En el Aula Virtual se encuentra disponible:

- Material interactivo con teoría y ejercicios resueltos. Para acceder a ello deberá pulsar sobre los siguientes enlaces una vez dentro de la asignatura

Pagina Principal >Apuntes>3. Sucesiones
Pagina Principal >Apuntes>4. Series

- Material en pdf con el siguiente contenido:

  - Repaso de sucesiones a nivel de bachillerato
  - Apuntes de teoría
  - Ejercicios resueltos
  - Problemas de examen resueltos
  - Resumen criterios de convergencia de series

Para acceder a ellos se deberá pulsar sobre los siguientes enlaces una vez dentro de la asignatura:

Pagina Principal >Recursos Por Temas>Sucesiones
Pagina Principal >Recursos Por Temas>Series

SUCESIONES NUMÉRICAS

Definición

1 ¿Qué es una sucesión?

2 Escribir, cuando se pueda, el término general de las sucesiones siguientes:

– La sucesión cuyo término es la suma de los anteriores y los dos primeros términos son 1. Esta sucesión recibe el nombre de **sucesión de Fibonacci**.

– La sucesión cuyo término es el dígito del enésimo lugar decimal del número e.

– La sucesión en la que el primer término es a y cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante r. Este tipo de sucesiones se denomina **geométricas**.

3 Hallar los primeros 15 términos de la sucesión definida por:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & si\ a_n\ es\ un\ número\ par \\ 3a_n + 1 & si\ a_n\ es\ un\ número\ impar \end{cases}$$

con $a_1 = 11$

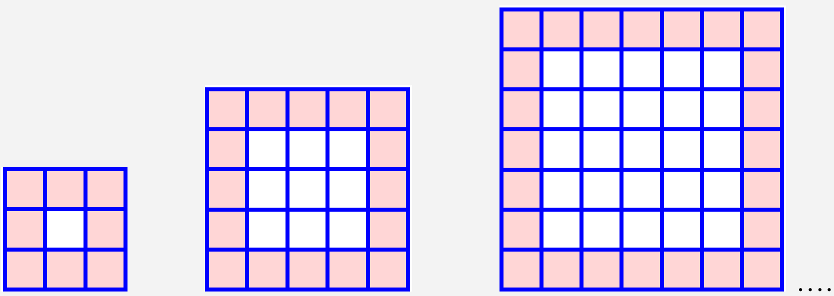
4 Obtener los cuatro primeros términos de cada una de las sucesiones siguientes, definidas por su término general:

a) $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$ b) $a_n = \dfrac{3n^2+2}{n+4}$ c) $a_n = \dfrac{\cos n}{e^n}$ d) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Sucesiones aritméticas y geométricas (repaso)

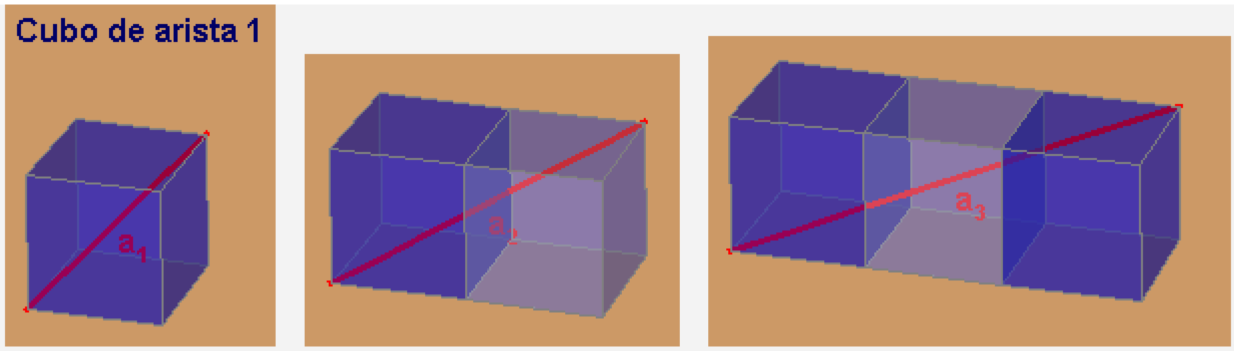
5 Determina el término general de la sucesión formada por el número de cuadrados coloreados.

n=1 n=2 n=3



Solución: http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/ac_sucesiones/index.htm

6 Determina el término general de la sucesión an que es la longitud de la diagonal del ortoedro formado por n cubos consecutivos.



....

Solución: http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/ac_sucesiones/index.htm

7 Los habitantes de una ciudad han contraído una enfermedad, por suerte el doctor sabe fabricar un aparato unipersonal que la cura. Trabajando a destajo el doctor puede fabricar diez aparatos diarios. Ante la gravedad del caso hace la siguiente propuesta: “enseñará a los ciudadanos a fabricar el aparato”.

Pero la enseñanza lleva su tiempo y solo podrá fabricar un aparato al día si a la vez enseña a un aprendiz. El doctor y el aprendiz al día siguiente fabricarán cada uno un aparato y formarán a un aprendiz cada uno.

¿Interesará a los ciudadanos? Algunos proponen que el doctor se dedique a fabricar sin perder tiempo enseñando. ¿Cuántos aparatos tendrán al quinto día con cada método? ¿Y el sexto día?

Solución: http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/ac_sucesiones/index.htm

Límite de una sucesión

8 ¿Qué se quiere dar a entender al decir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 8$?

¿Qué se quiere dar a entender al decir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$?

¿Qué es una sucesión convergente? Dar dos ejemplos.

¿Qué es una sucesión divergente? Dar dos ejemplos.

9 Demostrar, según la definición de límite, que se verifica: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} = 0$, $con\ \ r > 1$. ¿Qué sucede si r < 1?

10 Demostrar, aplicando la definición de límite, que se cumple:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{(n+1)(n+2)} = 2$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3-(2n-1)^3}{3n^2+1} = 8$ (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n-3} = \infty$ (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-2} = 1$ (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+7}{n^3+2n+5} = 0$

11 Hallar para la sucesión $\frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{10}{13}, \frac{13}{17}, \ldots$

(a) El término que ocupa el lugar 123. b) Su límite y c) el término de la sucesión a partir del cual la diferencia con el límite es, en valor absoluto menor que 1/100.

Solución: $a_n = \frac{3n+1}{4n+1}$, $a_{123} = \frac{370}{493}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$, $n > 6$,

12 Determinar, en caso de existencia, el límite de las siguientes sucesiones

$$a_n = \begin{cases} \frac{-1}{n} & si\ n\ impar \\ \frac{n+1}{n} & si\ n\ par \end{cases} \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Solución: a_n no tiene límite (los términos pares forman una subsucesión que tiende a 0 y los impares una subsucesión que tiende a 1).

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{2k-1}\right)(-1)^k & si\ n = 2k-1\ \ (n\ impar) \\ 0 & si\ n = 2k\ \ (n\ \ par) \end{cases}$$

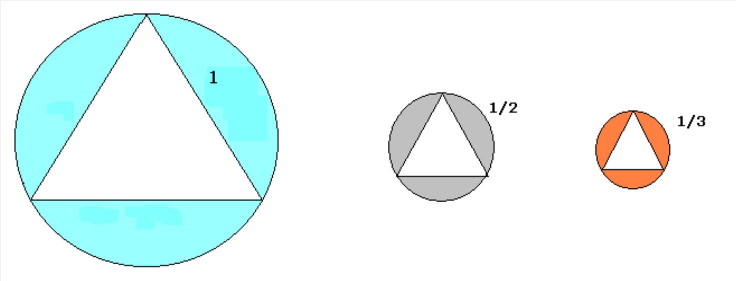
no tiene límite ya que la subsucesión de los términos pares es 0 y una subsucesión de los impares (n=3+2m) tiende a uno

Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas

13 ¿Qué es una sucesión monótona? Dar dos ejemplos

¿Qué es una sucesión acotada? Dar dos ejemplos

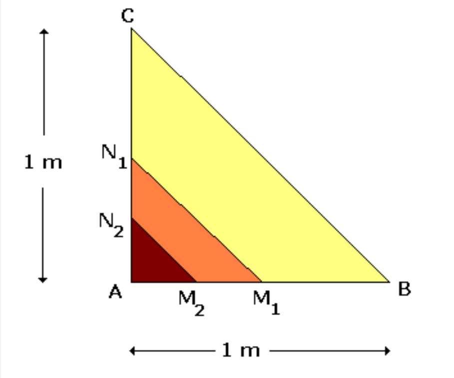
14 Dados los siguientes triángulos equiláteros inscritos en círculos, se pide:



Hallar el término general de la sucesión monótona decreciente de los radios de los círculos circunscritos. Calcular la diferencia entre el radio del círculo enésimo y el siguiente en función de n.

Solución: $r_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3n}$

15 Sea un triángulo rectángulo $\widehat{BAC}$ en el que ambos catetos tienen la misma longitud $\overline{AB} = \overline{AC} =$ 1 m. Se une M_1 (punto medio de $\overline{AB}$) con N_1 (punto medio de $\overline{AC}$). Análogamente, se unen M_2 (punto medio de $\overline{AM_1}$) con N_2 (punto medio de $\overline{AN_1}$) y así sucesivamente, construimos triángulos semejantes tal y como muestra la figura.



Se considera la sucesión cuyos primeros términos son los siguientes:

$$a_1 = \overline{BC}$$
$$a_2 = \overline{BC} + \overline{M_1N_1}$$
$$a_3 = \overline{BC} + \overline{M_1N_1} + \overline{M_2N_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a) ¿Está acotada superiormente la sucesión a_n?

b) En caso afirmativo, ¿es $\overline{AB} + \overline{AC}$ una cota superior de la sucesión a_n?

Solución: (a) Sí, una cota es $2\sqrt{2}$ (b) No

16 Estudia la monotonía, acotación y convergencia de la sucesión: $a_n = \dfrac{100n+3}{n^2+1}$

Indicación: Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{100x+3}{x^2+1}$

17 Estudia la monotonía, acotación y convergencia de la sucesión: $a_n = \dfrac{100(\log n - 3)}{n}$

Indicación: Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{100(\log x - 3)}{x}$

18 Dar un ejemplo, en el caso de que sea posible, de

(a) Una sucesión que sea monótona creciente hasta el término 2000 y decreciente a partir del 2001.

(b) Una sucesión que sea convergente y no sea monótona

(c) Una sucesión que sea divergente y no sea monótona.

(d) Una sucesión que sea convergente y no acotada.

(e) Una sucesión acotada y no convergente.

19 Rellenar las siguientes tablas:

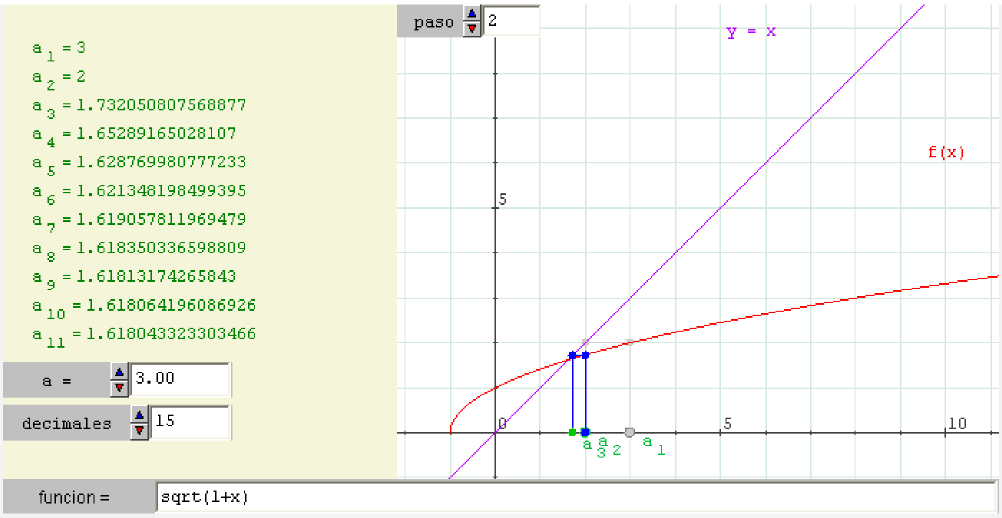
Términos de la sucesión	Término general	Expresión recursiva	Acotación	Monotonía	Convergencia
$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$					
Sucesión aritmética					
	$n!$				
		$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = -a_n,\ n \geq 0 \end{cases}$			
$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$					
Sucesión geométrica					
	$\frac{1}{n}$				
		$\begin{cases} a_1 = 1,\ \ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ \ n \geq 1 \end{cases}$			

Términos de la sucesión	Término general	Expresión recursiva	Acotación	Monotonía	Convergencia
$4, 7, 10, 13, 16, \ldots$					
	$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1},\ n \geq 1$				
		$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -2a_n,\ n \geq 1 \end{cases}$			
$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$					
	$\frac{1}{n!}$				
		$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} - 2,\ \ n \geq 2 \end{cases}$			
			No acotada (ni inferior, ni superiormente)	No monótona	
			Acotada	Monótona creciente	
				No monótona	Convergente

Pági

Utilización de la relación entre monotonía, acotación y convergencia para el análisis de sucesiones recursivas

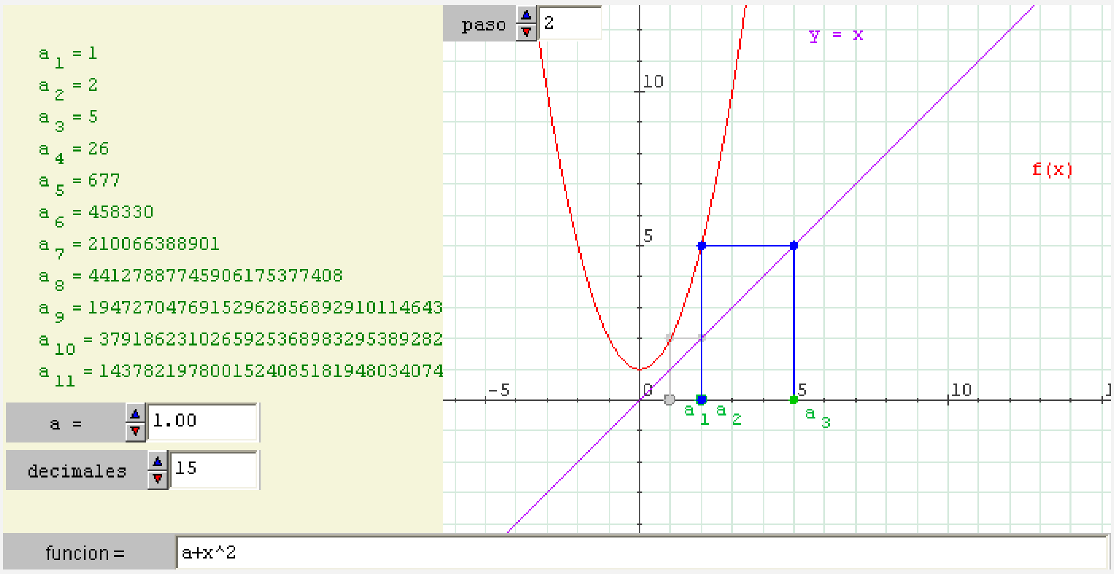
20 Dada la sucesión $a_1 = 3 \quad a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}} \quad n \geq 2$, determinar el carácter de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y, si es posible, su límite.



Applet Laboratorio

Solución: Demostrar que es monótona decreciente y acotada inferiormente (0 es cota). Su límite es: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

21 Dada la sucesión $a_1 = a > 0$, $a_n = a + \left(a_{n-1}\right)^2$ $n \geq 2$, determinar el carácter de la sucesión $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ y, si es posible, su límite.



Applet Laboratorio

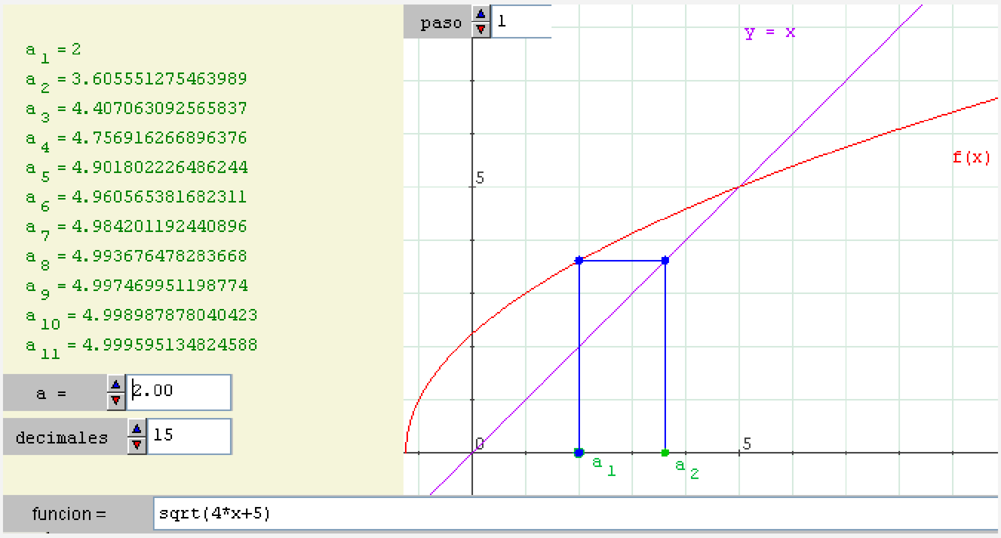
Solución: Demostrar que es monótona creciente y no acotada superiormente. Su límite es infinito.

22 Demostrar gráfica y analíticamente la existencia del límite de la sucesión recurrente:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 5} \end{cases}$$

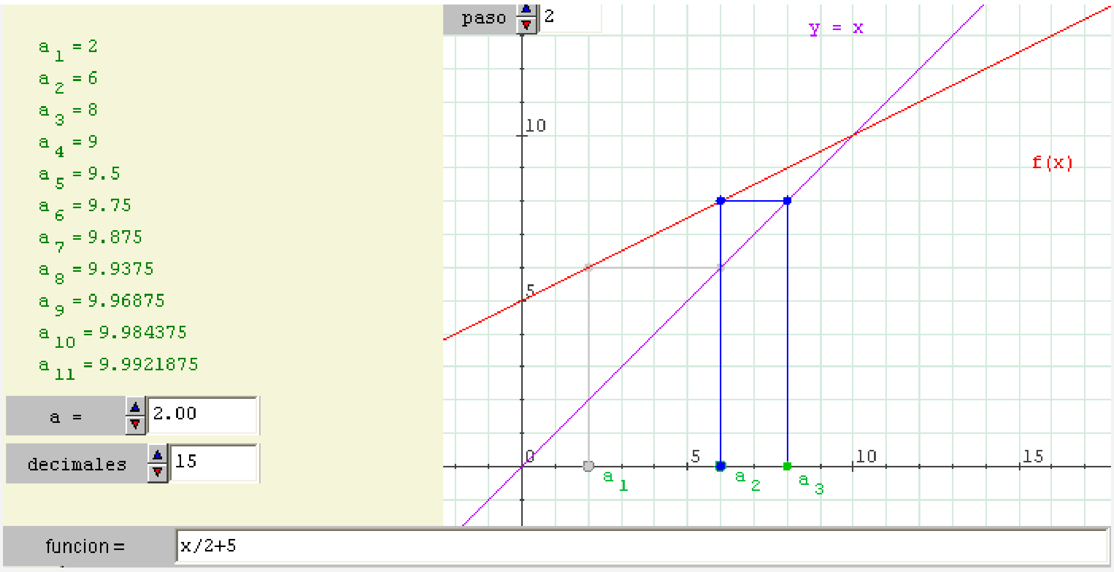
Determinar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto $A = \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

Consideramos la función $f(x) = \sqrt{4x+5}$ cuya gráfica aparece en rojo en la figura siguiente.

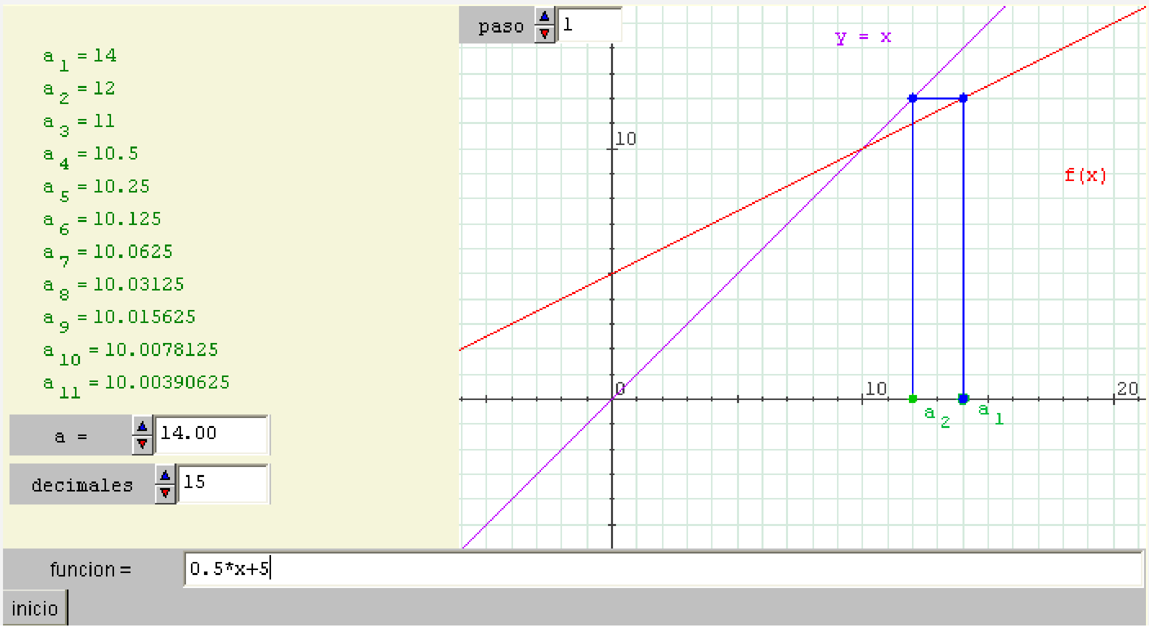


Solución**:** Demostrar que la sucesión es monótona creciente y que está acotada superiormente por 5. Su límite es 5. El supremo es 5 (no es máximo) y el ínfimo es 2 (sí es mínimo).

23 Demuestra de forma gráfica y analíticamente que la sucesión recursiva $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 5, \ a_1 = 2$ tiene límite.



¿Qué ocurriría si $a_1 = 15$? ¿Sería la sucesión convergente o divergente?



Solución: Demostrar que la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente por 10. Su límite es 10.

24 Supongamos que deseamos calcular la raíz cuadrada de un número real y que, para ello, tomamos una estimación inicial x_o. Al tratarse de una estimación, cometemos un error h, por lo que:

$$(x_o + h)^2 = a$$

Desarrollamos el cuadrado de la suma y nos quedará:

$$x_o^2 + 2x_o h + h^2 = a$$

Despejamos h en la expresión anterior:

$$h = \frac{a}{2x_o} - \frac{x_o}{2} - \frac{h^2}{2x_o}$$

Si damos por sentado que x_o es una buena aproximación a $\sqrt{a}$, podemos despreciar el término $\frac{h^2}{2x_o}$ pues el error cometido será pequeño por lo que:

$$h \approx \frac{a}{2x_o} - \frac{x_o}{2}$$

Lo que nos induce a tomar como aproximación:

$$x_1 = x_o + h = x_o + \frac{a}{2x_o} - \frac{x_o}{2} = \frac{x_o}{2} + \frac{a}{2x_o}$$

Repitiendo el proceso, tenemos el siguiente algoritmo:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$

Nota: Este es el método por el que extraen las calculadoras la raíz cuadrada

Consideremos ahora a=2.

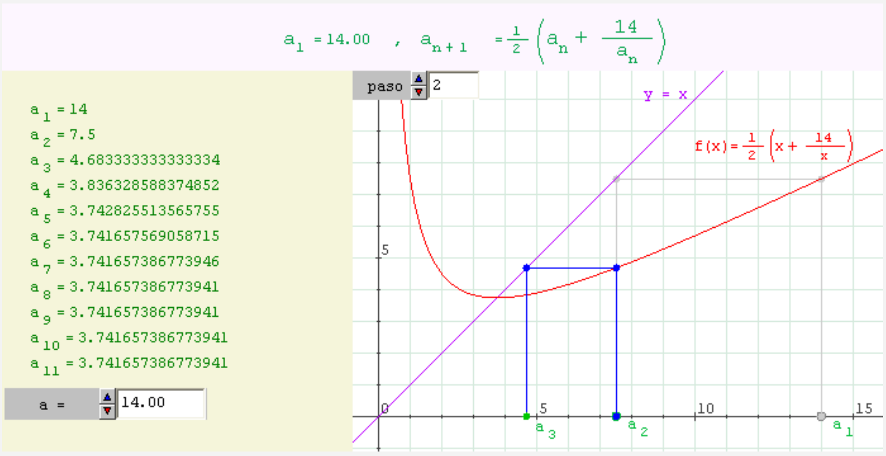
(a) Si se tiene n números reales positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ su media geométrica es menor o igual que su media aritmética, es decir,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Utilizando este resultado probar que $a_1 \le (a_n)^2$ para todo número natural.

(b) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente.

(c) Su límite es $\sqrt{2}$.



Applet Laboratorio

Solución: (a) Basta tomar $x_1 = a_1,\ x_2 = \dfrac{a_1}{a_n}$. Se tendrá

$$\sqrt{a_n \frac{a_1}{a_n}} \le \frac{a_n + \dfrac{a_1}{a_n}}{2} \quad \text{es decir,} \quad a_1 \le \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_1}{a_n}\right)\right]^2 = (a_{n+1})^2$$

Su límite es $\sqrt{2}$

CALCULO DE LÍMITES

25 Siendo $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}}$, $a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$, etc. Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$

Solución: 3.

26 Calcular el límite de las sucesiones:

(a) $a_n = \dfrac{\cos\left(\dfrac{2\pi n + 5}{n+2}\right)}{n^2}$ (b) $a_n = \dfrac{\sqrt{6n^2 + 4n + 8}}{\sqrt[3]{4n^3 + 2n^2 + 6}}$ (c) $a_n = \dfrac{\log n}{\log(5n)}$.

Soluciones: a) 0 (b) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{4}}$ (c) 1

27 Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $a_1 > 0 \qquad a_n = \dfrac{1}{ne^{a_{n-1}}} \; (n \geq 2)$

(b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+n^2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

(c) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + ... + \dfrac{n}{n^2+n}$

(d) $a_n = \dfrac{\cos 1 + \cos 2 + ... + \cos n}{n^2}$

(e) $a_n = \dfrac{n sen(n!)}{n^2+1}$

(f) $a_n = \dfrac{(-1)^n(2n+1)}{3n}$

(g) $a_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n})}$

Solución: (a) 0(b) 1 (c) 1 (d) 0 (e) 0 (f) No tiene límite (g) 0

28 Dadas las sucesiones:

$$a_n = \frac{2^{2n-1}}{n} \qquad b_n = \binom{2n}{n} \qquad c_n = 2^{2n-1} \qquad (n > 1)$$

(a) Demostrar que $a_n < b_n < c_n \quad (n > 1)$

(b) Demostrar que la sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es divergente

Solución: (a) Demostrar por inducción (b) La sucesión a_n es divergente y por el teorema de acotación b_n también.

Infinitésimos e infinitos

29 Hallar el límite de las sucesiones:

(a) $a_n = \log\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)\cdot\cos\left(n^2+5\right)$ (b) $a_n = \dfrac{8\,n^6\cdot\log\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\cdot sen^3\dfrac{1}{n}}{\left(2n^2+5n\right)\cdot\cos\left(\dfrac{2\pi n-2}{6n+3}\right)}$

(c) $a_n = \dfrac{n!}{2^{n-1}\sqrt{3n}}$ (d) $a_n = \dfrac{4^{n+1}+3^n}{2^{n+5}}$

Solución: (a) 0 (b) 4 (c) (d) ∞

30 Hallar el límite de las sucesiones:

(a) $a_n = \dfrac{n!}{2^{n-1}\sqrt{3n}}$ (b) $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^{n-1}n^{n+3}}$

Solución:

Límites de la forma ∞^0, 0^0, 1^∞

31 Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}}$ b) $b_n = \sqrt[2n]{\dfrac{1+n}{3+n}}$

b) $c_n = \left(\dfrac{3-2n}{5-3n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ d) $d_n = \left(\dfrac{3n-1}{5n+2}\right)^{-n-3}$

Solución: (a) $\sqrt[4]{e^5}$ (b) 1 (c) $\dfrac{2}{3}$ (d) ∞

Expresiones irracionales

32 Obtener

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+n}\right)$ (b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{(n+a)(n+b)}\right)^n$ (d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)^n$

Solución: (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

Cálculo de límites utilizando distintos criterios

33 Calcular los siguientes límites:

(a) $a_n=\left[\cos(2\pi n)\right]^n$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n+1}\right)^n$

Solución: (a) 1 (b) e^{a-1}

34 Dados los siguientes infinitos

$$a_n=\frac{e^n}{\sqrt{n}},\quad b_n=\frac{2^n}{n^3},\quad c_n=\frac{n^n}{n!},\quad d_n=\frac{n!}{2^n}$$

comparar a_n con el resto de sucesiones indicando cuál es de mayor orden.

Solución: $\{a_n\}$ es de mayor orden que $\{b_n\}$, del mismo orden que $\{c_n\}$ y de menor orden que $\{d_n\}$

35 Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+n\right)^{\frac{1}{2n+1}}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+a}{n+1}\right)^{2n+3}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\log(n+p)}{\log n}\right)^{n\log n}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+a}-\sqrt{n+b}}{\sqrt{n+c}-\sqrt{n+d}}\quad c\neq d$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{2+\log n}}$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n\dfrac{n!}{n^n}\qquad 0<a<e$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$

Solución: (a) $l=1$, (b) $l=e^{2(a-1)}$ (c) $l=e^{p}$ (d) $\dfrac{a-b}{c-d}$ (e) $l=e^{-2}$

(g) 4/e (h) $\sqrt{e}$

36 Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\log\left(n^2-n-2\right)-\log\left(n^2+3n-5\right)\right)^{3n-1}$

Solución: e^{-12}

37 Calcular:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{sen(n)}{n}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+\cos(n)}$

Solución: (a) 0(b) 1

38 Calcular: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}}$

Solución: 1

SERIES NUMÉRICAS

Ejercicios: Definiciones

1 Hallar el término general y el carácter de una serie cuya suma parcial n-ésima es:

(a) $S_n = \dfrac{2n}{n+1} \quad n \in \mathbb{N}$ (b) $S_n = -\dfrac{3^{n+1}-1}{2} \quad n \in \mathbb{N}$ (c) $S_n = -\dfrac{1-3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} \quad n \in \mathbb{N}$

Solución: (a) $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \quad n \in \mathbb{N}$. Observar que $S_n - S_{n-1} = a_n$ (b) $a_n = -3^n \quad n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = \dfrac{1}{3^n} \quad n \in \mathbb{N}$

2 Obtener el carácter de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \log\left(\frac{4n+3}{4n-3}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2 sen^2\left(\frac{1}{4n^2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$

Solución: (a) Divergente (b) Divergente(c) Divergente.

Son series de términos positivos cuyo término general no tiende a cero.

3 Estudiar el carácter de las siguientes series:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2^n}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{5^n}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{11^n}$

Solución: (a) Convergente. (b) Convergente (c) Divergente (d) Convergente

4 Usar la serie geométrica para demostrar que los siguientes números decimales periódicos son racionales:

1. $25'\overset{\frown}{365}$ 2. $0'\overset{\frown}{12}$

Solución: (a) $25'\overset{\frown}{365} = 25 + \frac{365}{999} = \frac{25340}{999}$ (b) $0'\overset{\frown}{12} = \frac{12}{100}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{12}{99}$

5 Calcular las siguientes sumas:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{9}{10}\right)^n + \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^n}\right]$ (b) $\sum_{n=5}^{\infty}\left[(-1)^n\left(\frac{5}{9}\right)^n + \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}\right]$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[arctg(n) - arctg(n-1)\right] = \frac{\pi}{2}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{7}{36}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n}$

(f) $4 + \pi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+5)}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)^3 - n^3\right)$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Solución: a) $10 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ (b) $-\frac{5^5}{14\cdot 9^4} + \frac{1}{3^2\left(\sqrt{3}-1\right)}$ (e) 2 (f) $4+\pi$

(g) $\frac{9}{40}$ (h) Divergente, $S_n = (n+1)^3 - 1$ (i) Divergente, $S_n = \log(n+1)$

Ejercicios: Criterios de comparación

6 Utilizando el criterio integral demuestra la convergencia o divergencia de la serie armónica

generalizada para los diferentes valores de p: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p > 0$

Solución: Para p>1 la serie es convergente. Para $0 < p \leq 1$ la serie es divergente

7 Estudiar la naturaleza de la serie aplicando alguno de los criterios de comparación:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n-1} \qquad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}} \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^5+1}}$$

$$(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)^{1/2}} \qquad (h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)+2}{n^2-n-1} \qquad (i)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$$

Solución:

(a) Convergente (comparar con geométrica de razón ½).

(b) Divergente (comparar con la serie armónica).

(c) Divergente (comparar con la serie armónica)

(d) Divergente (comparar con la serie armónica

(e) Divergente (comparar con la serie armónica)

(f) Divergente (comparar con la serie armonica generalizada para p=2/3)

(g) Convergente (comparar con la serie armónica generalizada para p=3/2)

(h) Convergente (comparar con la serie armónica generalizada para p=2)

(i) Divergente

8 Estudiar la naturaleza de la serie aplicando alguno de los criterios de comparación:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right) \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}+1}{n^3+1} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{3/2}}$$

Solución: (a) Convergente (b) Convergente (c) Convergente

comparar con la serie armónica generalizada para (a) p=2 (b) p=2 (c) p=3

Ejercicios: Suma aproximada

9 Considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ (a>1). Determinar, en función del parámetro a, el número de términos que es necesario tomar para calcular la suma con un error menor que $\varepsilon = 10^{-2}$

10 Calcula el valor de $\frac{\pi^4}{90}$ con un error menor que una milésima, sabiendo que $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Solución: Basta tomar siete términos $\frac{\pi^4}{90} \approx 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} \approx 1'0815$

11 Se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ obtener una aproximación de $\frac{\pi^2}{6}$ cuando se consideran los tres primeros términos de la serie. Dar una cota del error.

Solución: Utilizando el criterio integral: $Error < \frac{1}{3}$

12 (a) Estimar el error cometido al tomar la suma parcial S_{100} como aproximación del valor de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

(b) ¿Cuántos términos son necesarios para aproximar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ con un error menor que 10^{-5}?

Solución: (a) $error < 5 \cdot 10^{-5}$ (b) $n \geq \sqrt{\frac{10^5}{2}} = 100\sqrt{5} \approx 223.6$, es decir, $n \geq 224$

13 Estimar el error cometido al tomar la suma parcial S_n como aproximación de la suma de la serie

(a) $S_{40}, \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ (b) $S_{40}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^8}$ (c) $S_{40}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n + 3}$

(d) $S_{10}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ (e) $S_{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)2^{3n+2}}$

Solución:

14 Calcular el número de términos necesario para aproximar el valor de la serie con un error menor que 10^{-2}

(a) $S_{40}, \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ (b) $S_{40}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^8}$ (c) $S_{40}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n + 3}$

(d) $S_{10}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ (e) $S_{10} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)2^{3n+2}}$

Solución:

Series de términos positivos

Criterio del cociente: Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \text{ ó } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

entonces si

(a) Si $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

(b) Si $L > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

15 Obtener el carácter de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^n n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{e^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\log 2)^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n4^{n-1}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}(n+1)^3}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{2^{2n}(n+1)^3}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n+2}}{2^{2n}(n+1)^2}$

Solución: (a) Convergente (b) Convergente (c) Divergente

(d) Convergente (e) Convergente (f) Convergente

(g) Divergente (h) Divergente

Criterio de la raíz: Se considera la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ entonces si

(c) Si $L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente

(d) Si $L > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

16 Obtener el carácter de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{5(n+1)}\right]^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2}{2}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{e+1}{\pi}\right)^n$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n sen^n\left(\frac{1}{n}\right)$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$

Solución: (a) Convergente (b) Convergente (c) Convergente
(d) Convergente (e) Divergente (f) Convergente
(g) Divergente (h) Divergente (i) Convergente

Series alternadas

17 Calcular el carácter de las siguientes series

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n+1}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n-1}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+3}}{5^{2n}}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{3n+2}{4n^2-3}\right)$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\log 2n}$

Solución: (a) Convergente (b) No converge (c) Convergente
(d) Convergente (f) El término general no tiende a cero. No es convergente por la condición necesaria de convergencia. No se puede aplicar Leibniz.

18 Aproximar la suma de la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ cuando se considera la suma parcial n-ésima y S_{40} estimar el error en la aproximación.

Solución: $S \approx 0.9470326439$ y el error es menor que $\pm 3.54x10^{-7}$

19 ¿Cuántos términos es necesario sumar para garantizar que la suma parcial n-ésima de la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ aproxima al valor real de S con un error menor que 10^{-10} .

Solución: $n \geq \sqrt[4]{10^{10}} - 1 \approx 315.2$, es decir, $n \geq 316$

20 Estimar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{n!}$ con un error menor que 0.01

Solución:

21 Estimar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{10^n}$ con un error menor que 0.01.

Solución:

Series de términos cualesquiera

Una serie de términos cualesquiera, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es **absolutamente convergente** si es convergente la serie de sus valores absolutos, es decir, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

TEOREMA: Si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente.

Si una serie es convergente pero no es absolutamente convergente se dice condicionalmente convergente.

22 Estudiar el carácter de la serie en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^a sen\left(\frac{1}{n}\right)$$

Solución: Si $0 \leq a$ es divergente, si $a < 0$ es convergente (ejercicio resuelto).

23 Estudiar el carácter de la serie siguiente en función de los posibles valores de x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+x)5^n} \qquad x > 0$$

Solución: x>5 Divergente, si $0 \leq x \leq 5$ convergente (ejercicio resuelto)

24 Se considera la sucesión $a_n = \dfrac{n}{(n+1)(n+2)\, b^n}$ con $b \in \mathbb{R}$. Se pide:

(a) Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(b) Encontrar el valor de la suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para $b = 1$.

(c) Consideramos S_n la suma parcial n-ésima de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para $b = 1$. Sin obtener la expresión exacta de S_n encontrar una sucesión equivalente y demostrar que la expresión obtenida realmente es equivalente a S_n.

Solución: Si $|b| < 1$ la serie no converge. Si $|b| > 1$, la serie es convergente. Si b=1 la serie diverge. Si b=-1 las serie converge (ejercicio resuelto).

25 Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n^a} \qquad \text{con} \quad x \in \left[0, \pi\right], \, a \in \mathbb{R}$$

según los valores de x y a.

Solución: Ejercicio resuelto

26 Estudia el carácter de las siguientes series. Justifica adecuadamente las respuestas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^a} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^{n-1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{2n+9}{n+7}\right)$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sen^2\left(\frac{2n+5}{3n^2+8}\right)$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \log(n)}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+\cos^3 n}}$

Solución: Ejercicios resueltos

(a) Es divergente si $\frac{-1}{2} < a \le \frac{1}{2}$. Es convergente para $\frac{1}{2} < a$. (b) Es convergente por comparación con la serie armónica generalizada para p=2. (c) Convergente. (d) Divergente. (e) Convergente. (e) Convergente. Absolutamente convergente. (f) Convergente. No absolutamente convergente. (g) Es absolutamente convergente, luego es convergente.

27 Se considera para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ la ecuación:

$$\left| n^6 x^2 - \frac{13}{2} \right| = \frac{5}{2}$$

y se define para cada natural $n \in \mathbb{N}$ el número a_n como la suma de las raíces positivas de esta ecuación. Se pide:

Apartado 1.- Encontrar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto formado por los números reales a_n , es decir, el conjunto

$$\left\{a_n \;/\; n\in\mathbb{N}\right\}$$

Apartado 2.- Calcular la suma aproximada de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con un error menor que una décima.

Solución: (a) $A=\left\{\frac{5}{n^3} \;/\; n\in\mathbb{N}\right\}$ (b) $S\approx\frac{5}{1}+\frac{5}{2^3}+\frac{5}{3^3}+\frac{5}{4^3}+\frac{5}{5^3}$ (ejercicio resuelto)

28 (a) Calcular en carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n)(n+1)\cdot 3^n}$ para los diferentes valores de $x\in\mathbb{R}$

(b) Acotar el error que se comete cuando consideramos como suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n)(n+1)\cdot 3^n}$$

para x=4 los tres primeros términos

Solución:

29 (a) Demostrar que $\frac{1}{2n}<\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}$ $n\geq 1$

(b) Dar la definición de carácter de una serie numérica y estudiar el carácter de las siguientes series:

1. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)}$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\, x^n\right)$ para x>-1

Solución: (a) Demostrar por inducción. (b.1) Es divergente por comparación con la serie armónica (tened en cuenta el aparatado anterior (a)

30 Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+2)^{2n}\, sen\left(\frac{a}{n^2+1}\right)}{3^n}$ sea convergente. Dar la solución en términos de intervalos justificando la respuesta.

Solución: Convergente en el conjunto $\left[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right]$ (ejercicio resuelto)