En el Aula Virtual se encuentra disponible:

● Material interactivo con teoría y ejercicios resueltos. Para acceder a ello deberá pulsar sobre los siguientes enlaces una vez dentro de la asignatura

Pagina Principal >Apuntes>5. Funciones de varias variables

● Material en pdf con el siguiente contenido:

- Apuntes de teoría
- Ejercicios resueltos
- Problemas de examen resueltos

Para acceder a este material se deberá pulsar sobre los siguientes enlaces una vez dentro de la asignatura:

Pagina Principal >Recursos Por Temas>Funciones de varias variables

DEFINICIONES BÁSICAS

Para realizar estos ejercicios debes conocer:

- El concepto de función de varias variables
- La relación que existe entre las curvas de nivel y su gráfica
- El concepto de límite y de continuidad para funciones de varias variables como extensión de los ya conocidos para funciones de una variable

Funciones de varias variables: dominio, gráfica, curvas de nivel

1 Representar gráficamente el dominio de las funciones siguientes:

$$f\left(x,y\right)=\frac{\log y}{2x^2-1} \qquad f\left(x,y,z\right)=\frac{\sqrt{x+y}}{xz^2} \qquad f\left(x,y\right)=\frac{x-y}{\log\left(xy\right)}$$

2 Representar el dominio de las siguientes funciones:

$$\text{(a)}\ f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\,e^{\frac{x+y}{x-y}} \qquad \text{(b)}\ f(x,y)=\log\left(\frac{x+1}{y-2}\right) \qquad \text{(c)}\ f(x,y)=|y|\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

3 Representa las curvas de nivel de las funciones:

$$\text{(a)}\quad f(x,y)=x^2+4y^2+1 \qquad \text{(b)}\qquad f(x,y)=-x^2+y$$

4 Supongamos que las empresas de un país determinan el precio de sus productos de acuerdo con la siguiente ecuación: $P=(1+a)\dfrac{x}{y}$ donde “x” es la productividad laboral, “y” es el salario, “a” el margen de beneficios constante. Suponiendo a=3, ¿cuáles son los valores (x, y) para los que el precio es el mismo P=8?. Representarlos gráficamente.

5 Representa las siguientes superficies en $\mathbb{R}^3$:

(a) $f(x,y)=ax+by+c$ con a, b y c números reales (b) $f(x,y)=x^2+y^2$

(c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (d) $f(x,y)=x^2-y^2$

6 Representa las superficies de nivel para la función: $F(x,y,z)=4x^2+9y^2+z^2$ para las constantes k=0, k=9, k=36

7 Une las siguientes definiciones de superficies con la imagen correspondiente:

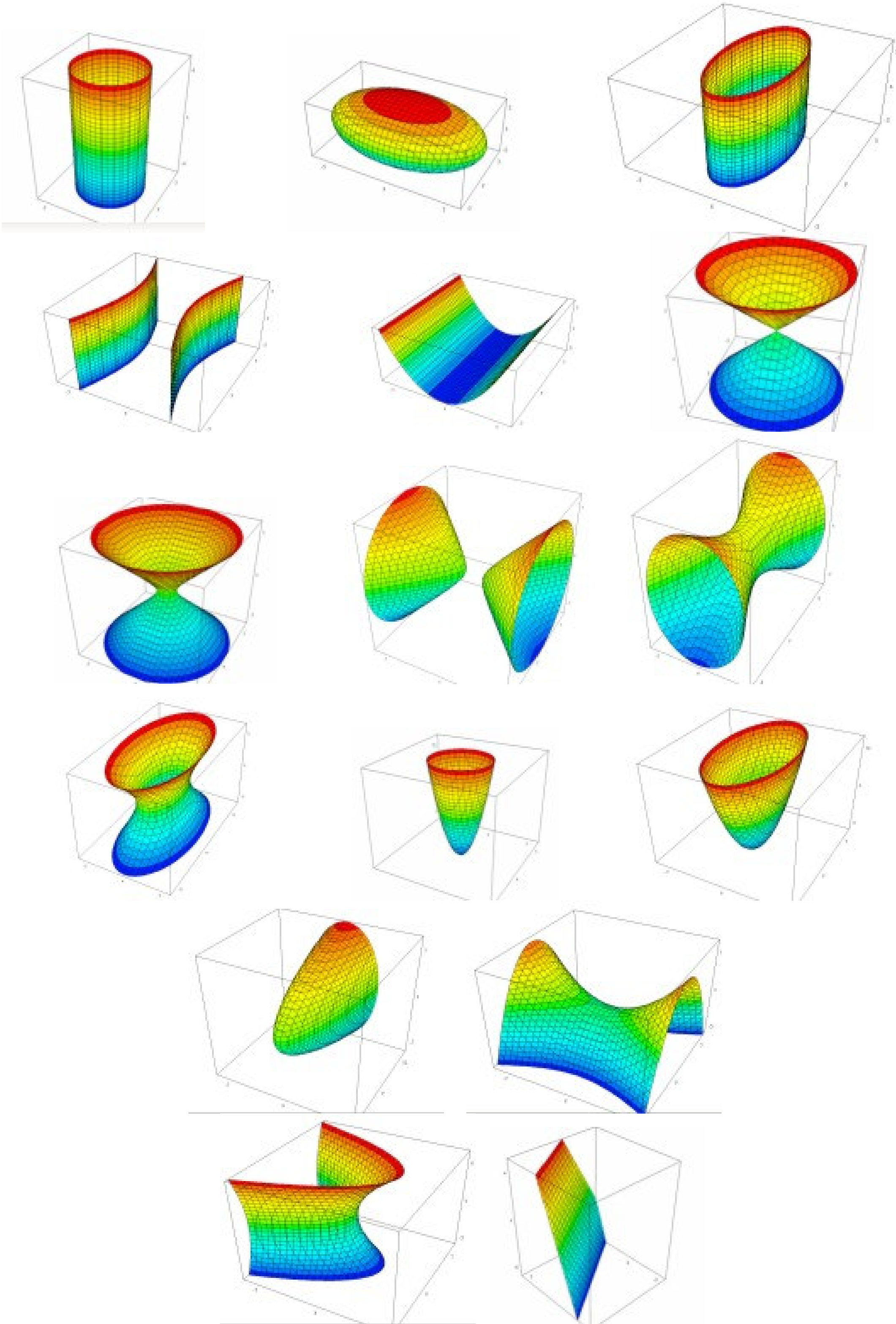
$$x^2+y^2=8 \qquad x^2-y^2-z^2=1 \qquad x^2+y^2=z^2$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1 \qquad z=\frac{x^2}{4} \qquad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1 \qquad -x^2-y^2+z^2=1$$

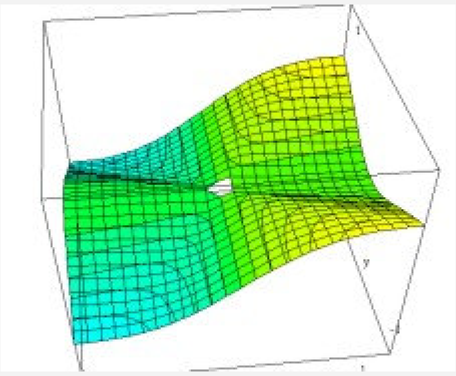
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1 \qquad x^2+y^2=z \qquad \frac{x^2}{1}+\frac{z^2}{4}=y$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z \qquad \frac{z^2}{9}-\frac{y^2}{4}=x \qquad x+y+z=2$$

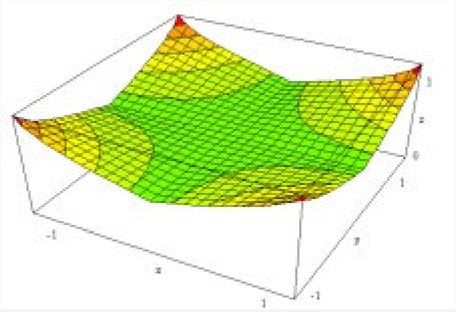


Límites y continuidad (NO)

8 Utilizando la definición de límite comprobar: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

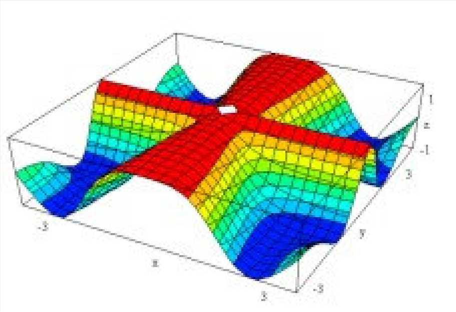


9 Estudiar la existencia del límite en el punto (1, 1) de la función $f(x,y) = \cos\sqrt[3]{|xy|-1}$



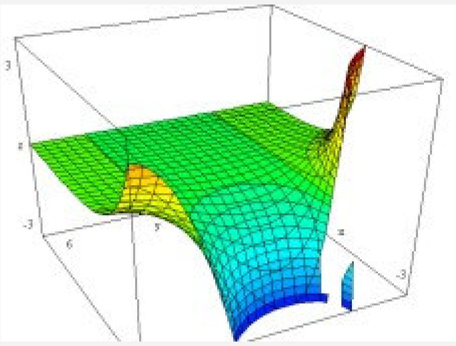
Solución: El límite existe y vale 1

10 Calcula $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\pi \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right)$



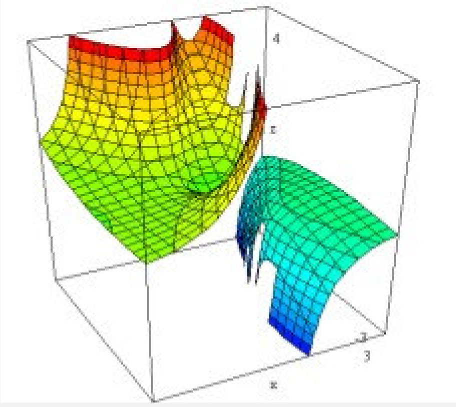
Solución: El límite existe y vale 1. Utilizar coordenadas polares.

11 Calcula $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} \dfrac{e^{-x}\cos y}{\sqrt{x+y+1}}$



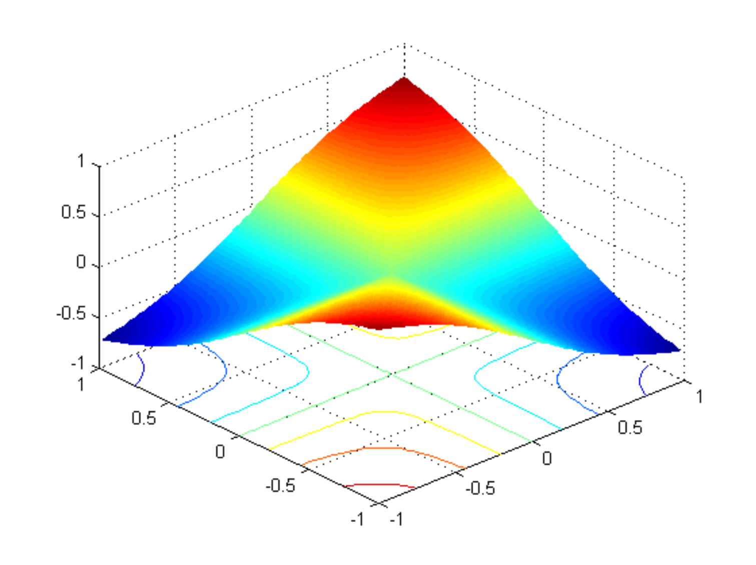
Solución: El límite existe y vale $\dfrac{-1}{\sqrt{\pi+1}}$

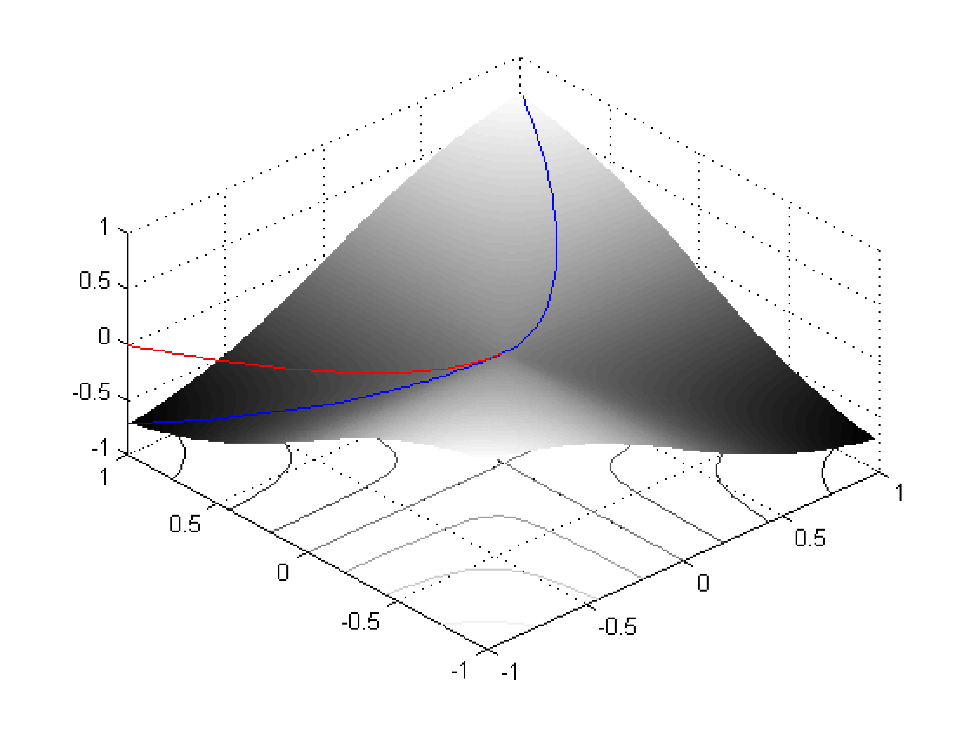
12 Calcula $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{xy-x^3+1}$



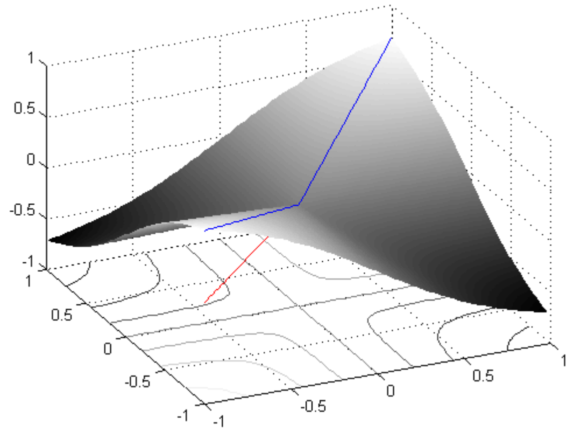
Solución: El límite existe y vale 0.

13 Estudiar el límite de la función $f\left(x,y\right)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ siguiendo la dirección: $\varphi\left(x\right)=x^2$.

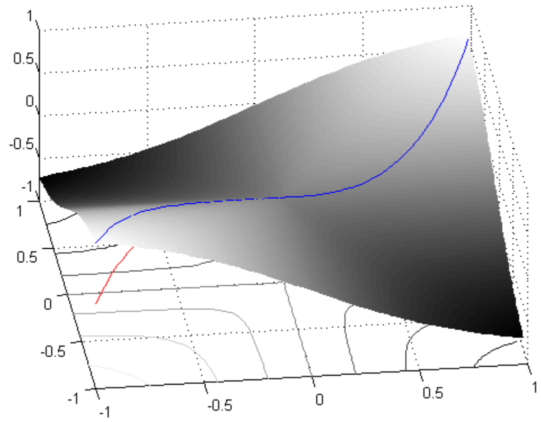


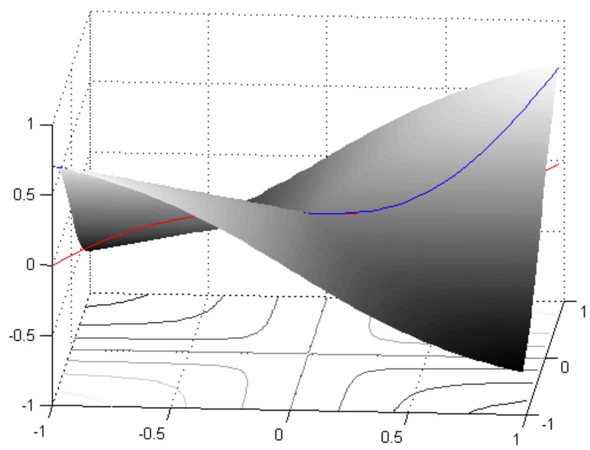


(B) Por la recta $y=x$

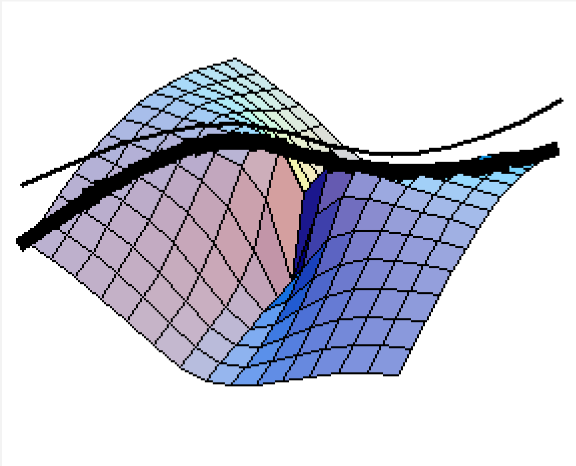


(c) Por la curva: $y = x^3$



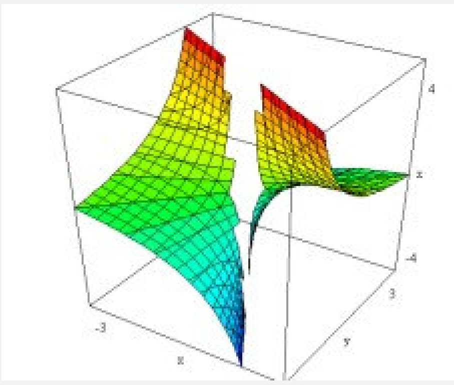


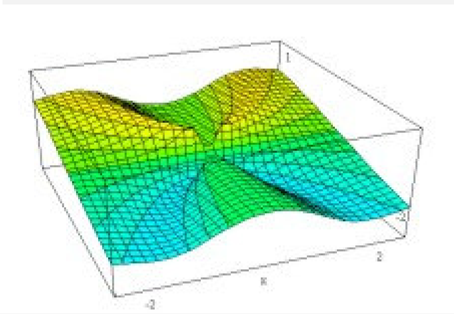
14 Estudiar el límite de la función $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2-4y^2}{2x^2+y^2}$ siguiendo la dirección: $\varphi\left(x\right)=x^3$.



15 Dadas las siguientes funciones

(a) $f\left(x,y\right)=\dfrac{x-y}{x+y}$ (b) $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$





Se pide:

- Estudiar los límites direccionales según las direcciones:

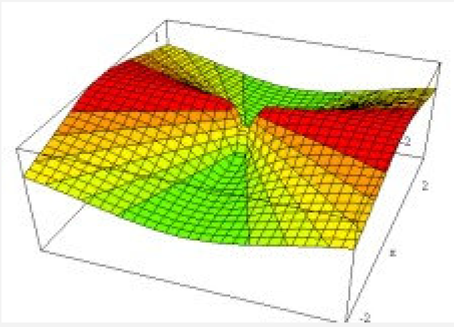
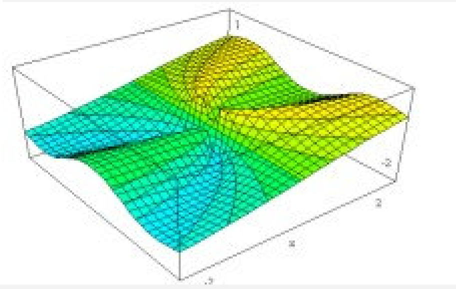
  (1) y=0 (2) x=0 (3) y=mx (4) $y=x^2$

- Estudiar la existencia del límite doble.

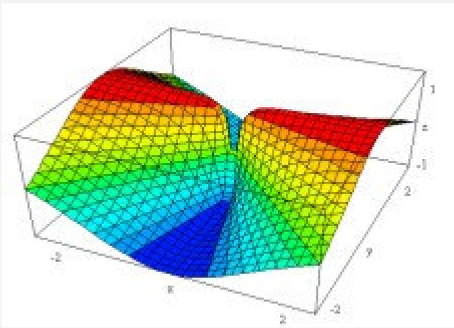
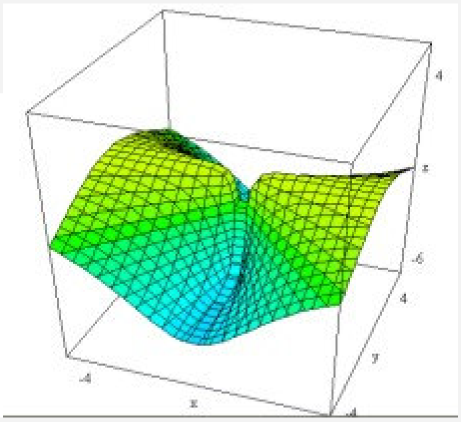
Solución : (a.1) 1 (a.2) -1 (a.3) $\dfrac{1-m}{1+m}$ (a.4) 1 (b.1) 0 (b.2) 0 (b.3) 0 (b.4) 1/2

16 Dadas las siguientes funciones

(a) $f\left(x,y\right)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ (b) $f\left(x,y\right)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

(c) $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ (d) $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^2-4y^2}{2x^2+y^2}$

Se pide:

(1) Estudiar los límites radiales, según las curvas $y=mx^a$

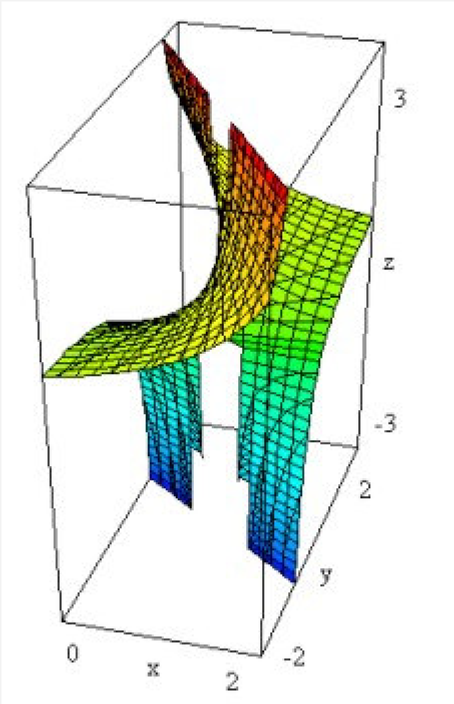
(2) Estudiar la existencia del límite doble.

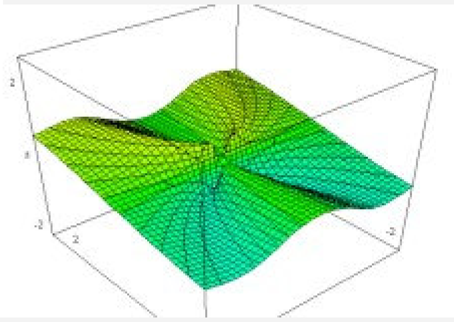
Solución.-

1. Ejercicio 4.2 (Colección Fundamentos Matemáticos)
2. Ejercicio 4.6 (Colección Fundamentos Matemáticos)
3. Ejemplo 4.5 (Colección Fundamentos Matemáticos)
4. No existe el límite doble.

17 Estudiar la existencia del siguiente límite:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x+y-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$





(c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

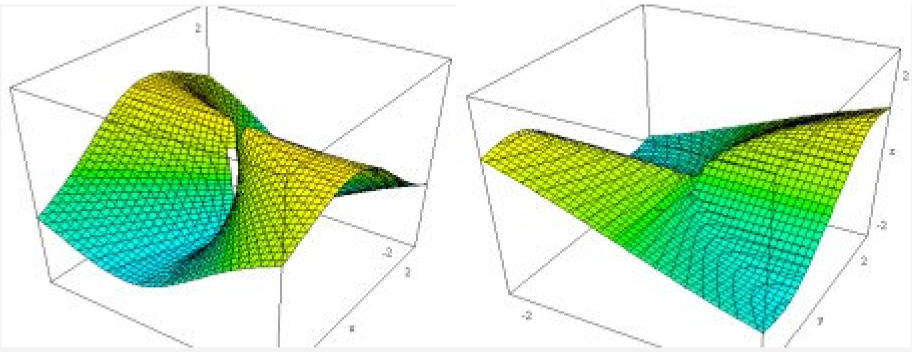
Solución: (a) No existe, por ejemplo el límite a lo largo de las rectas: $C_1 \equiv$ y=0, $C_2 \equiv$ x=1, son respectivamente 0 y 1.

(b) No existe, por ejemplo el límite a lo largo de la recta $C_1 \equiv$ y=x y de la curva $C_2 \equiv y = \sqrt{x}$, son respectivamente 0 y 1/2.

(c) El límite a lo largo de la curva $C_1 \equiv y = 0, z = 0$ vale 1, y a lo largo de la curva $C_2 \equiv x = 0, y = 0$ vale -1.

18 Dadas las siguientes funciones

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy - x^2 + y^2}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$



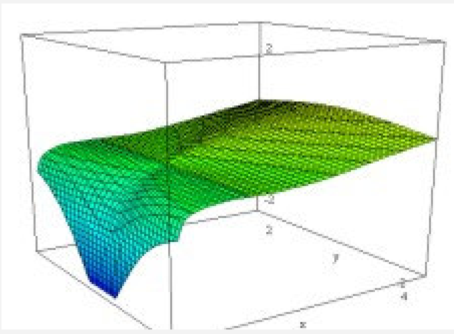
Se pide estudiar la existencia del límite doble en el origen.

Solución:

(a) No existe el límite doble.

(b) El límite existe y vale cero.

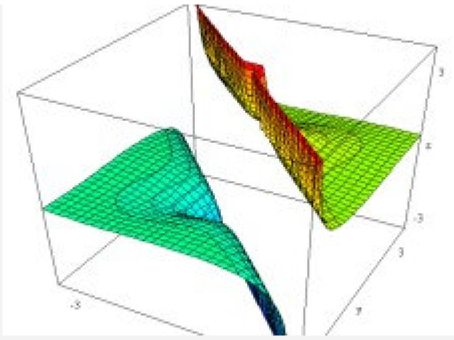
19 Calcular el límite de la función $f\left(x,y\right)=\dfrac{\left(x-1\right)^2\log x}{\left(x-1\right)^2+y^2}$ en el punto (1, 0).



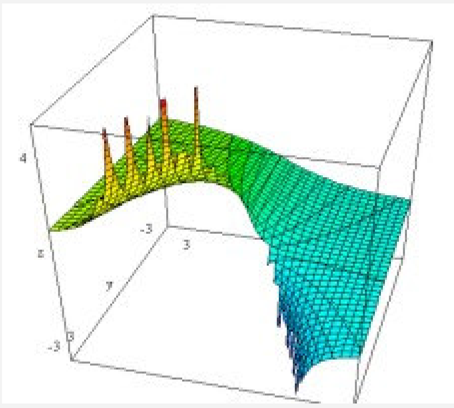
Solución: 0

20 Estudiar la continuidad de las funciones

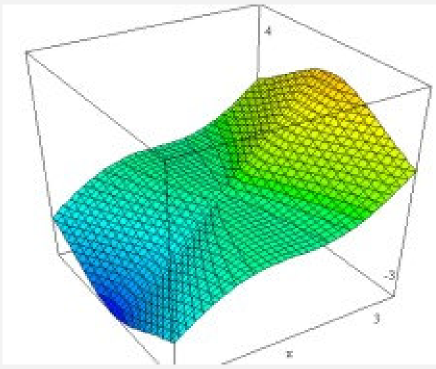
(a) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$



(b) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}}$



(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$



Solución.- Discontinuidad no evitable en los puntos $\left\{\left(a,-a\right)/\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

(b) Discontinua en los puntos $\left\{\left(a,a^2\right)/\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

(c) Es continua en $\mathbb{R}^2$

DERIVABILIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Para realizar estos ejercicios debes:

- Conocer el concepto de derivada direccional y su interpretación geométrica
- Conocer las técnicas de cálculo de derivadas parciales
- Conocer el concepto de diferenciabilidad y de diferencial y su interpretación geométrica
- Conocer cómo calcular la derivada direccional de una función diferenciable
- Saber calcular y deducir la ecuación del plano tangente
- Conocer la definición y las propiedades del gradiente

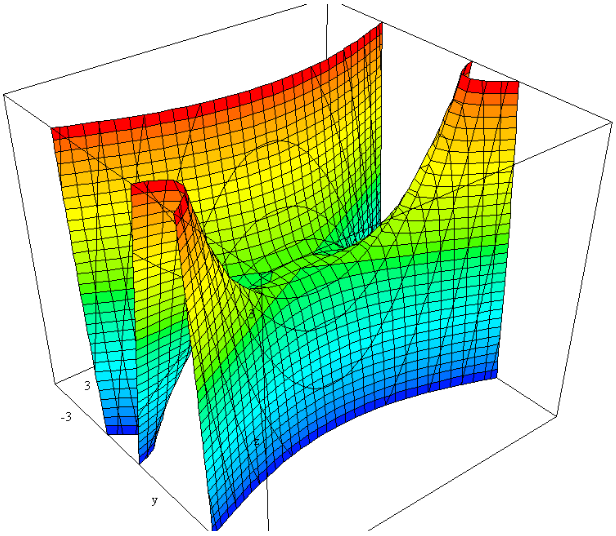
Derivada direccional

21 Se considera la función $f(x,y) = x^2y - 4y^3$. Calcular $D_{\vec{u}}f(2,1)$ en los dos casos siguientes:

a) $\vec{u} = (1,-2)$

b) $\vec{u}$ es el vector en la dirección que une los puntos (2,1) y (4,0)

Solución: (a) $\dfrac{20}{\sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{16}{\sqrt{5}}$



22 El precio de un piso P en función de la superficie S y de la calidad de los materiales C viene dado por una función $P(S,C)$. ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$? ¿Es razonable que $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$?

Solución:

Si $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$ significa que a mayor calidad de los materiales aumenta el precio de la vivienda. Parece razonable.

Si $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$ significaría que al aumentar la superficie del piso el precio disminuiría. Esto no parece lógico.

23 Se considera la función $f(x,y) = e^{xy} + \frac{x}{y} + sen\left((2x+3y)\pi\right)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_x(0,1)$, $f_y(2,-1)$, $f_{xx}(0,1)$, $f_{xy}(2,-1)$.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{1}{y} + 2\pi\cos\left((2x+3y)\pi\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - \frac{x}{y^2} + 3\pi\cos\left((2x+3y)\pi\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2e^{xy} - (2\pi)^2 sen\left((2x+3y)\pi\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} - \frac{1}{y^2} - 6\pi^2 sen\left((2x+3y)\pi\right)$$

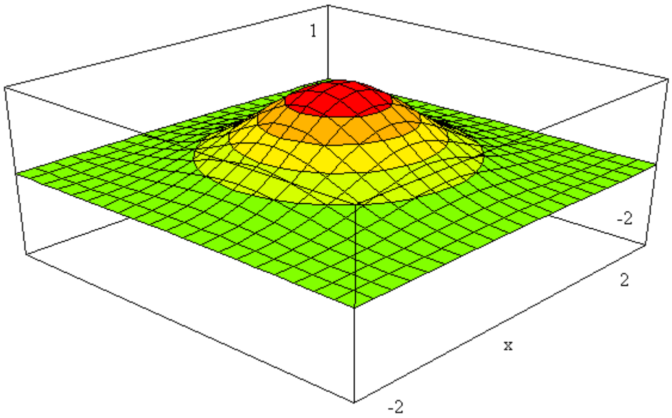
$$f_x(0,1) = 1 + 1 + 2\pi\cos(3\pi) = 2 - 2\pi$$

24 Se considera la función $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

(a) Encontrar todos los puntos en los que $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$

(b) Calcular $f_x(1,1)$ y $f_y(-1,1)$

Solución: (a) El punto (0,0) (b) $f_x(1,1) = -2e^{-2}$, $f_x(-1,1) = 2e^{-2}$



25	Se considera la función $f(x,y,z) = \sqrt{xy} + \log(x^2 z^3) - xtg(z)$. Se pide: calcular f_x , f_z , f_{xy} , f_{xyz}

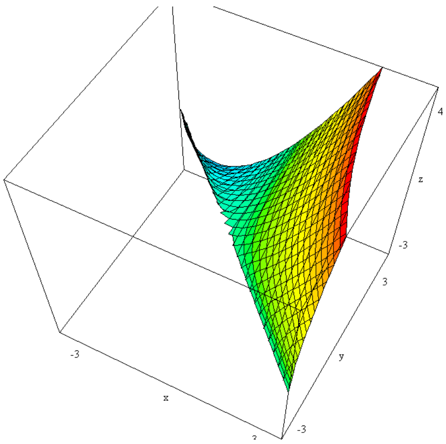
Solución: Solución: $f_x = \sqrt{y}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x} - tgz$ $\quad f_z = \dfrac{3}{z} - x\sec^2 z$ $\quad f_{xy} = \dfrac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y}}$ $\quad f_{xyz} = 0$

26	El volumen de un tronco de cono viene dado por la fórmula $V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$ (h es la altura, r el radio de la base menor y R el radio de la base mayor). Estudiar la variación de dicho volumen (razón de cambio) cuando se produce un incremento arbitrario (no simultáneo) de cada una de las variables. Analizar cuál es la forma más ventajosa de aumentar el volumen de un tronco de cono de dimensiones R=10, r=4 y h=6.

Sol.- La variable que produce un incremento más rápido del volumen, para los valores dados, es h por lo que la mejor opción será aumentar la altura del tronco del cono.

27	Hallar la pendiente de la recta que es paralela al plano XZ y tangente a la superficie $z = x\sqrt{x+y}$ en el punto P(1, 3,2).

Solución: $f_x(1,3) = \dfrac{9}{4}$



28 Hallar la pendiente de la recta que es paralela al plano XZ y tangente a la superficie $z = x\sqrt{x+y}$ en el punto P(1, 3,2).

Solución: $f_x\left(1,3\right) = \dfrac{9}{4}$

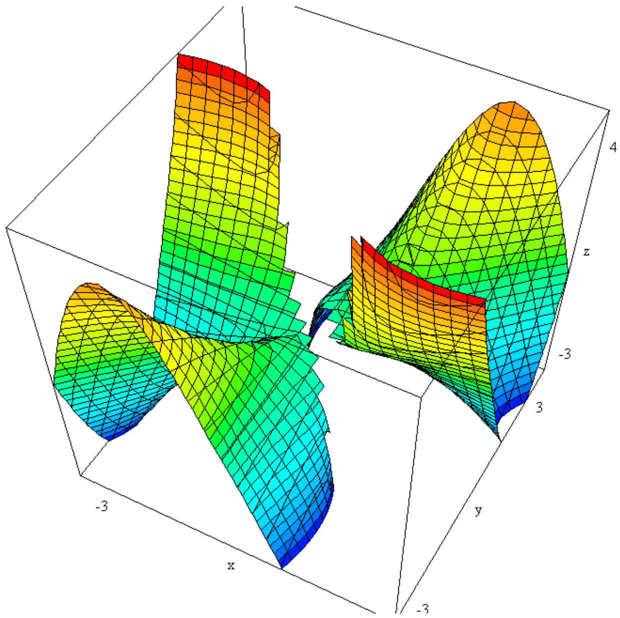
29 Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4 - x^4y}{x^3 + y^3} & x \neq -y \\ 0 & x = -y \end{cases}$$

a) Hallar $f_x\left(0,0\right)$ y $f_y\left(0,0\right)$

b) Calcule $f_x\left(x,y\right)$ y $f_y\left(x,y\right)$

c) Es $f_{xy}\left(0,0\right) = f_{yx}\left(0,0\right)$?



Solución: Ejercicio resuelto.

30 Comprobar que $T\left(x,t\right) = e^{-t}\cos\left(x / c\right)$ satisface la ecuación del calor: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = -c^2 \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

31 Comprobar que $f\left(x,y,z\right) = xyz + x^2y^3z^4$ cumple $f_{xyz} = f_{yzx} = f_{xyz}$

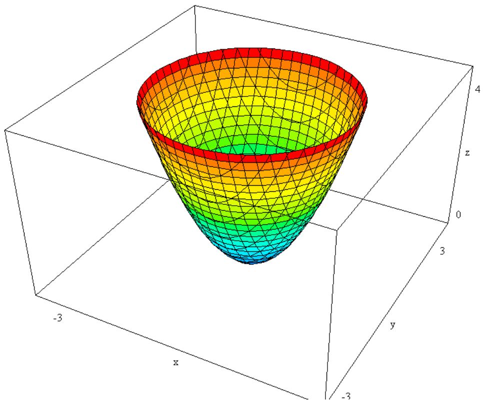
Diferenciabilidad

32 Se considera la función temperatura $T\left(x,y,z\right) = 85 + \left(1 - \dfrac{z}{100}\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ en grados.

1. Encontrar todos los puntos cuya temperatura es 90 grados.
2. ¿Es diferenciable en $\mathbb{R}^3$?

Solución: (a) $z = 100\left(1 - 5e^{x^2+y^2}\right)$ (b) Sí

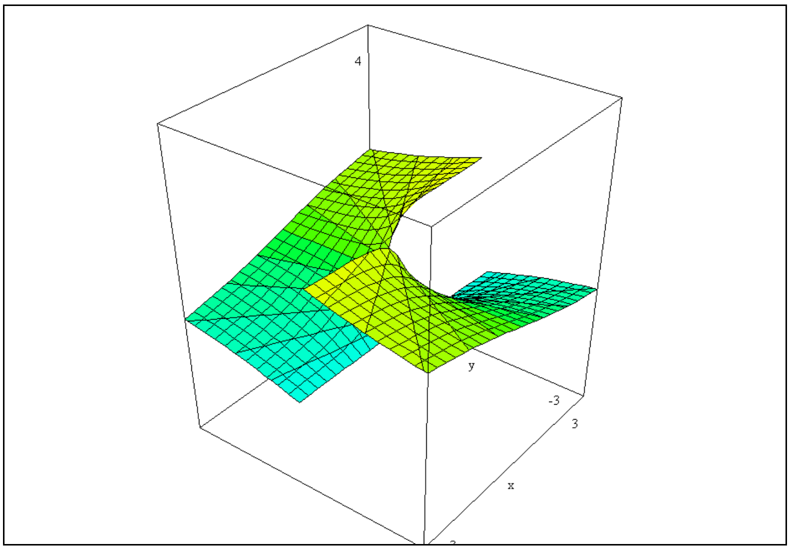
33 Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ pruebe que es diferenciable en (0,0)



Plano tangente. Aproximación por la diferenciabilidad

34 Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = arctg\left(y / x\right)$ en el punto de coordenadas $P\left(1, \sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

Sol.- $3\sqrt{3}x - 3y + 12z = 4\pi$



35 Aproximar, mediante la diferencial, el área de un rectángulo de dimensiones 35.02 por 24.97

Solución: 874.45. Ejercicio 5.22 (Colección Fundamentos Matemáticos)

36 Un cajón abierto tiene longitud 3 m, anchura 1 m, y altura 2m. Está construido con un material que cuesta 20€ por metro cuadrado y 30 € por metro cuadrado de fondo. Calcular el coste total del cajón y utilice incrementos para estimar la variación del coste cuando la longitud y anchura aumentan 3 cm y la altura decrece en 4 cm.

Solución: El coste total es: $C\left(x, y, z\right) = 30xy + 20\left(2xz + 2yz\right)$. El coste aumenta en 2 euros aproximadamente

37 Se mide el radio y la altura de un cono circular recto con errores, a lo más, 3% y 2% respectivamente. Utilice incrementos para aproximar el porcentaje máximo de error que se puede cometer al calcular el volumen del cono si se utilizan estas medidas (la fórmula es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)

Solución: El máximo porcentaje de error al calcular el volumen es de aproximadamente 8%.

38 Cuando se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, la resistencia total viene dada por

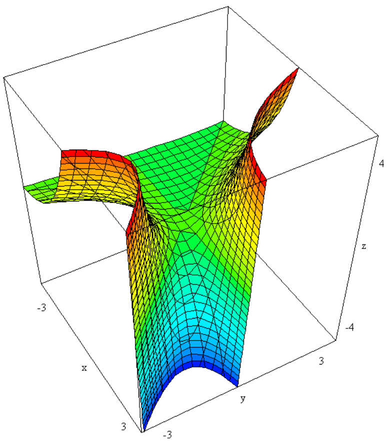
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Si la medida de R_1 es de 300 ohmios, con un error máximo del 2%, y la de R_2 es de 500 ohmios con un error máximo del 3%, hallar el valor máximo de R.

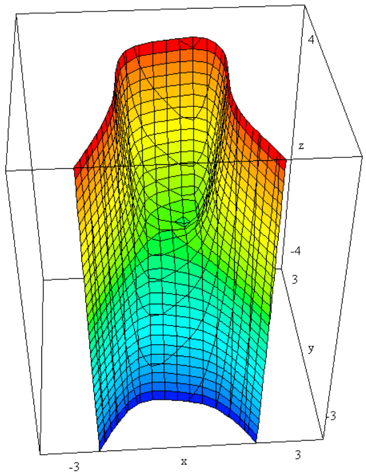
Solución: El máximo porcentaje es de aproximadamente el 2'4%.

Relación entre la diferenciabilidad y la derivada direccional

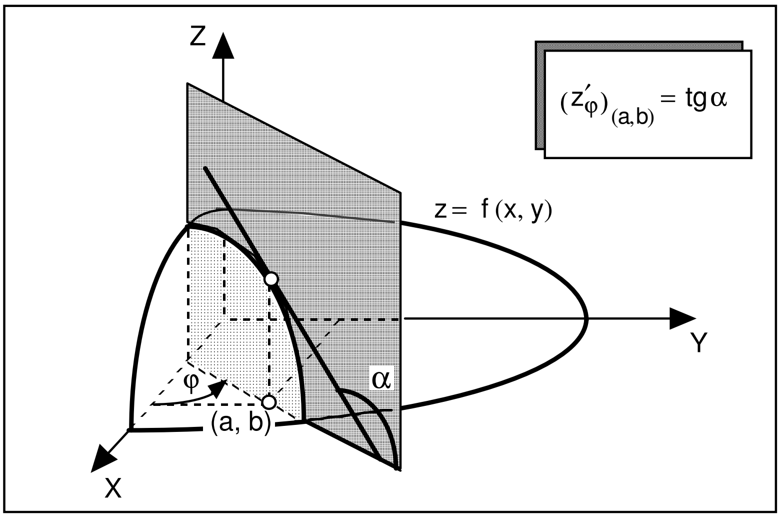
39 Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = e^{xy} arctg\left(x + y\right)$ en el punto (2,1), según el vector (1, -1)



40 Hallar la derivada direccional de $z = 3x^4 - xy + y^3$ en el punto $(1,2)$ siguiendo la dirección que forma con el eje X un ángulo de $60°$.



41 Se considera en el gráfico



- la función $z = f\left(x,y\right)$ definida por la ecuación $9 = y + x^2 + z^2$ con z>0
- $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$
- $\left(a,b\right) = \left(2,3\right)$

Calcular $tg\alpha$.

Solución: $tg\alpha = \dfrac{-4-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Ejercicio resuelto.

42 Se considera en el gráfico

De una función $z = f(x,y)$ diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ se sabe que el plano tangente a $f(x,y)$ en el punto (1, 2) es: $2x + 3y + 4z = 1$. ¿Se puede calcular con estos datos la derivada direccional de f en la dirección que une el punto (1, 2) con el punto (3,4)? Justificar la respuesta.

Solución: $D_u\left(f,(1,2)\right) = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right), u \right\rangle = \frac{-5\sqrt{2}}{8}$. Ejercicio resuelto.

43 Se considera $f(x,y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$. Se pide:

(a) Representa el dominio de la función $f(x,y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$

(b) Calcula de forma aproximada $f(5'1, 8'2)$ utilizando la diferencial

(c) Determina las curvas de nivel de $f(x,y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ y represéntalas

(d) ¿Es diferenciable la función $f(x,y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ en el punto (5, 8)?

(e) Calcula la derivada direccional de $f(x,y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ en el punto (5, 8) en cualquier dirección $\vec{u}$

(f) Demuestra que el vector gradiente a $f(x,y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ en un punto (a, b) de su dominio es ortogonal a la curva de nivel que pasa por (a, b)

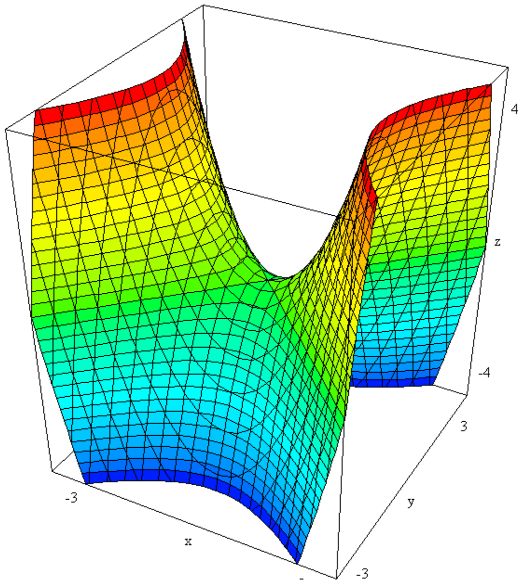
(g) Calcula la recta tangente a la curva intersección de la superficie definida por $f(x,y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ y el plano que es perpendicular a z=0 y contiene a la recta que pasa por (5, 8, 0) y tiene por vector director (1, 1). Justifica la respuesta.

(h) Calcula un vector normal al plano tangente a la superficie definida por $z = f(x,y) = \log\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ en el punto (5, 8, 0).

Gradiente

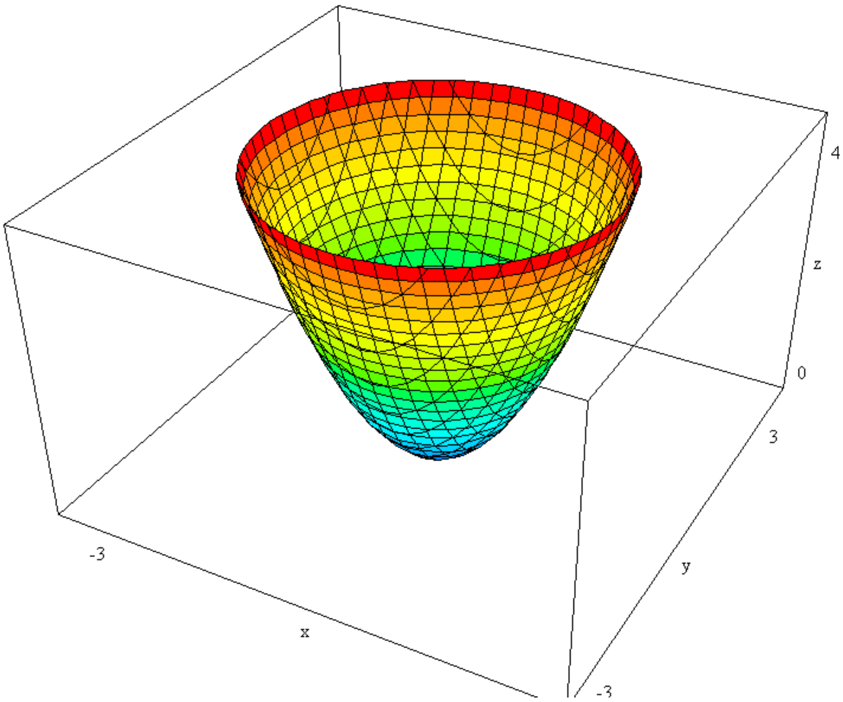
44 Dibujar la curva de nivel correspondiente a z=1 de la función $f\left(x,y\right)=x^2-y^2$ y calcule un vector normal a ella en el punto $P\left(2,\sqrt{3}\right)$.

Solución: El vector normal es $\nabla f\left(2,\sqrt{3}\right)=4\vec{i}-2\sqrt{3}\vec{j}$.



45 El conjunto de los puntos (x, y) con $0\le x\le 5$, $0\le y\le 5$ es un cuadrado colocado en el primer cuadrante del plano XY. Supongamos que se caliente ese cuadrado de tal manera que $T\left(x,y\right)=x^2+y^2$ es la temperatura en el punto P(x, y). ¿En qué sentido se establecerá el flujo de calor en el punto $P_o\left(2,5\right)$?

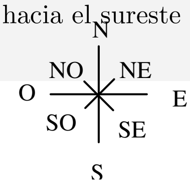
Indicación: El flujo de calor en la región está dado por una función vectorial $C\left(x,y\right)$ porque su valor en cada punto depende de las coordenadas de éste. Sabemos por física que $C\left(x,y\right)$ será perpendicular a las curvas isotermas $T\left(x,y\right)=c$ donde c es constante. El gradiente y todos sus múltiplos verifican esta condición. En esta situación nos dice la física que $C=-K\nabla T$ donde K es una constante positiva (llamada conductividad térmica). Nótese que la razón del signo negativo es que el calor fluye desde puntos de mayor temperatura a puntos de menor temperatura.



Solución: En el punto $P_o(2,5)$ el calor fluye en el sentido del vector $\vec{u} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$ Ejercicio resuelto.

46 Supongamos que estamos sobre el punto $P(-1, 5, 8)$ en una colina cuya ecuación es $z = 74 - x^2 - 7xy - 4y^2$. El eje Y señala hacia el norte y el eje X hacia el este, y las distancias se miden en metros.

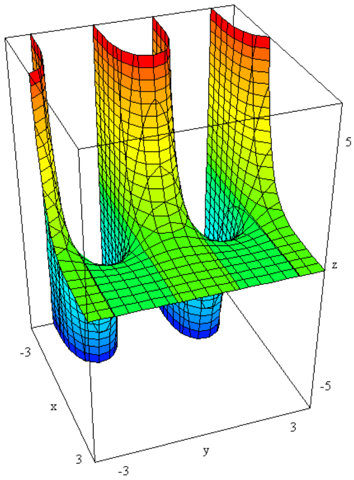
- (a) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el noroeste
- (b) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el suroeste
- (c) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el noreste
- (d) Para subir por la máxima pendiente desde el punto P me tengo que mover hacia el sureste



Solución (b). Ejercicio resuelto.

47 El potencial eléctrico de V voltios en cualquier punto (x, y) en el plano XY y $V = e^{-2x}\cos(2y)$. La distancia se mide en pies.

- Encontrar la rapidez de cambio del potencial en el punto $(0,\pi / 4)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \left(\dfrac{\pi}{6}\right)\vec{i} + sen\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\vec{j}$.
- Encontrar la dirección y la magnitud de la máxima rapidez de cambio de V en $(0,\pi/4)$.



48 La temperatura es T grados en cualquier punto (x,y,z) en el espacio IR^3 y $T = \dfrac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$. La distancia de mide en pulgadas.

- Encontrar la rapidez de cambio de la temperatura en el punto $(3,-2,2)$, en la dirección del vector $-2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$
- Encontrar la dirección y la magnitud de la máxima rapidez de cambio de T en $(3,-2,2)$

49 Una ecuación de una superficie es $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, donde la distancia se mide en metros, el eje X apunta al este y el eje Y apunta al norte. Un hombre esta en el punto correspondiente a $(-10,5,850)$.

a) ¿Cuál es la dirección de la ladera más pronunciada?

b) Si el hombre se mueve en la dirección del este, ¿esta descendiendo o ascendiendo? ¿cuál es su rapidez?

c) Si el hombre se mueve en la dirección suroeste ¿esta ascendiendo descendiendo? ¿cuál es su rapidez?

50 Supongamos que estamos sobre el punto $(-1,5,8)$ en una colina cuya ecuación es $z = 74 - x^2 - 7xy - 4y^2$. El eje Y señala hacia el norte y el eje X hacia el este, y las distancias se miden en metros.

a) Si nos movemos hacia el sur, ¿subimos o bajamos? ¿a qué velocidad?

b) Si nos movemos hacia el noreste, ¿Subimos o bajamos?, ¿a qué velocidad?

c) ¿En que dirección esta el descenso más escarpado?

Solución:

51 Hallar a y b para que la derivada direccional máxima de la función $e^{ax+by}\cos(x+y) - z = 0$ en el punto $(0,0)$ sea $3\sqrt{2}$ en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

Solución: $a = b = 3$. Ejercicio resuelto.

52 Determinar los valores de a, b, y c tales que la derivada direccional de $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en P(1, 2, -1) tenga un valor máximo igual a 64 en una dirección paralela a OZ.

Solución:

53 La derivada direccional de una función polinómica dada $f(x,y)$ en el punto $P_o(1,2)$ es $2\sqrt{2}$ en dirección hacia $P_1(2,3)$ y -3 en dirección hacia $P_2(1,0)$. Calcúlense $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $P_o(1,2)$, así como la derivada direccional de f en $P_o(1,2)$ en dirección hacia $P_3(4,6)$.

Solución:

REGLA DE LA CADENA. DERIVACIÓN IMPLÍCITA. EXTREMOS.

Para realizar estos ejercicios debes:

- Saber calcular la derivada parcial de una función
- Saber calcular la derivada de la función compuesta: Regla de la cadena
- Saber determinar si es posible la derivada de una función definida implícitamente y calcular el plano tangente en un punto a una superficie definida implícitamente.
- Obtener los extremos de una función de dos variables con y sin ligaduras.

Regla de la cadena

54 La temperatura de un punto (x,y) de una placa metálica es $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$, con T en ºC y (x,y) en metros. Una hormiga camina sobre la placa a lo largo de una circunferencia de radio 5 metros y centro el origen, con velocidad angular $\omega = 0.01$ rad/s. Calcular la velocidad con la que varía la temperatura en su recorrido cuando se encuentra en el punto de coordenadas (3, 4).

Solución: $\left.\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right|_{(3,4)} = -0.44^{\circ}\mathrm{C/s}$.

55 Un cilindro circular recto varía de tal manera que su radio r crece a la tasa de 3cm/minuto y su altura h decrece a la tasa de 5cm/minuto. ¿A qué tasa varía el volumen cuando el radio es de 10 cm y la altura de 8 cm?

Solución: $\left.\dfrac{dV}{dt}\right| = -20\pi \approx 62'8318$.

56 Sea $u = x^4y + y^2z^3 + \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ donde $\begin{cases} x = 1 + rse^t \\ y = rs^2e^{-t} \\ z = r^2s\ sent \end{cases}$

Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r=2,\ s=1,\ t=0$ sabiendo que $\varphi'\left(\dfrac{3}{2}\right)=-1$

Solución: $\dfrac{\partial u}{\partial s}=758$. Ejercicio resuelto.

57 Si $u=u(x,y)$ es una función con derivadas parciales primeras y segundas continuas se define la función laplaciana de u como: $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(a) Si $u(x,y)=f(r)$ con $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ expresar la laplaciana de u en función de r.

(b) Comprobar que la expresión de la laplaciana de u(x,y) en coordenadas polares ($x=r\cos\varphi,\ y=rsen\varphi$) es $\Delta u=u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$

58 Considerando $x=r\cos\varphi,\ y=rsen\varphi$ transformar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r\partial\varphi}$ utilizando coordenadas cartesianas, es decir, expresar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r\partial\varphi}$ en función de z , x e y y sus derivadas parciales.

Solución. $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\dfrac{\partial z}{\partial y}-y\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$. Ejercicio resuelto.

59 Dada $u=g(x,h(x,y)),\ y=f(t)$, calcular la razón de cambio (derivada) de u respecto de t.

Solución. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial m}\dfrac{\partial m}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$. Ejercicio resuelto.

60 Calcular el valor de $E=(y^2-xz)\omega_x'+(x^2-yz)\omega_y'+(z^2-xy)\omega_z'$ teniendo en cuenta que $\omega=\omega(u,v)$ y que $u=x^2+2yz$, $v=y^2+2xz$.

Solución. E=0.

61 Encontrar las funciones forma $g(a\,x+by)$, con a y b constantes reales y siendo g una función real

derivable infinitas veces que cumplen que su derivada segunda respecto a x mas su derivada segunda respecto a y es cero.

Solución. $g\left(a\,x+by\right)=A\left(ax+b\right)+C \qquad A,C\in\mathbb{R}$.

62 En los siguientes ejercicios, obtener las derivadas parciales usando la regla de la cadena.

a) $u=(yz)^{x}\,,\ x=e^{s+t}\,,\ y=s^{2}+3ts\,,\ z=sent\,,\ \dfrac{\partial u}{\partial s},\dfrac{\partial u}{\partial t}$

b) $u=x^{3}y\,,\ x^{5}+y=t\,,\ x^{2}+y^{3}=t^{2}\,,\ \dfrac{du}{dt}$

c) $x=a\cos\theta\cos\phi,\ \ y=b\cos\theta\cos\phi,\ \ z=csen\varphi\,,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

d) $z=\sqrt{\dfrac{1+u}{1+v}}\,,\ u=-\cos x\,,\ v=\cos y\,,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

63 En los siguientes ejercicios, suponer que w es una función de todas las otras variables. Hallar las derivadas indicadas en cada caso.

a) $3x^{2}+2y^{2}+6w^{2}-x+y=12;\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}$

b) $x^{2}-2xy+2xw+3y^{2}+w^{3}=21;\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial^{2}w}{\partial x\partial y}$

c) $w-e^{wsen(y/z)}=1;\dfrac{\partial w}{\partial z},\dfrac{\partial w}{\partial y}$

64 Sea $z=f\left(x,y\right)$ donde $x=at\,,\ y=bt\,,$ con a y b constantes. Suponiendo que se verifican todas las condiciones de diferenciabilidad, calcular $\dfrac{d^{2}z}{dt^{2}}$ en función de las derivadas parciales de z.

Solución: $\dfrac{d^{2}z}{dt^{2}}=a^{2}\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+2ab\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x\partial y}+b^{2}\dfrac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}$

65 Sea $w = 4x + y^2 + z^3$ donde $x = e^{rs^2}$, $y = \log\left(\frac{r+s}{t}\right), z = rst^2$. Calcular $\frac{\partial w}{\partial s}$.

Solución: $\frac{\partial w}{\partial s} = 8rse^{rs^2} + \frac{2}{r+s}\log\left(\frac{r+s}{t}\right) + 3r^3s^2t^6$

66 La temperatura de una placa viene dada por $T(x,y) = \frac{1-y}{1+x^2y^2}$

(a) ¿En qué dirección tendríamos que desplazarnos desde el punto (1,1) para que la temperatura decrezca lo más rápidamente posible? Justificar la respuesta.

(b) ¿En qué dirección desde el mismo punto la variación de la temperatura es ¼? Justificar la respuesta.

(c) Dada la curva en paramétricas $\varphi(t) = (\cos t, 1 + sen t)$ calcular el vector tangente a la curva en t=0.

(d) Calcular $(T \circ \varphi)'(0)$. ¿Qué representa dicho valor?

Solución:. Ejercicio resuelto.

67 Mediante distintos experimentos se ha podido comprobar que una magnitud ondulatoria como la luz verifica la siguiente ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Probar que la siguiente función es solución de la ecuación de onda: $w = tg(2x - 2ct)$.

68 Suponiendo que la función dada por $z=f(x, y)$ y sus derivadas parciales de primer orden son diferenciables en todo punto del plano (x, y) se pide transformar la ecuación:

$$a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad con \quad a \neq 0$$

mediante el cambio de variables $u = a\,x + y \quad v = a\,x - y$

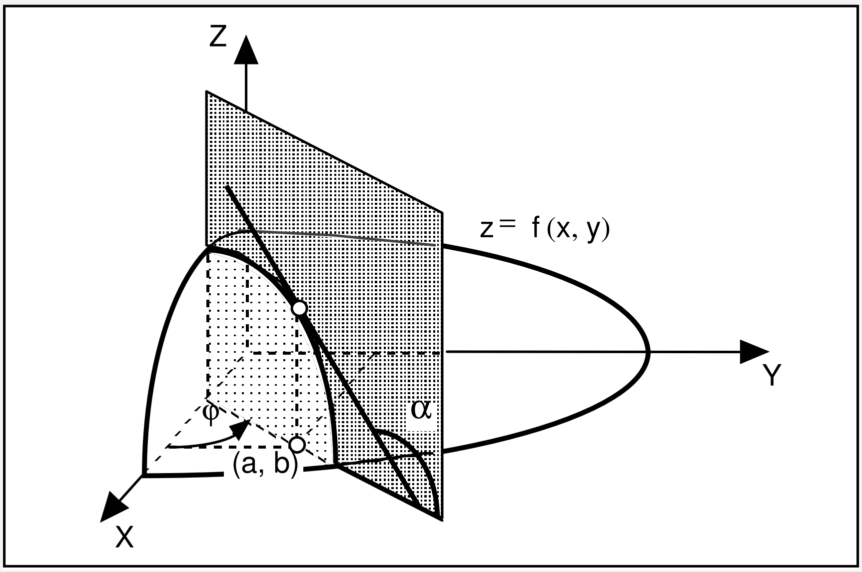
69 Si $z = f(x,y)$ y $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ calcula la expresión de $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ mediante las derivadas parciales de z respecto de "x" e "y" y respecto de "u" y "v".

70 (a) Se considera $z = g\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ siendo g una función derivable de cualquier orden. Se hace el cambio de variable a coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,sen\varphi \end{cases}$. Expresa la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $z = g\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ en las nuevas coordenadas.

(B) Se considera $z = g\left(\frac{x+1}{y-2}\right)$ siendo g una función derivable de cualquier orden. Calcula $E = z_{xx} + z_{xy}$.

Derivación implícita

71 Se considera en el gráfico



- la función $z = f(x,y)$ definida por la ecuación $9 = y + x^2 + z^2$ con z>0
- $\varphi = \frac{\pi}{3}$
- $(a,b) = (2,3)$

Calcular $tg\alpha$

Solución. Ejercicio resuelto.

72 Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en la superficie definida de forma implícita: $xy^2 + z^3 + sen\left(xyz\right) = 0$

Solución: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y^2 + \left(yz\right)\cos\left(xyz\right)}{3z^2 + \left(xy\right)\cos\left(xyz\right)}$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2xy + \left(xz\right)\cos\left(xyz\right)}{3z^2 + \left(xy\right)\cos\left(xyz\right)}$

73 Considera la intersección de los dos planos siguientes: $\pi_1 \equiv x + y + z = 2$, $\pi_2 \equiv x - y + 3z = 1$

(a) En este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas ¿se puede considerar que z e y son función de x? ¿por qué?. Si es así, obtén dicha expresión.

(b) ¿Cuál es el vector director de la recta intersección de los dos planos? Calcula la expresión vectorial y paramétrica de la recta definida por las ecuaciones:

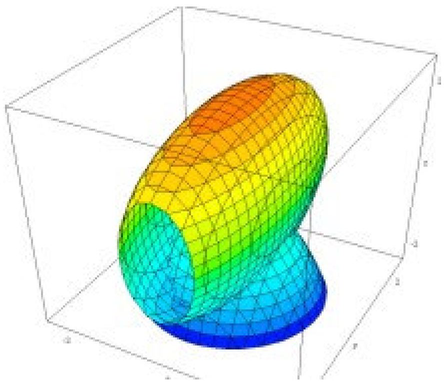
$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + 3z = 1 \end{array}\right\}$$

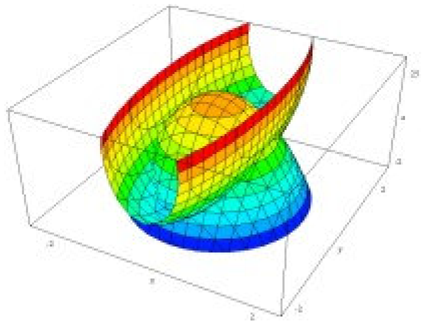
74 Se considera ahora la curva intersección de la superficie $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 45$ y de $x^2 + y^2 + z = 0$ .Comprueba que un punto de la curva es $\left(1, 0, -1\right)$.

¿Cuánto valdrá la pendiente de la recta tangente a esa curva en el punto P suponiendo que el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} 36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 45 \\ x^2 + y^2 + z = 0 \end{array}\right\}$$

define a $x = x\left(y\right)$, $z = z\left(y\right)$?





75 Supongamos que el sistema $\begin{cases} xu + yv - uv = 0 \\ yu - xv + uv = 0 \end{cases}$

define a u y v como funciones: $u = u\left(x,y\right)$, $v = v\left(x,y\right)$ de x e y. Utilizando derivación implícita calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

76 Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal al cono $z^2 = x^2 + y^2$ en el punto donde x=3, y=4 y z>0.

Solución: Ejercicio resuelto.

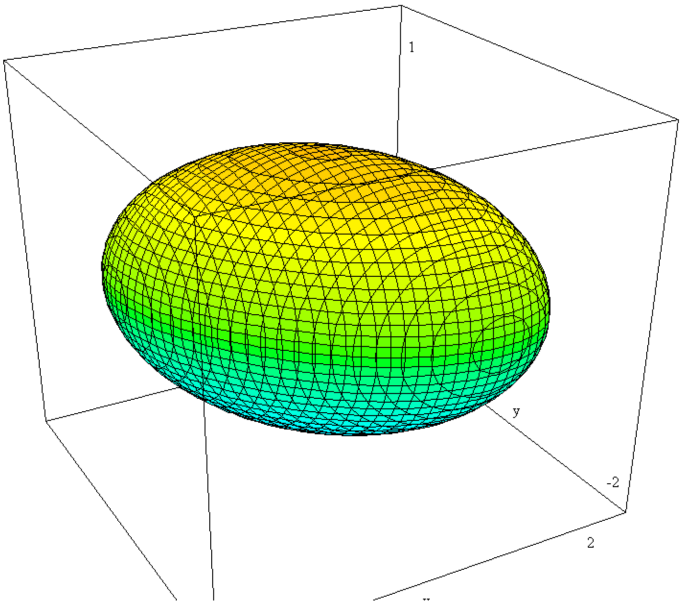
77 Dada $F\left(x,y,z\right) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2z - 1$, se pide:

A) determinar si $F\left(x,y,z\right) = 0$ define en el punto P (0,-1,0) a z como función implícita de x e y, es decir, z = f(x, y).

B) Encontrar las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función z=f(x,y) en el punto (0,-1).

C) Hallar en (0,-1) el valor de dz y d^2z cuando dx = dy = 0.2.

Solución: Ejercicio resuelto.

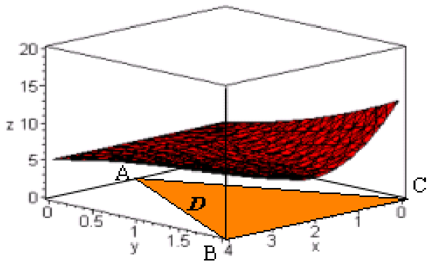


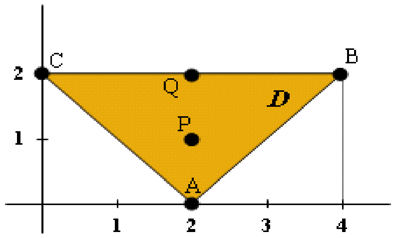
EXTREMOS

78 Calcular los extremos relativos de $f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$

79 Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2y + y^2 - 4xy + 2y + 5$ en el dominio D dado por el triángulo de vértices A(2,0), B(4,2) y C(0,2)

Solución: La función toma como valor mínimo absoluto 4 (en P(2,1)) y como valor máximo absoluto 13 (en B(4,2) y en C(0,2))

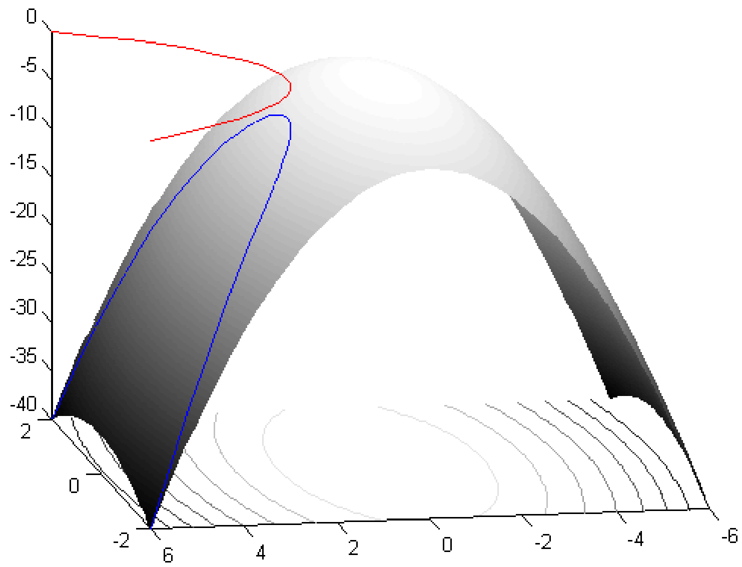




Candidatos a extremo absoluto: $P(2,1)$ $Q(2,2)$ $C(0,2)$ $B(4,2)$ $A(2,0)$

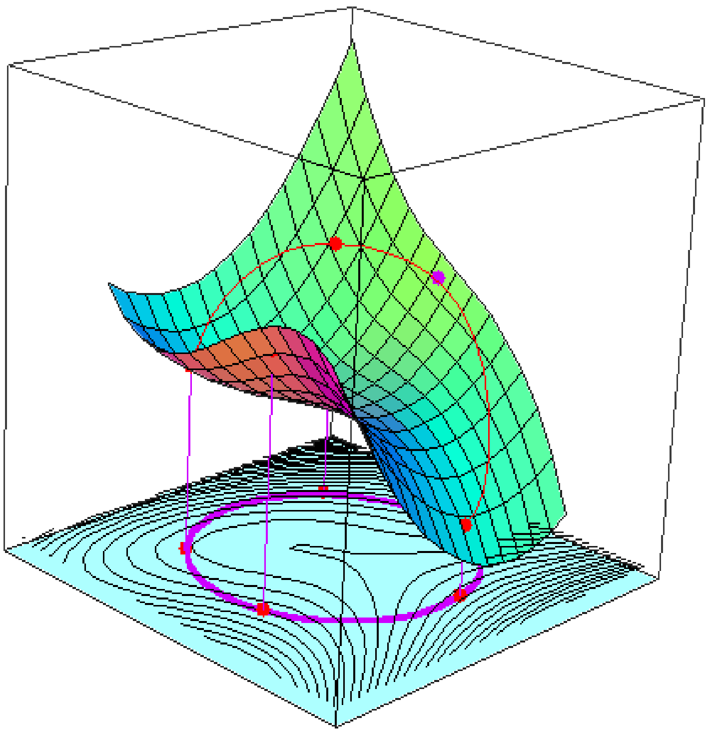
$$f(P) = f(2,1) = 4 \quad f(Q) = f(2,2) = 5 \quad f(A) = f(2,0) = 5 \quad f(B) = f(4,2) = 13 \quad f(C) = f(0,2) = 13$$

80 Calcular los máximos y mínimos de la función: $f(x,y) = -x^2 - y^2$ cuando los puntos (x,y) verifican $\varphi(x,y) = x^2 + 2 = 0$.



En rojo aparece representado los puntos $\varphi(x,y) = x^2 + y = 0$ y en azul la curva imagen

81 Calcular los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^3 - xy + y^2 + 3$ sometida a la condición de que los puntos (x, y) satisfagan la ecuación de la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$.



82 Se desea construir una caja de forma que el perímetro de la base más la altura sea de 84 cm. ¿Cuál serán las dimensiones de la caja de mayor volumen?

Solución: El punto que hace el volumen máximo con la restricción dada es (14,14,28)

MATLAB

Para generar una malla de puntos en los que evaluar una función de dos variables.

```
meshgrid(x,y)
meshgrid(x)                    %Es equivalente a meshgrid(x,x)
```

Ejemplo.-

```
%Para evaluar la función f(x,y)=x^2*y en el dominio −2<x<2,
% -3<y<3
>>[X, Y]=meshgrid(-2:.2:2,-3:0.5:3);
>>Z=X.^2.* Y
```

Gráficos tridimensionales.

plot3(X,Y,Z,S)

Dibuja el conjunto de puntos (X,Y,Z) donde X, Y y Z son vectores fila y S son las opciones de dibujo.

plot3(X1,Y1,Z1,S1,X2,Y2,Z2,S2,...)

Dibuja sobre los mismos ejes los gráficos definidos por las tripletas (Xi,Yi,Zi) con las opciones de dibujo por Si.

Ejemplo.-

```
%Para evaluar la función f(x,y)=x^2*y en el dominio –2<x<2,
%  -3<y<3
>>[X, Y]=meshgrid(-2:.2:2,-3:0.5:3)
>>Z=X.^2.*Y
>>plot3(X,Y,Z)
```

Gráficos de superficie.

surf(X,Y,Z,C)

Representa el gráfico de superficie de la función z=f(x,y) con los colores especificados en C (este último parámetro se puede ignorar).

surfc(X,Y,Z,C)

Representa el gráfico de superficie de la función z=f(x,y) junto con el gráfico de contorno correspondiente (curvas de nivel)

Ejemplo.-

```
>>%Para evaluar la función f(x,y)=x^2*y en el dominio –2<x<2,
>> %  -3<y<3
```

```
>>[X, Y]=meshgrid(-2:.2:2,-3:0.5:3);
>>Z=X.^2.*Y;
>>figure(1)
>>surf(X,Y,Z)
>>figure(2)
>>surfc(X,Y,Z)
```

Gráficos de malla.

mesh(X,Y,Z,C)

Representa el gráfico de malla de la función z=f(x,y) con los colores especificados en C (este último parámetro se puede ignorar).

meshc(X,Y,Z,C)

Representa el gráfico de malla de la función z=f(x,y) junto con el gráfico de contorno correspondiente (curvas de nivel)

meshz(X,Y,Z,C)

Representa el gráfico de malla de la función z=f(x,y) junto con una especie de cortina en la parte inferior.

Ejemplo.-

```
>>%Para evaluar la función f(x,y)=x^2*y en el dominio –2<x<2
>>% -3<y<3
>>[X, Y]=meshgrid(-2:.2:2,-3:0.5:3);
>>Z=X.^2.*Y;
>>figure(1)
>>mesh(X,Y,Z)
>>figure(2)
>>meshc(X,Y,Z)
```

```
>>figure(3)
>>meshz(X,Y,Z)
```

Gráficos de contorno (curvas de nivel).

contour(Z,n)

Representa el gráfico de contorno para la matriz Z usando n líneas. El segundo parámetro es opcional.

contour3(Z,n)

Representa el gráfico de contorno en tres dimensiones para la matriz Z usando n líneas. El segundo parámetro es opcional.

Ejemplo.-

```
>>%Para evaluar la función f(x,y)=x^2+y^2 en el dominio
>>  -2<x<2, -3<y<3
>>[X, Y]=meshgrid(-2:.2:2,-3:0.2:3);
>>Z=X.^2.+Y.^2;
>>figure(1)
>>contour(Z)
>>figure(2)
>>contour3(Z)
```

Gráficos de densidad

pcolor(X,Y,Z)

Representa el gráfico de contorno para la matriz (X,Y,Z) utilizando densidades de colores.

Ejemplo.-

```
>>%Para evaluar la función f(x,y)=x^2+y^2 en el dominio
>>%-2<x<2, -3<y<3
>>[X, Y]=meshgrid(-2:.2:2,-3:0.2:3);
```

```
>>Z=X.^2.+Y.^2;
>>pcolor(X,Y,Z)
```

Representación

view([x,y,z])

Sitúa el punto de vista de la figura en el indicado por las coordenadas (x,y,z).

ginput

Nos devuelve las coordenadas (x, y) del punto una vez seleccionado en la gráfica.

Para calcular los límites iterados de una función de dos variables en el punto (a, b)

Ejemplo.-

```
>>syms x y
>>f=x^2+y^2
>>limit(limit(f,x,a),y,b)
>>limit(limit(f,y,b),x,a)
```

Para calcular el límite de una función según una dirección x=g(t), y=h(t) cuando t tiende a cero.

Ejemplo.-

```
>>syms x y t
>>f=x^2+y^2;
>>nf=subs(f,{x,y},{g(t),h(t)})
>>limit(nf,t,0)
```

Para calcular el límite de una función en coordenadas polares cuando nos aproximamos al punto (a, b)

Ejemplo.-

```
>>syms x y
>>f=x^2+y^2;
>>syms r theta
>>polar=subs(f,{x,y},{a+r*cos(theta),b+r*sin(theta)})
>>limit(polar,r,0)
```