En el Aula Virtual se encuentra disponible:

● Material interactivo con teoría y ejercicios resueltos. Para acceder a ello deberá pulsar sobre los siguientes enlaces una vez dentro de la asignatura

Pagina Principal >Apuntes>2. Números Complejos

● Material en pdf con el siguiente contenido:

- Repaso de números complejos a nivel de bachillerato
- Apuntes de teoría
- Ejercicios resueltos
- Problemas de examen resueltos

Para acceder a ellos se deberá pulsar sobre los siguientes enlaces una vez dentro de la asignatura:
Pagina Principal >Recursos Por Temas>Números Complejos

Antes de realizar estos ejercicios debes leer y comprender los siguientes apartados:

- Necesidad de ampliar el conjunto de los números reales.
- Definición del conjunto de números complejos $\mathbb{C}$.
- Forma binómica de un número complejo.
- Representación gráfica de números complejos.
- Interpretación geométrica de la suma.
- Conjugado de un número complejo.
- Módulo y argumento de un número complejo.

Primeras definiciones. Operaciones.

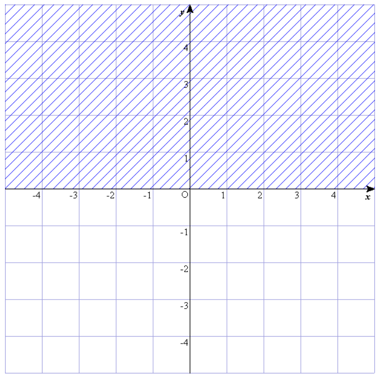
1 Representar gráficamente la región del plano donde se encuentran los afijos de los siguientes conjuntos de números complejos

(a) $\left\{z \in \mathbb{C} \;/\; \operatorname{Im} z > 0\right\}$ (b) $\left\{z \in \mathbb{C} \;/\; 2 < z < 3\right\}$ (c) $\left\{z \in \mathbb{C} \;/\; 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\right\}$

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} \;/\; 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Re} z\right\}$ (e) $\left\{z \in \mathbb{C} \;/\; \operatorname{Re}\left(\bar{z} - i\right) = 2\right\}$

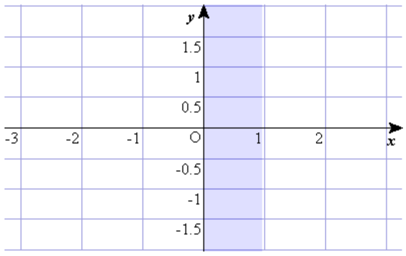
Solución:

(a) Semiplano superior

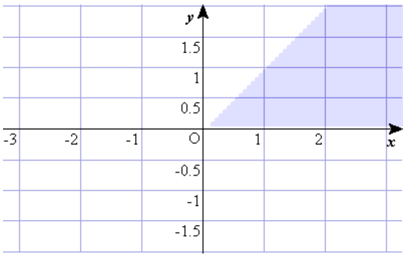


b) El conjunto de los números complejos no es cuerpo totalmente ordenado.

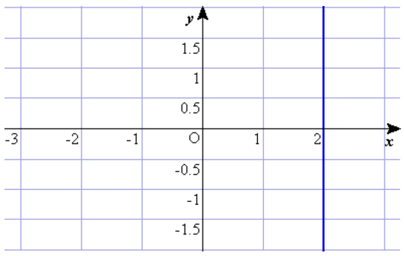
c)



d)



e)



2 Demostrar las siguientes propiedades:

$\overline{\overline{z}} = z$ $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ $\quad z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ $\quad z - \overline{z} = i2\operatorname{Im}(z)$

Solución:

- $z = a + bi \quad \overline{z} = a - bi \quad \overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a + bi$
- Si $z = a + bi$ entonces $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2\operatorname{Re} z$

- Si $z = a + bi$ entonces $z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}\, z$

3 Localizar vectorialmente los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ cuando

(a) $z_1 = \dfrac{1}{i}$ $z_2 = \dfrac{1-i}{1-3i}$ (b) $z_1 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$ $z_2 = \dfrac{2}{1-3i}$

Solución:

(a) $z_1 = -i$ $z_2 = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}i$ (b) $z_1 = -8$ $z_2 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

4 Dado los números complejos $z = -1 + 2i$, $w = \sqrt{2} + 3i$, $s = -i$ realizar las siguientes operaciones:

(a) $\dfrac{1}{2}z - \dfrac{3}{5}\bar{w}\,\mathrm{Im}(s) + szw$

(b) $2zw - s^{1023}z$

(c) $s^{1023} + s^{1024} + s^{1025} + s^{1026}$

(d) $s^1 + s^2 + s^3 + ... + s^{123}$

(e) $\overline{zw} - \bar{z}\,\bar{w}$

Solución:

(a) $\left(\dfrac{13}{5}\sqrt{2} - \dfrac{7}{2}\right) + i\left(\sqrt{2} + \dfrac{26}{5}\right)$ (b) $\left(-10 - 2\sqrt{2}\right) + i\left(4\sqrt{2} - 5\right)$ (c) 0

(d) -1 (e) 0

5 Verificar cada una de las siguientes identidades

(a) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\,\bar{z}_2$ (b) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (c) $\left|\bar{z}_1\right| = \left|z_1\right|$

6 Verificar cada una de las siguientes identidades

(a) $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ (b) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

7 Resolver la ecuación $\left|e^{i\varphi}-1\right|=2 \;\; para \;\; \varphi \;\; \left(-\pi<\varphi\leq\pi\right)$

Solución: $\varphi=\pi$

8 Calcular

(a) i^{100} (b) $\left(-16\right)^{1/4}$ (c) $\left(1+i\sqrt{3}\,\right)^{-10}$

Solución:

(a) 1 (b) $\sqrt{2}\left(1+i\right),\,-\sqrt{2}\left(1-i\right),\,-\sqrt{2}\left(1+i\right),\,\sqrt{2}\left(1-i\right)$ (c) $2^{-11}\left(-1+i\sqrt{3}\,\right)$

9 ¿Qué número complejo está más cerca del origen: -3+2i ó 1+4i?

Solución: -3+2i

10 ¿Qué puntos del plano complejo están a una distancia de dos unidades del origen? ¿y del punto 1+i?

Solución: $\left\{z\in\mathbb{C}\,/\,\left|z\right|=2\right\},\ \left\{z\in\mathbb{C}\,/\,\left|z-\left(1+i\right)\right|=2\right\}$

11 Representa el conjunto de puntos determinado por las condiciones:

(a) $\left|z-1+i\right|=1$ (b) $\left|z+i\right|\leq 3$ (c) $\left|z-4i\right|\geq 4$

Solución:

(a) Circunferencia de centro (1, -1) y radio 1

(b) Círculo de centro (0, -1) y radio 3 junto con la circunferencia de centro (0, -1) y radio 3

(c) Todos los números complejos menos los que se encuentran en el círculo de centro (0, 4) y radio 4.

12 Describe geométricamente en el plano complejo las regiones cuyos puntos satisfacen las siguientes ecuaciones:

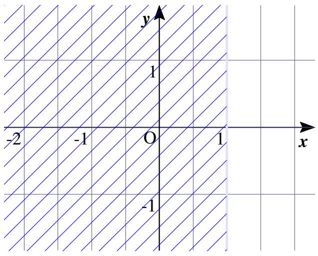
(a) $\operatorname{Re}(z) < 1$ (b) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$ (c) $\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 0$ (d) $z - \bar{z} = i$

(e) $|z-1| > 3$ (f) $\bar{z} + z = |z|^2$ (g) $|z - z_1| = |z - z_2|$ (h) $\operatorname{Im}(z^2) < 2$

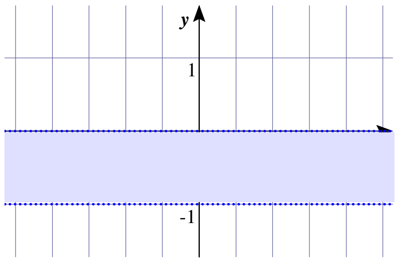
(i) $\left|\frac{z-3}{z+3}\right| \leq 2$ (j) $|z-1| + |z+1| \geq 4$ (k) $|z-1| - |z+1| \geq \frac{1}{4}$ (l) $z\left(\bar{z} + 2\right) = 3$

Solución:

(a)



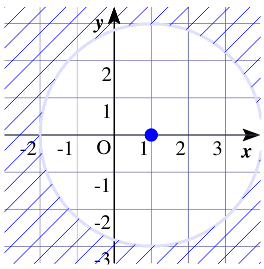
b)



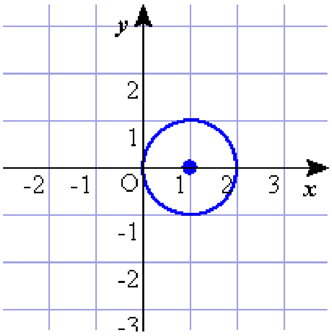
c) Las rectas x=0, y=0

d) y=1/2

e)

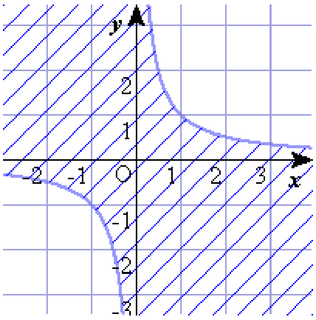


f)

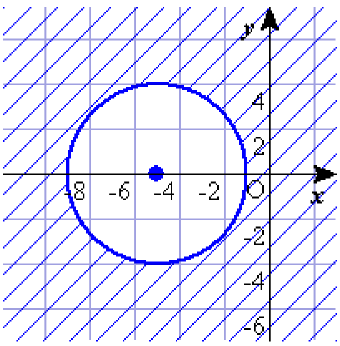


g) Se trata de la mediatriz del segmento PQ siendo P el afijo de z_1 y Q el afijo de z_2.

h) La región comprendida entre las dos ramas de la hipérbola xy=1.



i) El exterior de la circunferencia de centro (-5, 0) y radio 4



j) Exterior de la elipse de centro (0,0) y semieje a=2 y b= $\sqrt{3}$, es decir, de la elipse $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$

k) La ecuación: $\left||z-1|-|z+1|\right|=\dfrac{1}{4}$ es una hipérbola de focos F=1, G=-1.

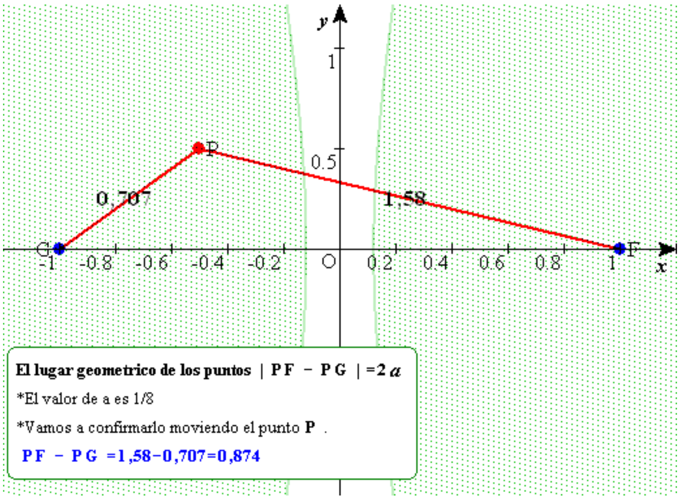
La región comprendida entre las dos ramas de la hipérbola es:

$$\left||z-1|-|z+1|\right|<\frac{1}{4}$$

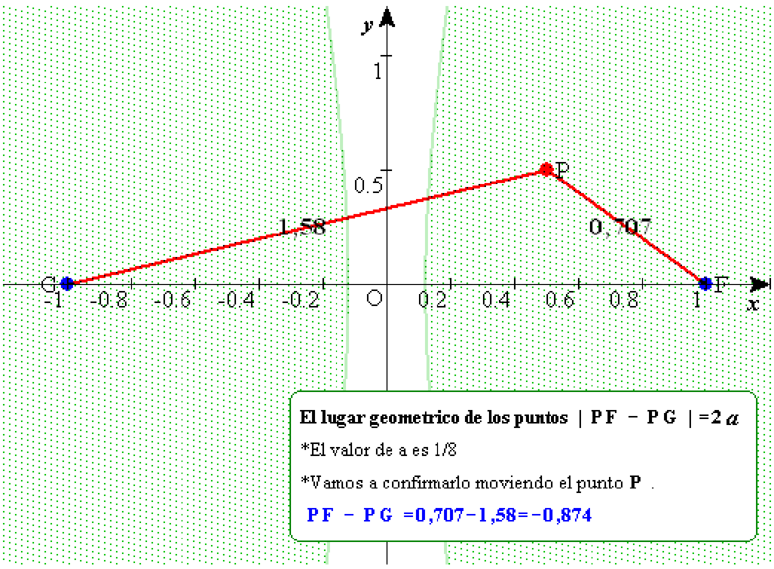
El resto de puntos serán los que cumplan:

$$\left||z-1|-|z+1|\right| > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-1|-|z+1| > \dfrac{1}{4} \\ |z-1|-|z+1| < -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

La región $|z-1|-|z+1| > \frac{1}{4}$ es de las dos zonas sombreadas en el gráfico siguiente en la que se encuentra el punto P



La región $|z-1|-|z+1| < -\frac{1}{4}$ es de las dos zonas sombreadas en el gráfico siguiente en la que se encuentra el punto P



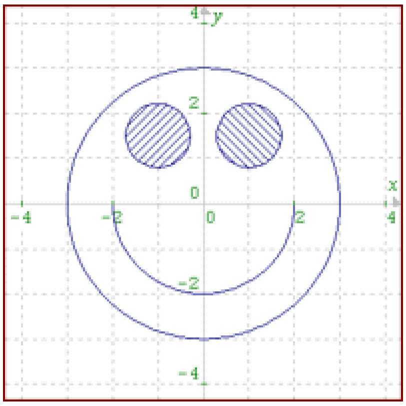
l) Los puntos reales 1 y -3

13 Representa en el plano el conjunto $A \cup B \cup C \cup D$:

$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \left|z\right| = 3 \right\}$ $\qquad B = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \left|z\right| = 2 \wedge -\pi < \arg\left(z\right) < 0 \right\}$

$C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \left| z - 1 - \frac{3}{2} i \right| \leq \frac{1}{2} \right\}$ $\qquad D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \left| z + 1 - \frac{3}{2} i \right| \leq \frac{1}{2} \right\}$

Solución:



Antes de realizar estos ejercicios debes leer y comprender los siguientes apartados:

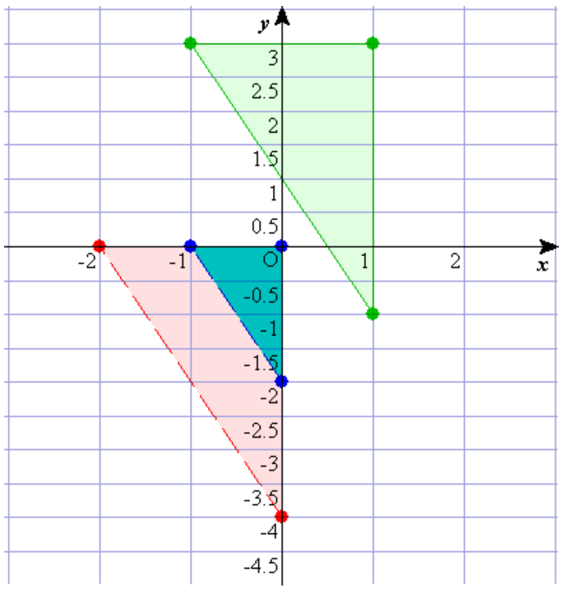
- Interpretación geométrica de la suma y el producto.
- Módulo y el argumento de un número complejo.
- La fórmula de Moivre.
- Raíces enésimas de un número complejo y su representación gráfica.
- La forma exponencial de un número complejo.
- La función exponencial compleja y sus propiedades.
- Definición de logaritmo complejo.
- La fórmula de Euler.
- Cómo calcular una potencia con base y exponente números complejos.

Interpretación geométrica de la suma y el producto

14 Elige tres puntos no alineados en el plano y considera el triángulo de vértices los tres puntos. Calcula el transformado de este triángulo por la aplicación $f(z) = 2z + (1+3i)$ sobre cada uno de sus vértices. Haz la representación gráfica e indica que transformaciones (dilatación, contracción, rotación, traslación) has realizado.

Solución:

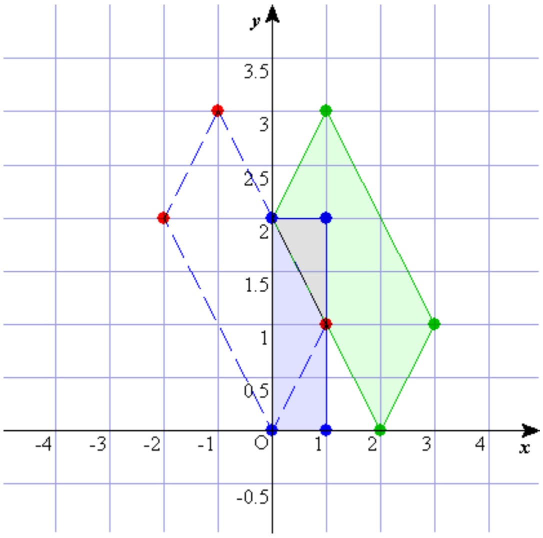
Dilatación (2) +Traslación (1+3i)



15 Considera el rectángulo de vértices 0, 1, 1+2i, 2i. Calcula el transformado de este rectángulo por la aplicación $f(z) = (1+i)z + 2$ sobre cada uno de sus vértices. Haz la representación gráfica e indica que transformaciones (dilatación, contracción, rotación, traslación) has realizado.

Solución:

Giro (π / 4) +Dilatación ($\sqrt{2}$) +Traslación (2)



16 Demostrar que si los puntos z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilátero, entonces: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$

Potencias. Raíces enésimas.

17 Escribir en forma binómica: $\left(\dfrac{10\sqrt{3} + 10i}{5 + 5i}\right)^{-6}$

Solución: $\dfrac{1}{2^9} i$

18 Calcula en función de $sen(\varphi)$ y $\cos(\varphi)$

(a) $sen(2\varphi)$ (b) $\cos(2\varphi)$ (c) $sen(4\varphi)$ (d) $\cos(4\varphi)$

Solución: $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - sen^2\varphi$ $sen(2\varphi) = 2sen\varphi\cos\varphi$

$\cos(4\varphi) = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\, sen^2\varphi + sen^4\varphi$ $sen(4\varphi) = 4\cos^3\varphi\ \ sen\varphi - 4\cos\varphi\ sen^3\varphi$

19 ¿Es cierto que la parte real de $w = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$ es mayor que -0.5?

Solución: Falso

20 Encontrar todas las soluciones de la ecuación $z^3 = \left|z\right|^2$ y representar tres de ellas. ¿Cuántas hay?

Solución: Hay 3 soluciones distintas (además de la trivial) que se obtienen para los valores de k siguientes:

$$k = 0 : z_0 = 1 \qquad k = 1 : z_1 = e^{\frac{2\pi}{3}i} \qquad k = 2 : z_2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

21 Calcular:

(a) $z = \sqrt[6]{1-\sqrt{3}i}$ (b) $\sqrt[3]{\dfrac{(1+i)(1-i)^4}{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3}}$

Escribe en forma binómica y exponencial el resultado.

Solución:

$$\text{(a)}\ z_k = \sqrt[6]{2}_{\frac{-\pi/3+2k\pi}{6}} = \sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{-\pi/3+2k\pi}{6}\right)} \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$\text{(b)}\ w_o = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2*0*\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\frac{1}{\sqrt[6]{2}}sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{9\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\frac{1}{\sqrt[6]{2}}sen\left(\frac{9\pi}{12}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\frac{17\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\left(-\pi+\frac{5\pi}{12}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{2}}e^{i\left(-\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\frac{1}{\sqrt[6]{2}}sen\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$$

Fallos habituales:

- Considerar que

$$\sqrt[3]{\frac{(1+i)(1-i)^4}{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3}} = \frac{(1-i)}{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)}\sqrt[3]{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)}{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)}\sqrt[3]{2}$$

En el conjunto de los números complejos hay n raíces n-ésimas de cualquier número complejo no nulo. En el caso de que se esté calculando:

$$\sqrt[3]{z^3} = |z|_{\frac{\arg(z^3)+2k\pi}{3}} \qquad k = 0,1,2$$

Para k=0 se tiene que una raíz es z pero hay dos más (las correspondientes a k=1 y a k=2).

22 ¿De qué número es raíz cúbica 2+3i? ¿De qué número es raíz décima $1-\sqrt{3}i$?

Solución:

Potencias complejas. Logaritmo complejo.

23 Calcular:

(a) $z = \dfrac{2}{i}\log\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ (b) $z = \dfrac{i^i}{1-i}$ (c) $z = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{1+i}$

(d) $z = \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ (e) $\log_{3+3i}\sqrt{1-i}$

Solución: (a) $z = \dfrac{2}{i}\log i = \pi + 4k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

(b) $z = \dfrac{i^i}{1-i} = \underset{\substack{multiplicando\\ por\ el\ conjugado}}{=} \dfrac{e^{-\pi/2+2\kappa\pi}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{e^{-\pi/2+2\kappa\pi}}{2} + \dfrac{e^{-\pi/2+2\kappa\pi}}{2}i$

(c) $e^{\ln 2-\left(\frac{2\pi}{3}+2\kappa\pi\right)}\left(\cos\left(\ln 2+\dfrac{2\pi}{3}\right) - isen\left(\ln 2+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$ (d) $e^{\left(\frac{\pi}{4}+2\kappa\pi\right)}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$

(e) $$\frac{\left[\ln\sqrt[4]{2}\ln\sqrt{18} + \left(-\pi/8 + k\pi\right)\left(\pi/4 + 2k'\pi\right)\right] + i\left[-\ln\sqrt[4]{2}\left(\pi/4 + 2k'\pi\right) + \left(-\pi/8 + k\pi\right)\ln\sqrt{18}\right]}{\left(\ln\sqrt{18}\right)^2 + \left(\pi/4 + 2k'\pi\right)^2} \quad k,k' \in Z$$

24 Demostrar que los afijos de los valores de $\left(1-i\right)^{\sqrt{2}i}$ están en la misma línea recta

25 ¿De entre todas las raíces n-ésimas del complejo $1+\sqrt{3}i$. ¿Hay alguna raíz cuyo logaritmo principal sea real?

Solución: No existe

26 Dado $a+bi=\log\sqrt{\omega}$ siendo ω tal que $\dfrac{\omega}{1+i\sqrt{3}}$ es real y el módulo de ω es la unidad. Hallar $a+bi$.

Observación: Puede ser interesante considerar la expresión de ω de la forma: $\omega=e^{it}=\cos t+isent$ ya que al tener módulo uno quedará perfectamente determinado si se conoce $\arg(\omega)=t$.

27 (a) Escribir el valor de $\cos(3x)$ en función de $sen(x)$ y $\cos(x)$

(b) Calcular el valor principal del complejo z=A+Bi donde $A=(-i)^i$, $B=\cos(3x)$ siendo $x=\arg umento(2+i)$.

Solución: (a) $\cos(3x)=\cos^3 x-3\cos(x)sen^2(x)$ (b) $z=A+iB=e^{\frac{\pi}{2}}+i\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$

Antes de realizar estos ejercicios debes leer y comprender los siguientes apartados:

- Extensión al plano complejo de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.
- Polinomios en $\mathbb{C}$: Raíz de un polinomio, coeficiente de un polinomio, factorización, regla de Ruffini.
- Región acotada en $\mathbb{C}$
- Propiedades del módulo. Desigualdad triangular y desigualdad triangular inversa.

Funciones trigonométrica y funciones hiperbólicas

28 Calcular la parte real y la parte imaginaria del número complejo

$$z = sen\left(-\frac{3\pi}{2} + 2i\right)$$

¿Es la parte real mayor que 2? Justificar la respuesta.

Solución: $\dfrac{e^{-2} + e^{2}}{2}$

29 Determinar todos los números z complejos que verifiquen que

(a) $senz = -3$ (b) $\cot g\left(z\right) = \sqrt{3} - 2i$

Solución: (a)

$$z = -\frac{\pi}{2} + 2\kappa_1\pi - i\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \qquad k_1 \in \mathbb{Z}$$
$$z = -\frac{\pi}{2} + 2\kappa_2\pi - i\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \qquad k_2 \in \mathbb{Z}$$

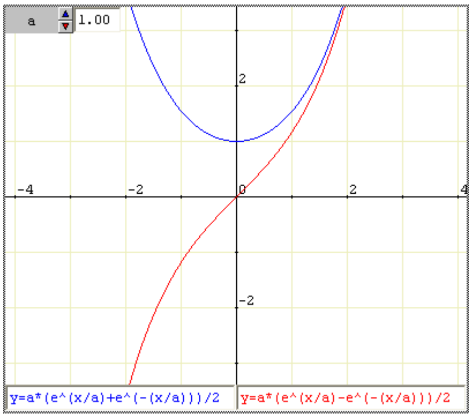
(b) $z = \dfrac{\pi}{12} + k\pi + i\dfrac{\log 3}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

30 Calcular la parte real de $w = \log\left(sen\left(3i\right)\right)$.

Solución: $\ln\left(\dfrac{e^{3}-e^{-3}}{2}\right)=Ln\left(Sh3\right)$

31 Representar las gráficas de las funciones Shx y Chx siendo x real.

Solución: En azul aparece la gráfica del coseno hiperbólico y en rojo la del seno hiperbólico.



32 (a) Resolver la siguiente ecuación $Sh\left(iz\right)=-i$ siendo $z\in\mathbb{C}$

(b) Resolver la ecuación: $senz=2$ siendo $z\in\mathbb{C}$

Solución: (b) $z=\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)\qquad k\in\mathbb{Z}$

Polinomios

33 Escribir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 2+2i y 2-2i.

Recuerda: Si x_1, x_2 son las raíces de una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ entonces se cumple: $x_1+x_2=(-b/a)$; $x_1*x_2=(c/a)$.

Solución: $x^2-4x+8=0$

34 Resolver $z^4-z^2\left(1+i\right)+i=0$

Solución: $z = 1, -1, \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

35 Demostrar que si z_o es una raíz compleja no real de un polinomio con coeficientes reales entonces su conjugada, $\overline{z_o}$, también es raíz del polinomio.

36 Sea $p(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$ un polinomio de manera que bi es una raíz. Factorizar el polinomio.

Solución: 3i, -3i, 4, -1.

37 Determinar a y b números reales para que $p(x) = x^4 + 2x^3 + ax + b$ tenga como raíz 1+i. Solución:

Solución: a=-4, b=12

Conjuntos acotados

38 Comprobar que si $|z_2| \neq |z_3|$ entonces se cumple: $\left|\dfrac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leq \dfrac{|z_1|}{\left||z_2| - |z_3|\right|}$

39 Acotar, si es posible, el siguiente conjunto:

$$A = \left\{ \frac{z}{z^2 + z(4 - 3i) - 12i} \;/\; z \in \mathbb{C},\ |z| = 2 \right\}$$

Solución: El conjunto A está acotado por estar contenido en el círculo unidad centrado en el origen.

40 Dibujar la región del plano complejo definida por la expresión $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \left|\overline{z} - 3i\right| \leq \dfrac{5}{2} \right\}$. Calcular en forma binómica y representar las raíces cúbicas de i. ¿Cuáles de estas raíces están en la región A?

Solución: El conjunto A es el interior de la circunferencia de centro (0, -3) y radio 5/2. Las raíces cúbicas de i son los números complejos:

$$z_o = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad z_2 = -i$$

41 Acotar el conjunto de números complejos siguiente

$$A = \left\{ \frac{e^{2+3i}\left(z+3\right)}{z^2 - 2az + a^2} \;\; / \; \left|z\right| = 3 \;\; , \;\; \left|a\right| = 2 \right\}$$

Solución: Una cota puede ser: $6e^2$

42 Determinar si el $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\; / \; \left|-z+1-i\right| = \left|-z-1+i\right| \right\}$ está acotado

Solución: No está acotado.