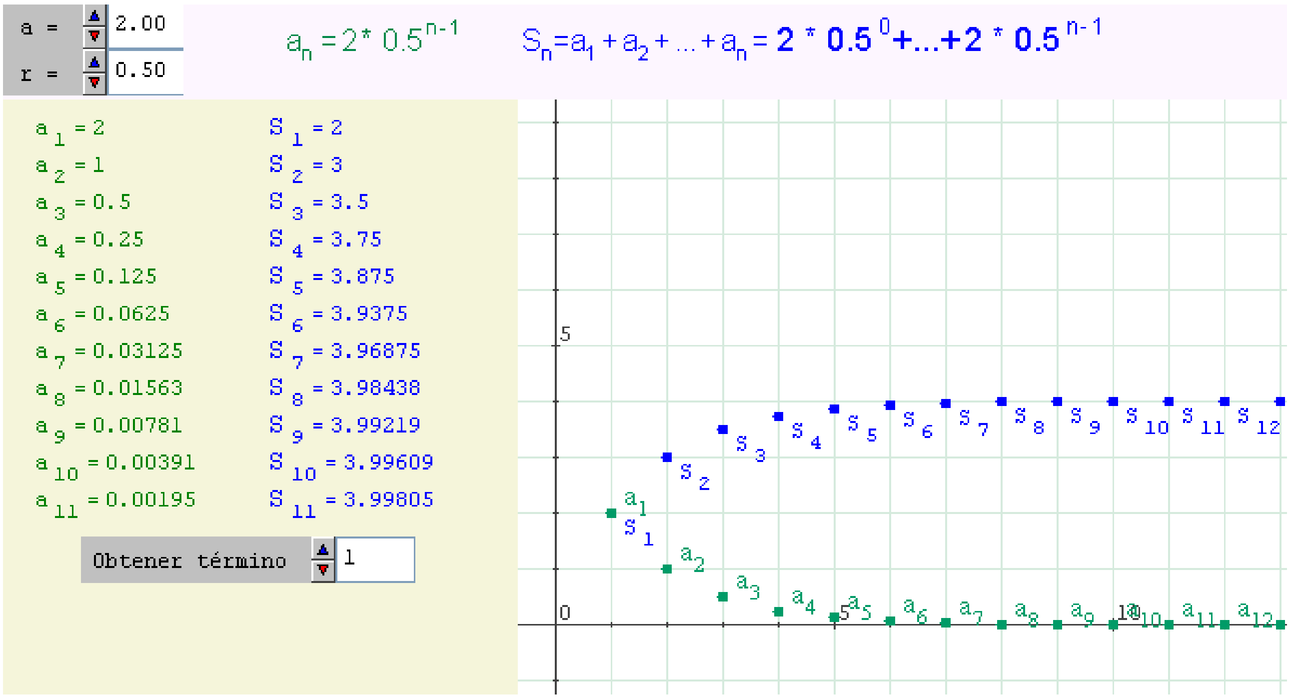
Laboratorio: Series geométricas



1 Dada la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

(a) Para cada n=1, 2, ..., 10 determina la suma de los "n" primeros términos a mano y luego comprueba el resultado haciendo clic en el primer botón "Profundizar" (aparece a la derecha de la descripción de las series geométricas).

(b) Observa la gráfica de dichas sumas.

(c) Obtén una expresión simbólica que calcule la suma de los "n" primeros términos de dicha serie y calcula su límite cuando "n" tiende a infinito.

(d) Repite los apartados anteriores para las series geométricas con razón $r=-\frac{1}{3}$, $r=3$, $r=-3$.

(e) ¿Qué tiene que cumplir una serie geométrica para que sea convergente? ¿Y para que sea divergente u oscilante? Después de haberlo pensado puedes pasar a la página Carácter de una serie y pulsar en el primer botón Demostración para ver las respuestas.

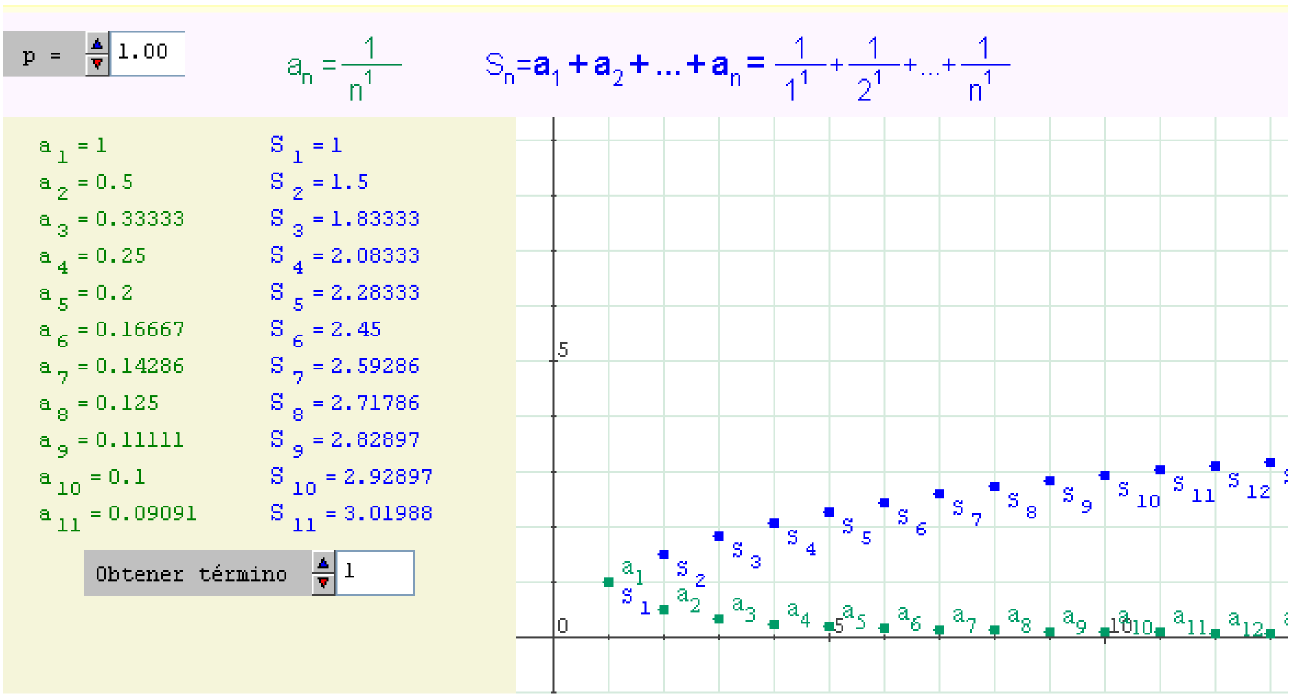
2 Convierte a fracción el número $3'14\overline{2}$ utilizando la suma de una serie geométrica. Observa que:

$$3'14\overline{2} = 3'14 + 0'002 + 0'0002 + 0'00002 + \ldots$$

Una serie de términos no negativos o bien converge o bien diverge ya que la sucesión de sus sumas parciales es monótona.

$$s_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\text{no negativo}} \geq S_n$$

Laboratorio: Series armónicas generalizadas



En el siguiente ejercicio estudiaremos las series armónicas generalizadas: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Como se tratan de series de términos positivos serán o convergentes o divergentes. Veremos que para p>1 son convergentes y para $p \leq 1$ divergentes.

3 Rellena la siguiente tabla:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	Expresión de S_3	Valor de S_{100}	Valor de S_{2000}
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$			

Nota: Observa en la tabla anterior:

- La velocidad tan lenta con la que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge
- A la vista de las sumas parciales calculadas no se podría concluir (como veremos más adelante) que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}}$ es divergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$ es convergente (observa los valores de S_{2000} para ambas series).

4 Calcula una cota inferior y una cota superior de la suma parcial enésima de las siguientes series armónicas generalizadas teniendo en cuenta el criterio integral:

$$\int_1^n \frac{1}{x^p}dx \le 1+\frac{1}{2^p}+\ldots+\frac{1}{n^p} \le 1+\int_1^n \frac{1}{x^p}dx$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Cota inferior de $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (Calcula a mano el valor y comprueba si el valor que has obtenido para S_5 en Lemat)	Cota superior de $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (Calcula a mano el valor y comprueba si el valor que has obtenido para S_5 en Lemat)	Escribe el término general de la sucesión S_n y si es posible una sucesión equivalente
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$			

5

Estudiamos ahora el límite de la sucesión de sumas parciales, aplicando el teorema del encaje en la expresión:

$$\cot a \inf erior \leq S_n \leq \cot a \sup erior$$

donde las cotas son las obtenidas en el ejercicio anterior. De la convergencia o divergencia de la sucesión de sumas parciales concluiremos el carácter de la serie.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Límite cuando n tiende a infinito de la cota inferior	Límite cuando n tiende a infinito de la cota superior	Carácter de la serie
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.9}}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}}$			
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$			

Realizando el mismo razonamiento para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con p>0 se concluiría que para p>1 son convergentes y para $p \leq 1$ divergentes