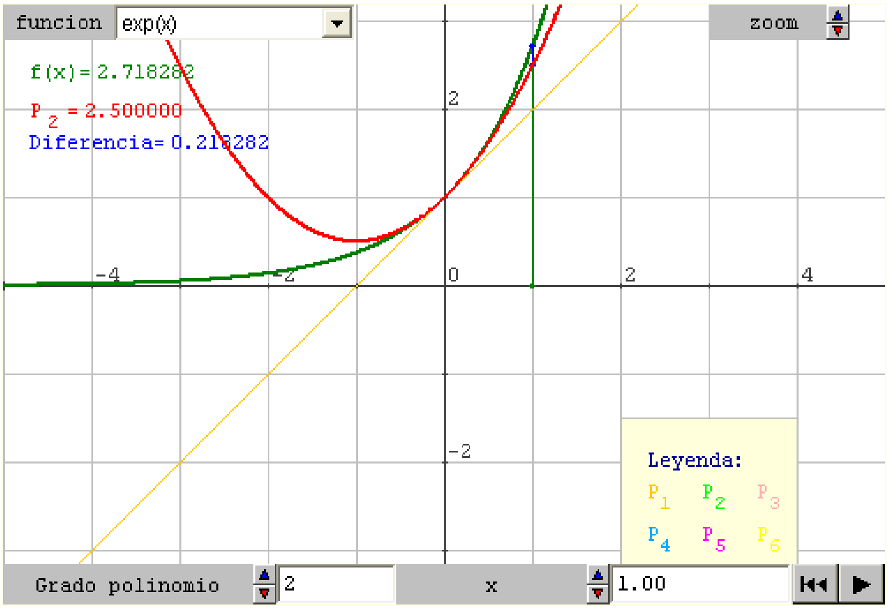
Laboratorio: Polinomios de Taylor de funciones elementales



POLINOMIOS DE TAYLOR: Supongamos que $f(x)$ es una función derivable n veces en el punto x=a. Se define el polinomio de Taylor de grado n correspondiente a la función f en el punto x=a como

$$T_n\left[f(x);a\right]=T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k=$$

$$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En este ejercicio analizaremos como influye el grado del polinomio en la aproximación de la función por el polinomio de Taylor.

1 Rellena las siguientes tablas:

Tabla 1: Considerar la función $f(x)=e^x$:

Polinomio de Taylor de grado 1 en a=0	$T_1(x)=$	$T_1(1)=$	$f(1)-T_1(1)=$
Polinomio de Taylor de grado 4 en a=0	$T_4(x)=$	$T_4(1)=$	$f(1)-T_4(1)=$
Polinomio de Taylor de grado 6 en a=0	$T_6(x)=$	$T_6(1)=$	$f(1)-T_6(1)=$
Calcula a mano la derivada enésima de $f(x)=e^x$ es: Escribe la expresión del Polinomio de Taylor de grado n en a=0 de $f(x)=e^x$: $T_n(x)=$			

Tabla 2: Considerar la función $f(x)=\log(1+x)$:

Polinomio de Taylor de grado 1 en a=0	$T_1(x)$	$T_1(1)=$	$f(1)-T_1(1)=$
Polinomio de Taylor de grado 2 en a=0	$T_2(x)$	$T_2(1)=$	$f(1)-T_2(1)=$
Polinomio de Taylor de grado 3 en a=0	$T_3(x)$	$T_3(1)=$	$f(1)-T_3(1)=$
Calcula a mano la derivada enésima de $f(x)=\log(1+x)$ es:			

Escribe la expresión del Polinomio de Taylor de grado n en a=0 de $f(x)=\log(1+x)$:

$T_n(x)=$

Tabla 3: Considerar la función $f(x)=sen(x)$:

Polinomio de Taylor de grado 1 en a=0	$T_1(x)$	$T_1(1)=$	$f(1)-T_1(1)=$
Polinomio de Taylor de grado 2 en a=0	$T_2(x)$	$T_2(1)=$	$f(1)-T_2(1)=$
Polinomio de Taylor de grado 3 en a=0	$T_3(x)$	$T_3(1)=$	$f(1)-T_3(1)=$

Calcula a mano la derivada enésima de $f(x)=sen(x)$ es:

Escribe la expresión del Polinomio de Taylor de grado n en a=0 de $f(x)=sen(x)$:

$T_n(x)=$

Tabla 4: Considerar la función $f(x)=\cos(x)$:

Polinomio de Taylor de grado 1 en a=0	$T_1(x)$	$T_1(1)=$	$f(1)-T_1(1)=$

Polinomio de Taylor de grado 2 en a=0	$T_2(x)$	$T_2(1)=$	$f(1)-T_2(1)=$
Polinomio de Taylor de grado 3 en a=0	$T_3(x)$	$T_3(1)=$	$f(1)-T_3(1)=$

Calcula a mano la derivada enésima de $f(x)=\cos(x)$ es:

Escribe la expresión del Polinomio de Taylor de grado n en a=0 de $f(x)=\cos(x)$:

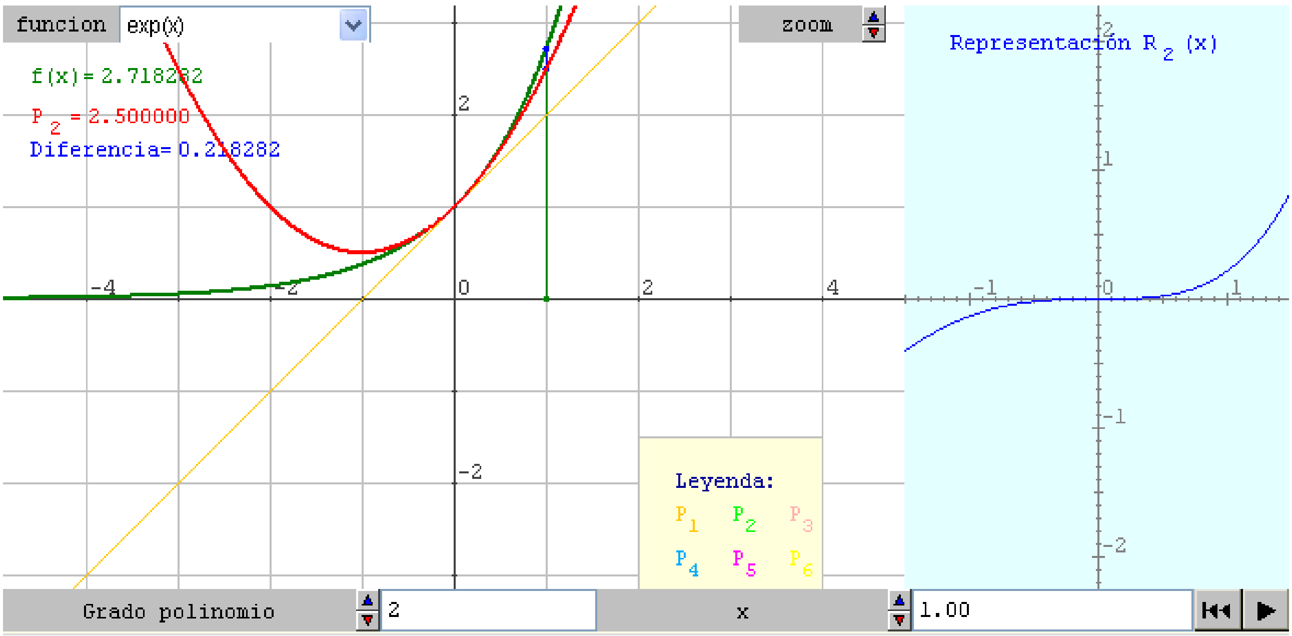
$T_n(x)=$

Observa como cuanto más grande es el valor de n (grado del polinomio) la aproximación de $f(x)$ por su polinomio de Taylor es mejor.

En el siguiente ejercicio analizaremos como influye la distancia de x al punto en el que consideramos centrado el polinomio de Taylor en relación a la aproximación:

$$f(x)\approx T_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Laboratorio: Resto enésimo



OBSERVACIÓN: A la derecha del applet aparece representada la función $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$. Observa cómo varía la representación de $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ según varías el grado del polinomio de Taylor y los valores de x para las distintas funciones.

Comprueba que para valores próximos al cero la función toma valores cercanos al cero y que a medida que la x se aleja del origen el valor de $R_n(x)$ va haciéndose más grande en valor absoluto.

2 Rellena las siguientes tablas

Se considera f(x)=sen(x) y a=0

x	$T_1(x)$	$f(x)-T_1(x)$	$T_5(x)$	$f(x)-T_5(x)$
0.1				
0.5				
1				

Se considera f(x)=cos(x) y a=0

x	$T_1(x)$	$f(x)-T_1(x)$	$T_5(x)$	$f(x)-T_5(x)$
0.1				
0.5				
1				

Se considera f(x)=log(1+x) y a=0

x	$T_1(x)$	$f(x)-T_1(x)$	$T_5(x)$	$f(x)-T_5(x)$
0.1				
0.5				
1				

Observa como cuanto más grande es el valor de n (grado del polinomio) y más cercano está el punto x del valor de a la aproximación de $f(x)$ por su polinomio de Taylor es mejor.

En el siguiente ejercicio vamos a ver cómo incide en la aproximación la utilización de diferentes funciones.

3 Consideremos $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=(1.5)^x$ y supongamos que deseamos obtener de forma aproximada el valor de $\sqrt{1.5}$. Se pide obtener los polinomios de Taylor de órdenes 2, 3, 4 en a=1 de la función f(x) y de g(x)

Utiliza los polinomios calculados anteriormente para aproximar $\sqrt{1.5}$ y completa la siguiente tabla:

Función	$T_2(f,1.5)$	$T_3(f,1.5)$	$T_4(f,1.5)$
$f(x)=\sqrt{x}$ $a=1 \quad x=1.5$			
Función	$T_2(g,0.5)$	$T_3(g,0.5)$	$T_4(g,0.5)$

$(1.5)^x$ $a=1 \quad x=0.5$			

Una aproximación de $\sqrt{1.5}$ con 20 cifras decimales es: 1.2247448713915890491. Puedes utilizar Matlab para calcular este valor tecleando:

```
>>vpa(sqrt(1.5),20)
```

Compara este valor con el que proporciona cada uno de los polinomios anteriores. ¿Con qué función se obtienen mejores aproximaciones?

POLINOMIOS DE TAYLOR CON MATLAB: Dispones de la herramienta Taylortool para representar y calcular polinomios de Taylor en Matlab. Debes escribir:

```
>>taylortool
```

y se abrirá una ventana donde puedes introducir la función, el grado del polinomio y el punto a donde calculas los polinomios.