\left(a,b\right)$

$$signo\ d^2F = signo\left(F_{xx}dx^2 + F_{yy}dy^2 + 2F_{xy}dxdy\right)_{(a,b)}$$

estando ligadas dx y dy por la condición:

$$g_x\,dx + g_y dy = 0$$

Nota: Si detectas algún error o errata ponte en contacto con la profesora para su corrección.