Extremos condicionados

En el siguiente ejercicio vamos a hallar el valor máximo o mínimo de una función sometida a una restricción.

El método sobre el que vamos a trabajar es debido a uno de los matemáticos más grandes del siglo XVIII, Joseph Lagrange. El desarrolló este método en un artículo de mecánica cuando tenía 19 años.

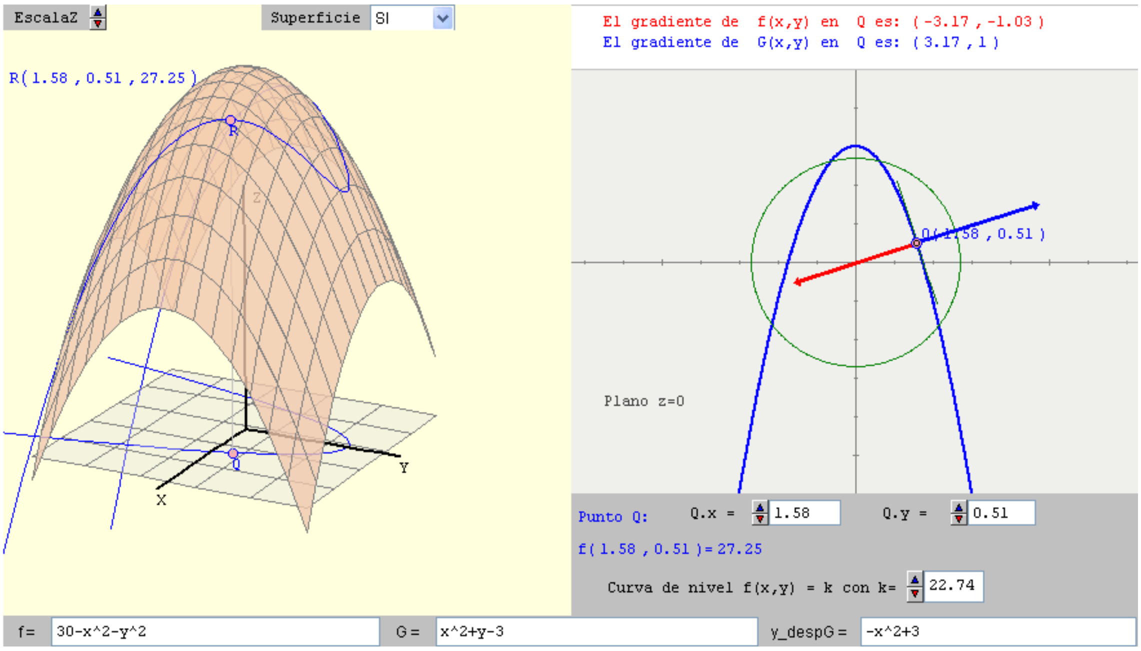
Consideremos la función $f(x,y)$ y queremos calcular los máximos y mínimos suponiendo que los puntos (x,y) están ligados mediante la condición $g(x,y)=s$. Supongamos además que las funciones f y g son diferenciables.

Lagrange demostró que si f tiene un extremo (máximo o mínimo) sujeto a la restricción $g(x,y)=s$ en el punto (x_o,y_o) y las parciales de g en (x_o,y_o) no son nulas, entonces existe un escalar λ de manera que se cumple:

$$\begin{gathered} f_x(x_o,y_o)=\lambda g_x(x_o,y_o) \\ f_y(x_o,y_o)=\lambda g_y(x_o,y_o) \\ g(x_o,y_o)=s \end{gathered}$$

Este resultado se conoce con el nombre de TEOREMA DE LAGRANGE y el número λ se le conoce con el nombre de *multiplicador de Lagrange*.

Laboratorio: Extremos Lagrange 1



Ejemplo 1: Consideremos $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ suponiendo que (x, y) deben cumplir la condición $x + y = 3$. Calcularemos el valor máximo de f suponiendo esta restricción.

1 FORMA 1:

✎ Dado que $x + y = 3$, la función que debemos optimizar es $z = f(x, 3-x) = 9 - x^2 - (3-x)^2 = -2x^2 + 6x$. ¿Cuál es el valor de x que hace a z máximo?

✎ ¿Cuál es el valor de (x,y) cumpliendo $x + y = 3$ que hace $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ máximo?

FORMA 2:

Sitúate en el applet Multiplicadores de Lagrange

Introduce los siguientes valores:

- f : 9-x^2-y^2 (f es la expresión de $f(x,y)$)
- G: x+y-3 (G debes escribir $g(x,y)-s$)

Observa que:

1. en la parte derecha del applet se representa el plano z=0. En él se muestra en azul la curva restricción: $g(x,y)=s$, en nuestro caso, $x+y-3=0$.
2. según el Teorema de Lagrante, el valor máximo de f se alcanza en un punto (x_o, y_o) en el que se debe cumplir que:

$$\nabla f(x_o, y_o) = \lambda \nabla g(x_o, y_o)$$

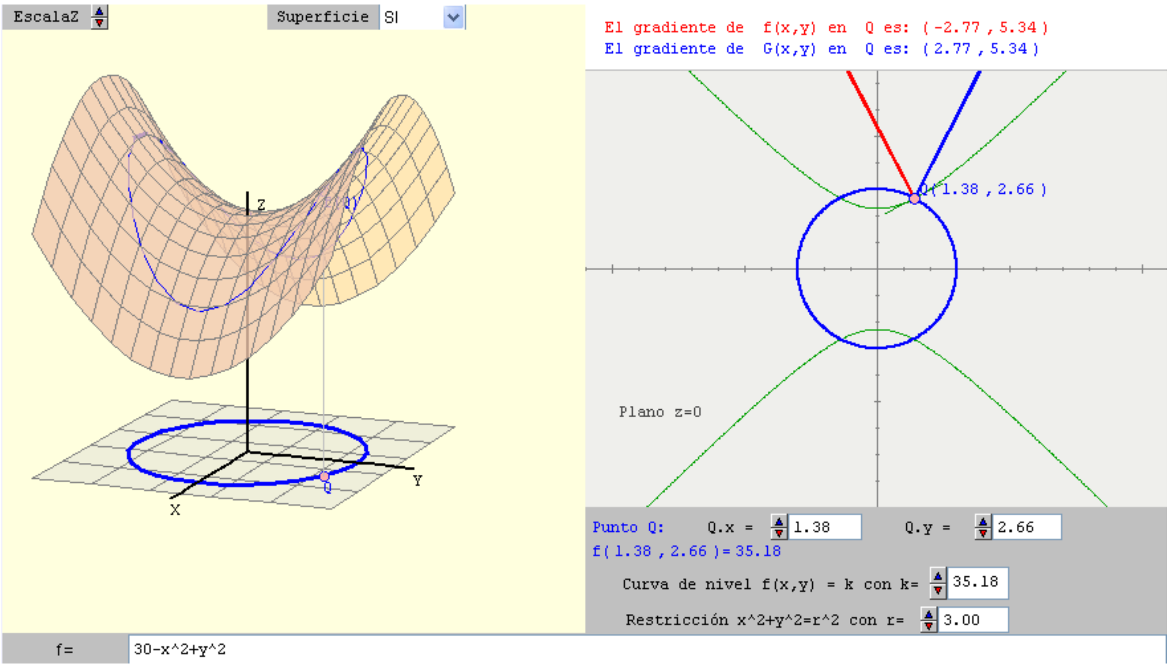
Para encontrar estos puntos gráficamente haz lo siguiente:

1. Mueve el punto Q por los puntos de la condición $g(x,y)=0$ (curva verde de la derecha del applet)
2. Busca las coordenadas del punto en el que el vector $\nabla f(x_o, y_o)$ (vector rojo) es proporcional a $\nabla g(x_o, y_o)$ (vector azul)

Anota estas coordenadas porque este punto puede ser el máximo o mínimo de $f(x,y)=9-x^2-y^2$ condicionado a $x+y-3=0$.

¿Cómo saber si es máximo o mínimo? Basta comparar con otro punto sobre la restricción.

Laboratorio: Extremos Lagrange 2



Introduce:

- f: 30-x^2+y^2
- r: 3

Ejemplo 2: Consideremos $z = f(x, y) = 30 - x^2 + y^2$ suponiendo que (x, y) deben cumplir la condición $x^2 + y^2 = 9$. Calcularemos los valores extremos de f suponiendo esta restricción.

2 Mueve el punto de la parte derecha del applet por la curva restricción y encuentra las coordenadas de los puntos que podrían ser los máximos o mínimos de esta función sometida a la restricción $x^2 + y^2 = 9$.

Realiza después los cálculos a mano para ver si obtienes los mismos valores que has obtenido gráficamente.

Extremos absolutos en conjuntos cerrados y acotados

Ejemplo 3: Consideremos $z = f(x, y) = x + y$ y calculemos los máximos y mínimos en la región $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ que es cerrada y acotada.

Como la función es diferenciable lo que haremos será:

- buscar los puntos del interior de D que tienen plano tangente horizontal
- ver si hay además hay algún extremo relativo en la frontera de D
- De entre todos estos puntos elegiremos como máximo absoluto en D el que tome el valor más grande de f y como mínimo absoluto en D el que tome el valor más pequeño.

3 ✎ Haz una representación gráfica de la función y de la región D.

Abre el fichero Ejercicio3.dpg con el programa DPGraph para observar la superficie en el recinto D. En el gráfico que se muestra se ha representado la gráfica de f, el plano z=0 y el cilindro de sección horizontal D.

✎ Calcula los puntos dentro de D que tienen plano tangente horizontal.

¿Cómo puedes saber si estos puntos son máximos o mínimos?

✎ Considera ahora la frontera de D que está formada por:

$$\{(x,0)\,/\,-1\le x\le 1\}\cup\left\{\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)/-1\le x\le 1\right\}$$

- En el segmento $\{(x,0)\,/\,-1\le x\le 1\}$ la función es $z=f(x,0)=x$ que alcanza el valor máximo en x=1 y el valor mínimo en x=-1. Observa gráficamente este hecho en el fichero ejercicio3.dpg

- En el arco de circunferencia $\left\{\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)/-1\le x\le 1\right\}$ la función es $z=f\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)=x+\sqrt{1-x^2}$. Deriva esta expresión respecto de x para obtener en el intervalo $-1\le x\le 1$ los valores máximos y mínimos de z.

Con todos los valores que hayas obtenido rellena la siguiente tabla:

Posibles extremos absolutos	Valor de la función

Conclusión: El máximo absoluto es:
El mínimo absoluto es: