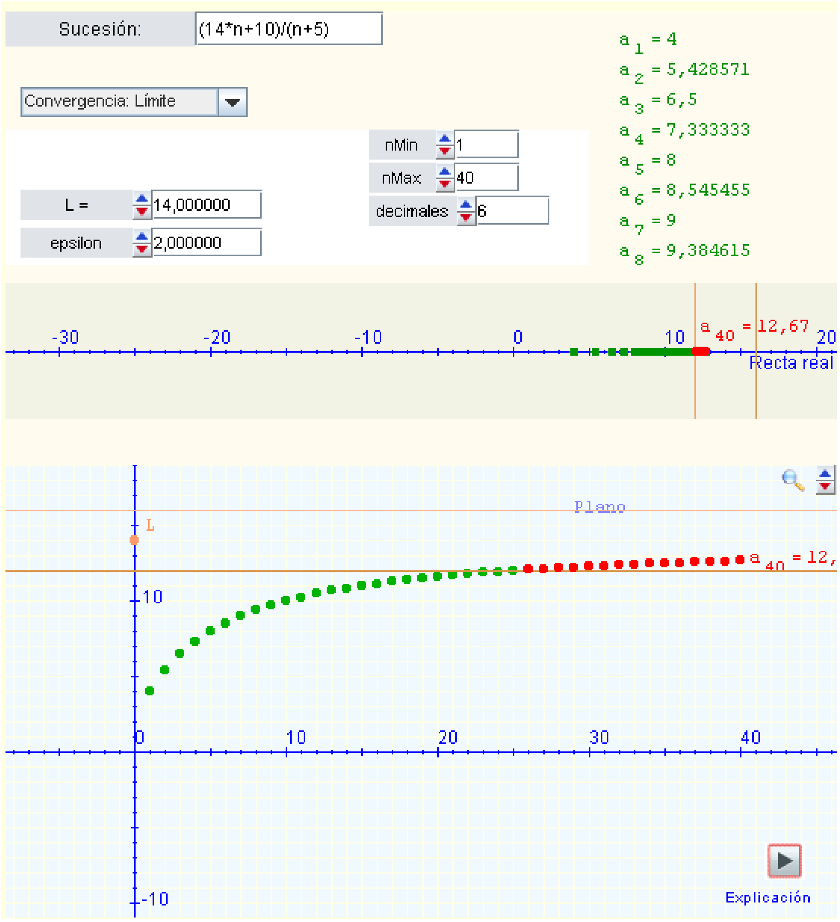
Pulsar sobre el laboratorio “Límite de sucesiones”



Recuerda:

(a) Para estudiar una sucesión no basta con estudiar el comportamiento de los primeros términos.

(b) Para estudiar la monotonía y acotación de una sucesión a_n se puede considerar la función $f(x)$ cumpliendo $a_n = f(n)$ y particularizar los resultados en el caso de que se considere el dominio de la función únicamente el conjunto de los números naturales.

RELACIÓN ENTRE CONVERGENCIA Y ACOTACIÓN

1 Considera la sucesión $a_n = \frac{3n+10}{n+5} + \left(\frac{4n - n(-1)^n}{n+1}\right)$

(a) En el laboratorio observa la representación de la sucesión, debes introducir: (3*n+10)/(n+5)+(4*n-n*(-1)^n)/(n+1)

(b) ¿Qué ocurre a la sucesión de los términos pares (es decir la sucesión $b_n = a_{2n}$) y a la sucesión de los términos impares $c_n = a_{2n-1}$?

(c) ¿Es convergente la sucesión a_n?

(d) ¿Está acotada la sucesión a_n? En caso afirmativo da una cota superior y una inferior.

IMPORTANTE: Una sucesión puede ser no convergente y acotada.

2 (a) Puedes dar otro ejemplo de una sucesión convergente y no acotada.

(b) Si una sucesión es convergente ¿estará acotada? Justifica la respuesta.

RELACIÓN ENTRE MONOTONÍA Y CONVERGENCIA

3 Considera la sucesión $a_n = 3 + 2 * \dfrac{sen(n)}{n}$.

(a) Represéntala con ayuda del Laboratorio. Debes escribir: 3+2*sin(n)/n

(b) ¿Es monótona? Justifica la respuesta.

(c) ¿Es acotada? Justifica la respuesta.

(d) Calcula a mano el número n_0 de manera que se pueda asegurar que $a_n \in (3 - epsilon, 3 + epsilon)$ siempre que $n > n_0$ para valores de epsilon de la tabla:

epsilon	n_0
10^{-1}	
10^{-2}	

Comprueba los valores obtenidos en el laboratorio.

(e) ¿Es convergente? En caso afirmativo utiliza la definición de límite para demostrar su convergencia.

IMPORTANTE: No toda sucesión convergente es monótona

TEOREMA DE WEIERSTRASS: Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Si es creciente converge a su supremo y si es decreciente a su ínfimo.

4 **NÚMERO e:** Como consecuencia de este teorema se puede definir el número e como el límite de la sucesión monótona y acotada $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2'7182828$$

- Puedes probarse que también $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ con tal de que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Rellena con ayuda del laboratorio la siguiente tabla en la que se han considerado distintas sucesiones a_n

a_n	$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$	Término	Término
n^2	$b_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$	$b_{10} =$	$b_{100} =$
$\sqrt{n}$	$c_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$	$c_{10} =$	$c_{100} =$
$\log(n)$	$d_n = \left(1+\frac{1}{\log(n)}\right)^{\log(n)}$	$d_{10} =$	$d_{100} =$

Observa que las tres sucesiones $b_n, c_n, d_n,$ convergen al número e sin embargo la "velocidad de convergencia" (la rapidez con la que se aproximan al valor límite) es distinta.