En el Aula Virtual se encuentra disponible:

● Material interactivo con teoría y ejercicios resueltos. Para acceder a ello deberá pulsar sobre los siguientes enlaces una vez dentro de la asignatura

Pagina Principal >Apuntes>4. Funciones

● Material en pdf con el siguiente contenido:

- Repaso de números complejos a nivel de bachillerato
- Apuntes de teoría
- Ejercicios resueltos
- Problemas de examen resueltos

Para acceder a ellos se deberá pulsar sobre los siguientes enlaces una vez dentro de la asignatura:

Pagina Principal >Recursos Por Temas>Funciones

Objetivos:

- Conocer la definición de derivada y su interpretación geométrica.
- Calcular derivadas de funciones elementales utilizando las siguientes técnicas:
  - Reglas de derivación (derivada de una suma, producto, cociente).
  - Derivada de la función compuesta: Regla de la cadena
  - Derivada de la función inversa.
  - Derivada de funciones implícitas.
  - Derivada de funciones en paramétricas
  - Derivada enésima.
- Comprender la aproximación local que proporciona los polinomios de Taylor
  - Encontrar polinomios de Taylor para funciones derivables
  - Utilizar el resto de Lagrange para estimar la precisión de la aproximación.
  - Estudiar localmente una función (determinación de extremos)
- Comprender la aproximación global que proporcionan las series de Taylor
  - Calcular el campo de convergencia de una serie de potencias

- Desarrollar una función en serie de potencias.

DERIVADA: DEFINICIÓN Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

1 Un estudio del medio ambiente de cierta comunidad suburbana indica que el nivel medio de monóxido de carbono en la atmósfera es de $C(p)=\sqrt{0,5\,p^2+17}$ partes por millón cuando la población es p miles de personas. Se estima que, dentro de t años, la población será de $p(t)=3,1+0,1t^2$ miles de personas. ¿Cuál será la tasa de variación de nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de tres años?

Solución: $0'24$ *partes millon / año*

2 Supongamos que un cubo de hielo se derrite conservando su forma cúbica y que éste volumen decrece proporcional al área de su superficie. ¿Cuánto tardará en derretirse si el cubo pierde ¼ de su volumen durante la primera hora?

Solución: Aproximadamente 11 horas.

3 Consideremos $g(x)=f(x-a)$, entonces $g'(x)=f'(x-a)$. Explique esta derivada gráficamente: compare las gráficas de f y g y argumente por qué las pendientes de las rectas tangentes se relacionan como la fórmula indica.

Solución:

4 Consideremos $h(x)=f(2x)$, entonces $h'(x)=2f'(2x)$. Explique esta derivada gráficamente: compare las gráficas de f y h y argumente por qué las pendientes de las rectas tangentes se relacionan como la fórmula indica.

Solución:

5 Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ si $y=\dfrac{u^2+3u}{u^2-1}$, $u=senx$

Solución: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2senx-3-3sen^2x}{\cos^3 x}$

6 Sean f, g y h funciones derivables en $\mathbb{R}$. Expresar en función de $f(a)$, $g(a)$, $h(a)$ y de sus derivadas $f'(a)$, $g'(a)$, $h'(a)$ las derivadas de las siguientes funciones en $x=a$.

(a) $f\left(xf\left(x\right)\right)$ (b) $f\left(x^2\right)$ (c) $f\left(g\left(h^2\left(x+1\right)\right)\right)$ (d) $f\left(x+g\left(1\right)\right)$

(e) $f\left(\dfrac{g\left(x\right)+1}{g^2\left(x\right)+1}\right)$ (f) $f^2\left(g\left(2x\right)\right)$ (g) $f\left(g\left(\sqrt{x+2}\right)\right)$

Solución:

7 Se considera la ecuación:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=x^3$$

y se realiza el cambio $x=e^t$. Escribir la ecuación después de haber realizado el cambio considerando la variable y dependiente de t.

Solución: $\dfrac{d^2y}{d^2t}-5\dfrac{dy}{dt}+6y=e^{3t}$

8 Deducir la derivada de las funciones:

(a) $f\left(x\right)=arcsen\left(x\right)$ (b) $f\left(x\right)=\arccos\left(x\right)$ (c) $f\left(x\right)=\mathrm{arc}\,tg\left(x\right)$

(d) $\dfrac{d}{dx}\left(\arg Ch\,x\right)$ (e) $\dfrac{d}{dx}\left(\arg Sh\,x\right)$ (f) $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{ar} c\sec x\right)$

Nota: $y = \arg Ch\,x \Leftrightarrow Chy = x$ $\quad y = \arg Sh\,x \Leftrightarrow Shy = x$ $\quad Ch^2x - Sh^2x = 1$

9 Hallar la derivada n-ésima de $f\left(x\right) = \dfrac{17x+5}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)}$.

Solución: Descomponer en fracciones simples: $\dfrac{17x+5}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)} = -\dfrac{6}{x+1} + \dfrac{29}{x+2} - \dfrac{23}{x+3}$

Si $g\left(x\right) = \dfrac{A}{x+a}$ entonces $g^{(n}\left(x\right) = A\left(-1\right)^n n!\left(x+a\right)^{-(n+1)}$

10 Hallar la derivada n-ésima de:

(a) $f\left(x\right) = sen\left(x\right)$ en x=0 (b) $f\left(x\right) = \cos\left(x\right)$ en x=0

(c) $f\left(x\right) = e^x$ en x=0 (d) $f\left(x\right) = \log\left(1+x\right)$ en x=0

(e) $f\left(x\right) = \log\left(\dfrac{3+x}{4-x}\right)$ en x=0

(f) $f\left(x\right) = sen\left(2x\right)\cos\left(2x\right)$ en x=0 (utilizar fórmula del seno del ángulo doble)

Solución: (a) $f^{(n}\left(x\right) = \begin{cases} \left(-1\right)^{n/2} sen\left(x\right) & si\ \ n\ \ par \\ \left(-1\right)^{(n-1)/2}\cos\left(x\right) & si\ \ n\ \ impar \end{cases}$

$$f^{(n}\left(0\right) = \begin{cases} 0 & si\ \ n\ \ par \\ \left(-1\right)^{(n-1)/2} & si\ \ n\ \ impar \end{cases}$$

También:

$$f^{(n}\left(x\right) = sen\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad f^{(n}\left(0\right) = sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

(c) $f^{(n}\left(x\right) = e^{x} \qquad f^{(n}\left(0\right) = 1$

(d) $f^{(n}\left(x\right) = \left(-1\right)^{n+1}\left(n-1\right)!\left(1+x\right)^{-n} \qquad f^{(n}\left(0\right) = \left(-1\right)^{n+1}\left(n-1\right)!$

(e) $f^{(n}\left(x\right) = \left(-1\right)^{n} n!\left(3+x\right)^{-n} + n!\left(4-x\right)^{-n}$

(f) $f\left(x\right) = sen\left(2x\right)\cos\left(2x\right) = \dfrac{sen\left(4x\right)}{2}$ Aplicar apartado (a) para obtener:

$f^{(n}\left(x\right) = 2\cdot 4^{n-1} sen\left(4x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$. Este apartado está resuelto en el aula virtual.

11 Calcula la derivada de orden 30 de la función : $f\left(x\right) = x^{3} sen\left(x\right)$

Solución: $-x^{3} sen\left(x\right) + 90x^{2}\cos\left(x\right) + 2610x\ sen\left(x\right) - 24360\cos\left(x\right)$

12 Calcular la derivada 1002 de la función $f\left(x\right) = x\sqrt{1+x}$ en el punto 0.

Solución: $f^{(n}\left(0\right) = \dfrac{\left(-1\right)^{n}}{2^{n-1}} n\left(2n-5\right)!!$

Aplicar fórmula de Leibniz. La notación $k!!$ representa

$k!! = k\left(k-2\right)\left(k-4\right)...2$ si k es par

$k!! = k\left(k-2\right)\left(k-4\right)...3\cdot 1$ si k es impar

RECTA TANGENTE. APROXIMACIÓN LINEAL

13 Hallar un valor aproximado de $\sqrt{4'1}$ utilizando la tangente a la curva $\sqrt{4+x}$ en el punto a=0

Solución: $\sqrt{4'1} \approx f(0) + f'(0)(0'1 - 0) = \sqrt{4} + \frac{1}{4} \cdot 0'1 = 2'025$

14 Obtener de forma aproximada los siguientes valores:

(a) $\log(0.9)$ (b) $e^{0.4}$ (c) $\sqrt[3]{70}$ (d) $\sqrt[3]{8'02}$

Solución: (a) $\log(0.9) \approx -0.1$ (b) $e^{0.4} \approx 1.4$

(c) $\sqrt[3]{70} \approx 4.125$ (d) $\sqrt[3]{8'02} \approx 2 + \frac{0.005}{3} \approx 2'0016667$

15 Utiliza la aproximación lineal de la función $(1+x)^k \approx 1 + kx$ para calcular de forma aproximada $(1.0002)^{50}$, $\sqrt[3]{1.009}$

Solución: $(1.0002)^{50} \simeq 1 + 50 \cdot 0.0002$ $(1.009)^{1/3} \simeq 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.009$

POLINOMIOS DE TAYLOR

Cálculo de valores aproximados

16 En un entorno de $a = 0$ se aproxima la función $y = \sqrt{1+x}$ mediante el polinomio $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x$, obteniendo $\sqrt{2} \approx 1.5$. Dar una cota del error cometido.

Solución: $|error| = \left|\frac{1}{8(1+t)^{3/2}}\right| < \frac{1}{8} \quad (0 < t < 1)$

17 Calcular, mediante la diferencial, una aproximación de cos(155º) y dar una cota del error cometido.

Solución: $\left|\text{Error}\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2$

18 (a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $y = \log\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ alrededor del punto $a = 0$.

(b) Obtener, mediante el polinomio anterior, un valor aproximado de log(0.5).

(c) Hallar una cota del error cometido en dicha aproximación

Solución: $T_2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3$, $\log(0.5) \simeq -0.6931$ $\left|error\right| < 0.25$

19 ¿Qué error se comete al sustituir e^{senx} por $1 + x + \frac{1}{2}x^2$?

Solución: $\left|\text{Error}\right| < \frac{5 \cdot 2,72}{6}\left|x^3\right|$

20 Se considera la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

(a) Calcula una estimación del error de la aproximación de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ por su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a = 0$ cuando x pertenece al intervalo $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

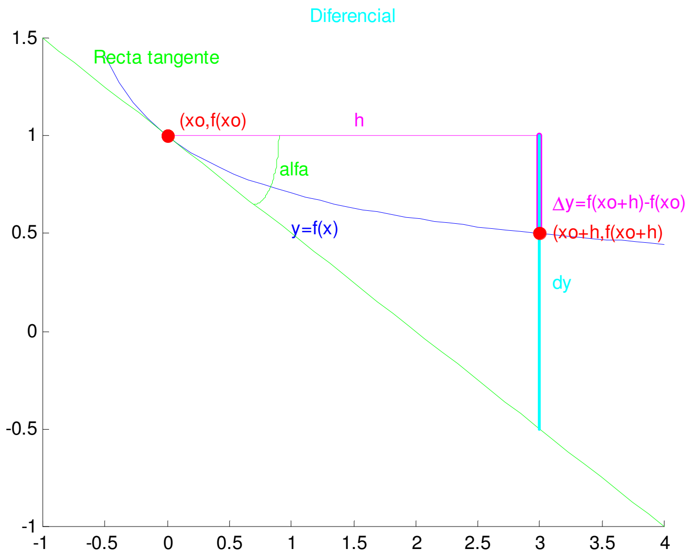
(b) Calcula para esta función la diferencial en $a = 0$ e $\Delta x = 0.5$. Haz un bosquejo de esta función y representa el valor obtenido.

(c) ¿Puedes dar una cota del error que se comete al aproximar $\sqrt{\frac{2}{3}}$ por 1?

Solución: Ejercicio resuelto. (a) Una estimación del error es $\left|error\right| \leq \frac{5}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^7}$

(b) La diferencial es:

$$dy = f'\left(0\right)\Delta x = \frac{-1}{2}\cdot 0,5 = -0,25$$



(c) $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(0\right)\right| < 0,25$

21 Sea $f\left(x\right) = x\log\left(1+x\right)$. Se pide:

(a) Escribir la fórmula de Taylor para f(x) en x=0 de orden n con el resto de Lagrange.

(b) Dar una cota del error al aproximar $\frac{1}{10}\log\left(\frac{11}{10}\right)$ mediante el polinomio de Taylor de grado 3.

Solución: Ejercicio resuelto.

(a) $x\log\left(1+x\right) = x^2 + \ldots + \frac{\left(-1\right)^n}{n-1}x^n + \frac{f^{(n+1}\left(t\right)}{\left(n+1\right)!}x^{n+1} \quad con\ t\ entre\ 0\ y\ x$

(b) $\left|Error\right| < \dfrac{41}{12 \cdot 10^5}$

22 Considera la función $f\left(x\right) = x\sqrt{1+x}$.

(a) Determina la expresión del resto n-ésimo del polinomio de Taylor de la función en a=0

(b) Determina el grado del polinomio de Taylor de la función $f\left(x\right)$ en a=0 que permite aproximar $\sqrt{2}$ con un error menor que una décima.

Solución: Ejercicio resuelto.

(a) $$\frac{f^{(n+1)}\left(t\right)}{\left(n+1\right)!}x^{n+1} = \left[t\frac{\left(-1\right)^{n+2} 1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot \left(2n-1\right)}{2^{n+1}\sqrt{\left(1+t\right)^{2n+1}}} + \left(n+1\right)\frac{\left(-1\right)^{n+1} 1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot \left(2n-3\right)}{2^{n}\sqrt{\left(1+t\right)^{2n-1}}}\right]\frac{x^{n+1}}{\left(n+1\right)!}$$

(b) Polinomio de Taylor de grado 3.

23 (a) Calcular mediante el polinomio de Taylor con un error menor que una décima el valor de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$.

(b) Representar de forma aproximada la gráfica de la función y del polinomio de Taylor obtenido en el apartado anterior

Solución: Ejercicio resuelto. El polinomio que se debe elegir es el de grado 2. Entonces:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^{-2/3} \cong \frac{5}{9}$$

24 Dada la función: $f\left(x\right) = \dfrac{x^2-4}{e^{x-2}}$

(a) Calcular el polinomio de Taylor de esta función en $a=2$ y obtener la expresión del resto de Lagrange.

(b) Calcular de forma aproximada $f(2.1)$ con el polinomio de grado 3 y dar una cota de error.

Solución: $T_n = 4(x-2) - 3(x-2)^2 + (x-2) + \dots + (-1)^n \dfrac{n^2-5n}{n!}(x-2)^n$

$R_n = (-1)^{n+1} \dfrac{e^{2-t}\left((n+1)t^2 - 2t(n+1) + (n^2-3n+4)\right)}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}$ t un punto intermedio entre 2 y x.

$f(2'1) \simeq 4 \cdot 0'1 - 3(0'1)^2 + (0'1)^3$

Una acotación podría ser: $|R_3| < \dfrac{(0'1)^4\left(4(2'1)^2 + 8(2'1) + 4\right)}{4!}$

25 Se considera $f(x) = \log\left(\dfrac{x+2}{2x-2}\right)$. Se pide:

(a) Representa el dominio de la función $f(x)$

(b) Calcula el polinomio de Taylor de grado n de $f(x)$ en $a = 4$ y determina la expresión del resto enésimo de $f(x)$en $a = 4$

(c) Calcula una cota del error cuando queremos aproximar $\log\left(\dfrac{6'1}{6'2}\right)$ por el polinomio de grado 3

(d) ¿Cuántos términos es necesario considerar del polinomio de Taylor de $f(x)$ en $a = 4$ para aproximar $\log\left(\dfrac{6'1}{6'2}\right)$ con un error menor que 10^{-1}?

(e) ¿De qué orden es el resto del polinomio de taylor de grado 3 de $f(x)$ en $a = 4$?

Solución: (a) $T_n = \dfrac{-1}{6}(x-4) + \dots + (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\dfrac{1-2^n}{6^n}\right)(x-4)^n$

$$R_n = \frac{\left(-1\right)^n}{n+1}\left(\frac{1}{\left(t+2\right)^{n+1}} - \frac{1}{\left(t-1\right)^{n+1}}\right)\left(x-4\right)^{n+1}$$

(b) $\left|R_3\right| < \frac{1}{10^4}\left[\frac{1}{6^5} + \frac{1}{6\cdot 3^4}\right]$ (c) Se necesitan n=1 términos

26

(a) Calcular la derivada enésima de la función $f\left(x\right) = \log\left(\left(1-x\right)^5\right)$.

(b) Calcular el conjunto de números reales x de manera que el polinomio de MacLaurin de $f\left(x\right) = \log\left(\left(1-x\right)^5\right)$ de grado 3 permita aproximar f(x) con un error menor que 10^{-3}

(c) Calcular de forma aproximada el valor de $f\left(x\right) = \log\left(1'1^5\right)$ con la aproximación de la ordenada de la recta tangente dando una estimación del error

Solución: Ejercicio resuelto. (a)

$$f^{(n}\left(x\right) = -5\cdot\left(n-1\right)!\cdot\left(1-x\right)^{-n} \quad \rightarrow \quad f^{(n}\left(0\right) = -5\cdot n!$$

(c) $5\log\left(1'1\right) \approx 0'5$. Una cota del error puede ser: $\left|error\right| < \frac{5\cdot 10^{-2}}{2}$

27

La fórmula de Machin

$$\frac{1}{4}\pi = 4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239}$$

puede usarse para aproximar los valores de π. Utilizar el desarrollo de Taylor de la función $arctg\left(x\right)$ hasta tercer orden y la fórmula de Machin para calcular el valor de π. Dar una cota para el error de la aproximación justificando adecuadamente la respuesta.

Solución: Ejercicio resuelto. $\pi = 3.1406 \pm 0.0053248$.

Cálculo de límites indeterminados

28 Calcula infinitésimos equivalentes para las funciones en x=0 utilizando polinomios de Taylor:

$$f(x) = sen x \qquad f(x) = tg x \qquad f(x) = \log(1+x)$$

$$f(x) = \cos x \qquad f(x) = e^{x^2} - sen(x^3) - 1$$

29 Utilizando polinomios de Taylor calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{\cos x \, (\operatorname{sen} 2x)^2} = \frac{1}{8}$ (b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x(1-\cos x)} = \frac{2}{3}$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + sen x} = 1$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - \cos(ax) - sen(ax)}{x^2}$ (a es un número real no nulo)

30 Determinar el carácter de $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \left(sen\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right)$

Solución: Convergente

31 a) Sea $R_n(x)$ el resto de Taylor de orden n de una función f(x) derivable infinitas veces en el punto a, ¿Es $g_n(x) = R_n(x) + (x-a)^6$ un infinitésimo para x=a? ¿De qué orden es para x=a la función $g_7(x) = R_7(x) + (x-a)^6$?

(b) Sea $f(x)$ un infinitésimo para x=a de orden p. Escribir $f(x)$ como

$$f(x) = \lambda (x-a)^p + g(x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

siendo $g(x)$ un infinitésimo para x=a de orden superior a p.

32 Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-senx}{\left(xsenx\right)^{3/2}}$ utilizando infinitésimos equivalentes.

33 Dada la función: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{e^{x-2}}$

(a) Calcular el polinomio de Taylor de esta función en $x_o=2$ y obtener la expresión del resto de Lagrange.

(b) Calcular de forma aproximada $f\left(2.1\right)$ con el polinomio de grado 3 y dar una cota de error.

(c) Calcula la parte principal del infinitésimo $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{e^{x-2}}$ para x=2

Estudio local de una función

34 Calcular los máximos y mínimos de la función: $f\left(x\right)=x^4+4x^3+6x^2+4x$

35 Demostrar que la función: $f\left(x\right)=e^x-x-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}$ tiene un mínimo en x=0.

SERIES DE POTENCIAS. SERIES DE TAYLOR

36 Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2 2n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\left(2n-1\right)2^n}\left(x-1\right)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n^n}\left(x-2\right)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Solución: (a) R=2, $[-2,2]$ (b) R=2, $(-1,3)$ (c) $R=\infty$ (d) R=1

(e) R=0 (f) $R=\infty$

Ejercicio resuelto en el libro Colección Matemáticas, tomo 3 de la bibliografía.

37 Determinar el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

(a) $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-x-2}$ $a=0$ (b) $f(x) = arctg(x)$ $a=0$

(c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $a=0$ (d) $f(x) = \frac{1}{x}$ $a=1$

(e) $f(x) = \frac{2+x}{1+2x+x^2}$ $a=0$ (f) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $a=0$

(g) $f(x) = \log(1+x)$ $a=0$ (h) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ $a=0$

Solución:

(a) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[2(-1)^n - \frac{3}{2^{n+1}}\right]x^n \qquad |x|<1$$

(b) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x|\le 1$$

(c) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \qquad |x|<1$$

(d) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$ $\qquad |x-1| < 1$

(e) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2) x^n$ $\qquad |x| < 1$

(f) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ $\qquad |x| < 1$

(g) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ $\qquad |x| < 1$

(h) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$ $\qquad |x| < 1$

38 Representar en serie de potencias de x la función $f(x) = \sqrt{1+x}$. Usar el desarrollo obtenido para calcular $\sqrt{1{,}1}$ comprobando que las cuatro primeros términos del desarrollo permiten obtener dicho valor con cuatro cifras decimales exactas.

Solución: $\sqrt{1{,}1} \approx 1{,}0488$

Resuelto en el libro Colección Matemáticas Tomo 3 de la bibliografía.

39 Dada la serie potencial $(x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \dots$, se pide:

(a) Hallar el campo de convergencia

(b) Obtener su suma y aplicar al caso x=1

(c) Representar gráficamente la función obtenida en el apartado (b)

Solución: (a) $[1,3)$ (b) $f(x) = -\log(3-x)$

Resuelto en el libro Colección Matemáticas Tomo 3 de la bibliografía.

40 Dada la función $f\left(x\right) = arcsen\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$, se pide:

(a) Desarrollar en serie de potencias de x

(b) Obtener el campo de convergencia del desarrollo obtenido

(c) Sustituyendo en dicho desarrollo x=1, la serie numérica permite calcular el valor de $\dfrac{\pi}{4}$. Determinar el número de términos de la serie que deben tomarse, para obtener el valor aproximado de $\dfrac{\pi}{4}$ con error menor que 0.1.

Solución: (a) $f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (b) $\left[-1,1\right]$ (c) $\dfrac{\pi}{4} \approx 0.8349$

Resuelto en el libro Colección Matemáticas Tomo 3 de la bibliografía.

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

41 Determina el punto de corte de la recta tangente a la gráfica de $f\left(x\right) = x^{\log x}$ en el punto x=e con el eje X.

Solución: $\left(\dfrac{e}{2},0\right)$

42 Supongamos que la ecuación de Van der Waals para cierto gas es

$$\left(P + \frac{5}{V^2}\right)\left(V - 0.03\right) = 9'7$$

Considerando el volumen como función de la presión P, usar derivación implícita para calcular la derivada $\dfrac{dV}{dT}$ en el punto (5,1).

Solución:

43 Obtener la derivada de la función definida implícitamente por la ecuación

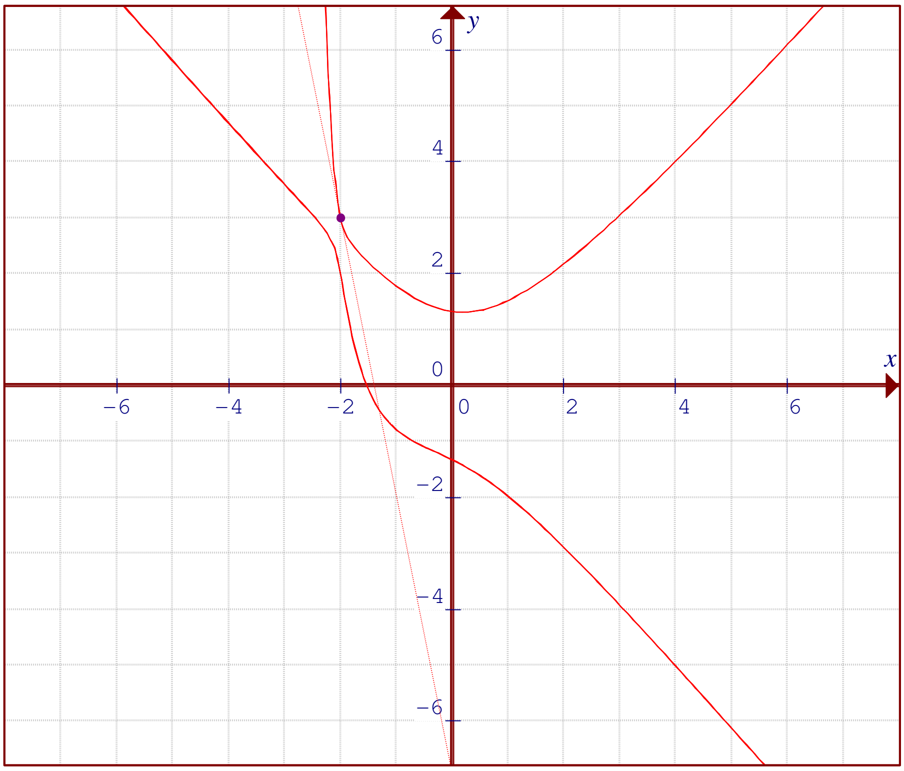
$arctg\,\dfrac{y}{x} = \log\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$ donde "log" representa al logaritmo neperiano y "a" es una constante.

Solución: Derivar implícitamente suponiendo $y = y(x)$ y simplificar

44 Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva siguiente en el punto (-2, 3)

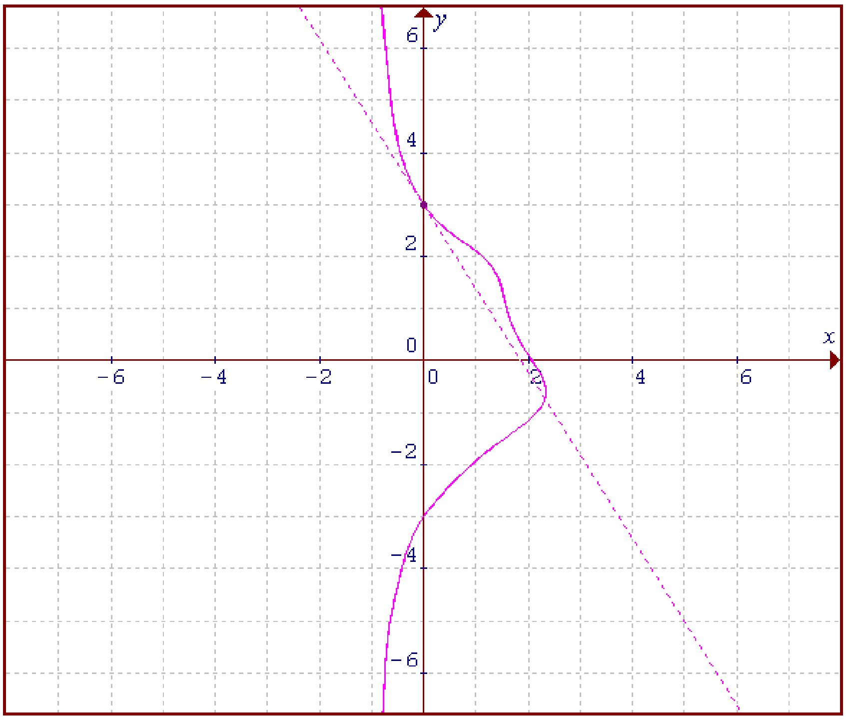
$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$

Solución: Recta tangente : $y - 3 = -\dfrac{9}{2}(x+2)$. Recta normal: $y - 3 = \dfrac{2}{9}(x+2)$

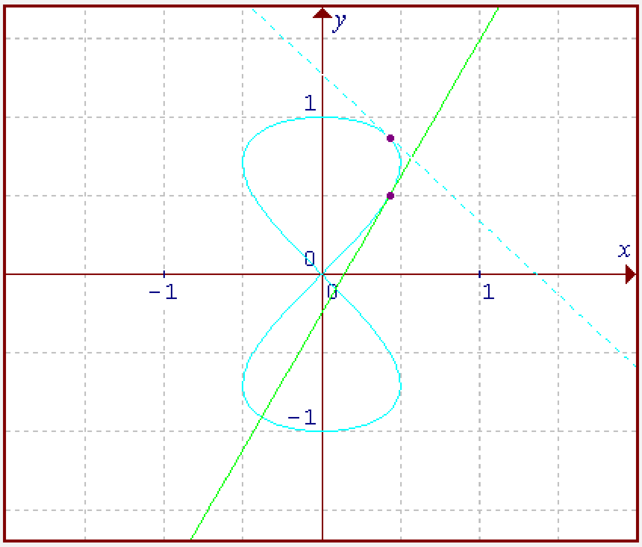


45 Hallar la ecuación de la recta tangente y de la normal a la curva de ecuación $x^3 + x^2\,\text{sen}(2y) + y^2(x+1) = 9$ en el punto (0, 3).

Solución: Recta tangente $2y-6=-3x$. Recta normal $3y-9=2x$

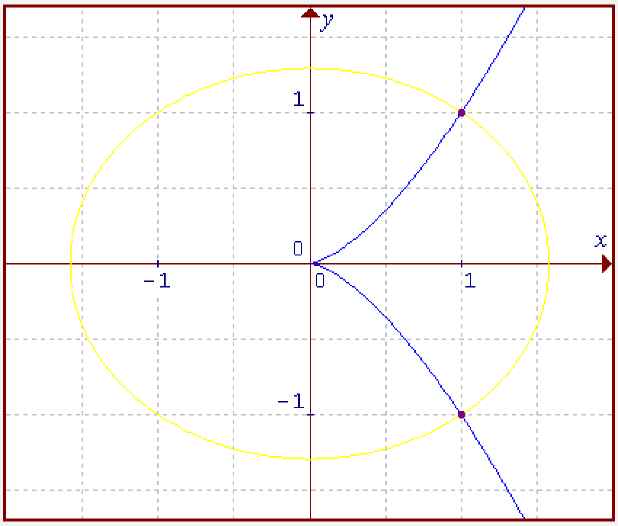


46 Halla la pendiente de la curva $y^4 = y^2 - x^2$ en los puntos indicados $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$



Solución:

47 ¿Tienen las tangentes a las curvas $2x^2 + 3y^2 = 5$ e $y^2 = x^3$ algo en especial en los puntos $(1,1)$, $(1,-1)$? Representa ambas curvas y justifica la respuesta.



Solución:

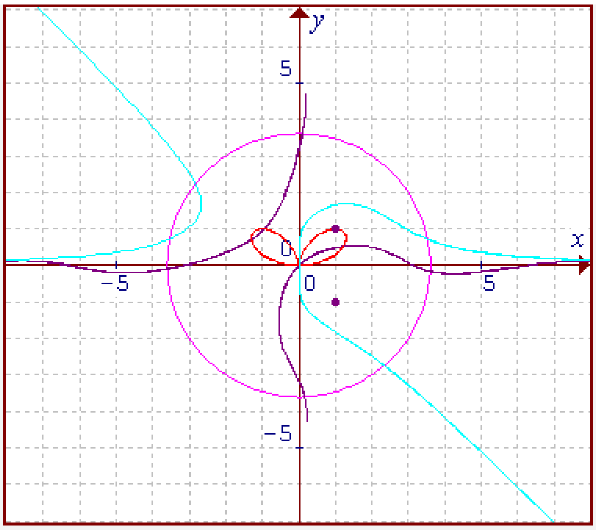
48 Calcula la ecuación de la tangente a las curvas siguientes en el punto que se indica

(a) $x^2 + y^2 = 13 \ \ en \ \left(-2,3\right)$ (en el gráfico en color magenta)

(b) $sen\left(x-y\right) = xy \ en \ \left(0,\pi\right)$ (en el gráfico en color granate)

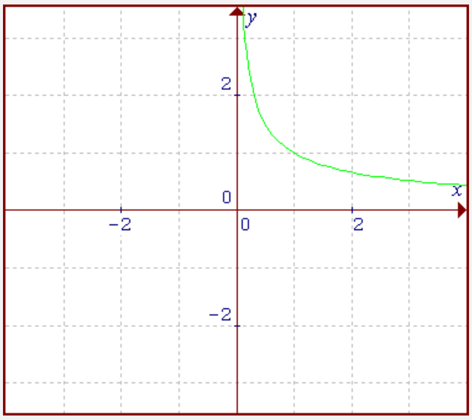
(c) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4x^2y \ \ en \ \left(1,1\right)$ (en el gráfico en color rojo)

(d) $x^3 + y^3 - 9\dfrac{x}{y} = 0 \ en \ \left(2,1\right)$ (Folium de Descartes) (en el gráfico en color turquesa)



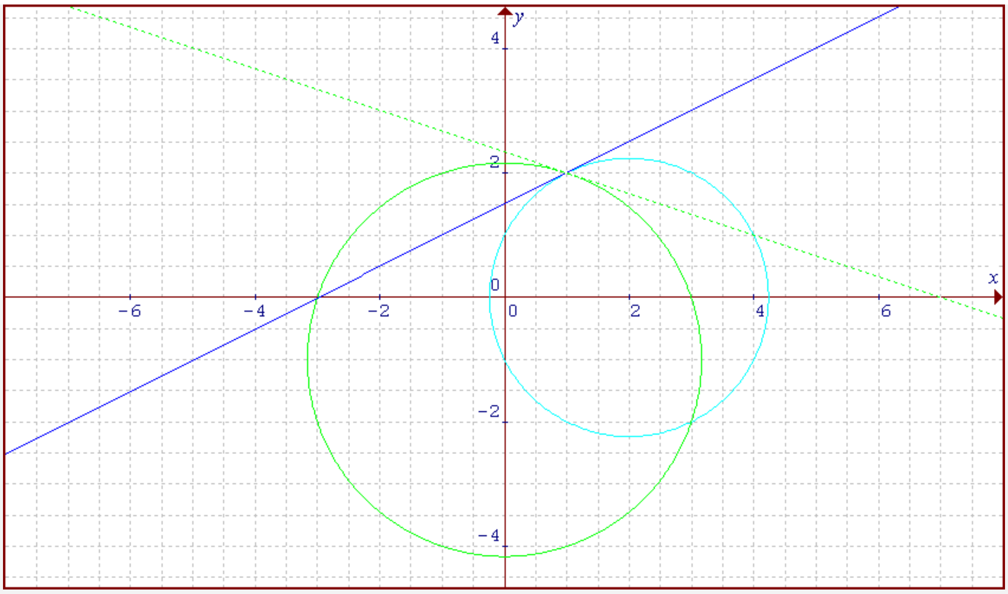
Solución:

49 Calcula $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ derivando implícitamente la función $\log\left(xy\right)+xy^2=1$



Solución:

50 Calcular los ángulos que forman al cortarse las curvas definidas por $x^2+y^2-4x=1$, $x^2+y^2+2y=9$.



Nota: El ángulo que forman dos curvas es el ángulo determinado por sus rectas tangentes. Se puede calcular así $tg\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ donde m1 y m2 son las pendientes de las rectas tangentes.

Solución: En el punto (1, 2): $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

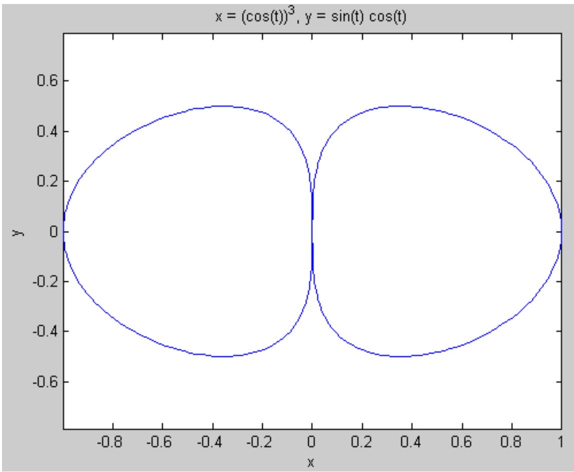
51 Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ suponiendo que y(x) está dada implícitamente por la ecuación $x^{arctgy} = \sqrt{y}Chx$

Solución: $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xThx - arctgy}{x} \cdot \dfrac{2y\left(1+y^2\right)}{2y\log x - 1 - y^2}$. Ejercicio resuelto.

DERIVACIÓN PARAMÉTRICA

52 Calcula la recta tangente a la curva en paramétricas $x(t) = \cos^3(t)$, $y(t) = sen(t)\cdot\cos(t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ en el punto (1, 0).

Solución: Aplicando la regla de la cadena se tiene que: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$.



53 Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si $\begin{cases} x = e^t \\ y = 1 + t^2 \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$ en el punto P(1,1)

Solución: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{e^t}$. En el punto P el valor de t=0 luego $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_P = 2$

54 Determinar los puntos de la curva $\left\{ x = \dfrac{t^2}{t^2+1}, \quad y = \dfrac{t}{t^2-1} \right.$ en los que la pendiente de la recta tangente a la curva es cero.

Solución: No existe ningún punto.

55 Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $\left\{ x = Bt, \quad y = Ct - Dt^2 \right.$ en el punto t=0.

Solución: $y = \dfrac{C}{B}x$

56 Calcular $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ derivada segunda de $\begin{cases} x = 2t^3 + sen\left(t\right) \\ y = t^2 - \cos\left(t\right) \end{cases}$

Solución: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\left(6t^2+2\right)\cos\left(t\right)+1-12t^2-10sen\left(t\right)}{\left(6t^2+\cos\left(t\right)\right)^2\left(6t^2+\cos\left(t\right)\right)}$

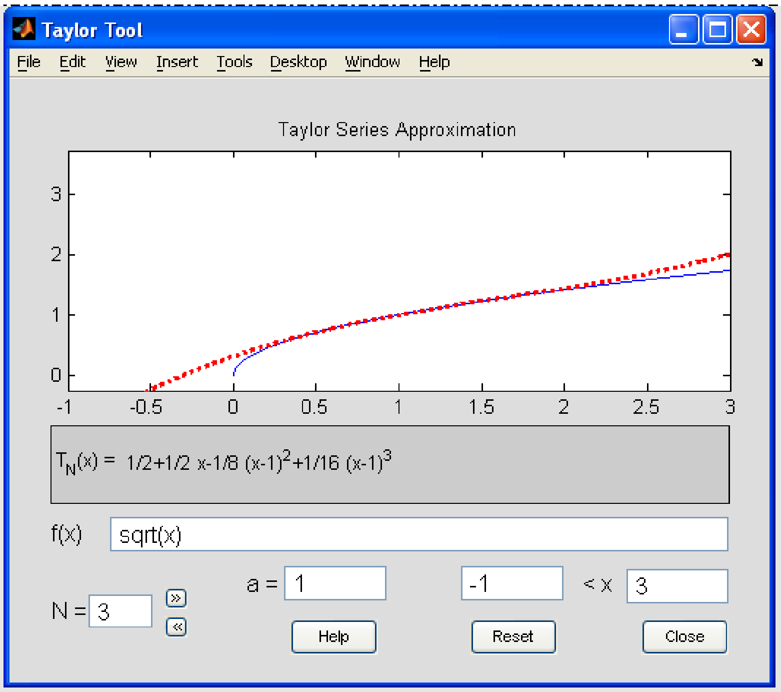
MATLAB

Polinomios de Taylor en Matlab

Para mostrar esta herramienta teclear en la ventana de comandos

>>taylortool

Se abrirá la ventana:



Representación de curvas en Matlab

Un vector frente a otro (de la misma longitud)

```
>>x=pi*(-1:0.01:1);
>>y=x.*sin(x);
>>plot(x,y) %Por defecto une los puntos (x(i),y(i)) mediante una poligonal
```

Una función en un intervalo

>>fplot('sin(x)', [0 2*pi]) %Dibuja la función seno en el intervalo $[0, 2\pi]$

Una función en un intervalo

```
>>ezplot('sin(x)') %Dibuja la función seno en un intervalo adecuado a la función
```

Una curva en paramétricas

>>ezplot('sin(t)', 'cos(t)', [0 pi]) %Dibuja la curva x=sen(t), y=cos(t) con $t \in [0, \pi]$

Una curva en implícitas

>>ezplot('x^2+y^2-1') %Dibuja la curva $x^2 + y^2 - 1 = 0$