En esta práctica se analizará la aproximación de una función mediante su polinomio de Taylor estimando esta aproximación. Los conceptos y resultados que se utilizarán son los siguientes:

Supongamos que $f(x)$ es una función derivable n veces en el punto x=a. Se define el **polinomio de Taylor** de grado n correspondiente a la función f en el punto x=a como

$$T_n\left[f(x);a\right]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k=$$

$$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Nota: En el caso en el que a=0 el polinomio de Taylor se llama Polinomio de MacLaurin

Se llama **resto enésimo del polinomio de Taylor** de una función f(x) en el punto x=a $R_n=f(x)-T_n\left[f(x);a\right]$

A la expresión: $f(x)=T_n\left[f(x);a\right]+R_n$ se la llama **fórmula de Taylor.**

EXPRESION DEL RESTO DE LAGRANGE: Si la función $f(x)$ es derivable n+1 veces en un entorno del punto a, puede probarse que el resto enésimo del polinomio de Taylor es:

$$R_n=\frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ siendo t un punto intermedio entre x y a.

CASO PARTICULAR: Si f es derivable en un entorno I del punto a y se considera en la fórmula de Taylor n=0 y la expresión del resto de Lagrange se puede escribir

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(t)}{1!}(x-a) \qquad (1)$$

Siendo t un punto intermedio entre x y a. Este resultado se conoce con el teorema del valor medio.

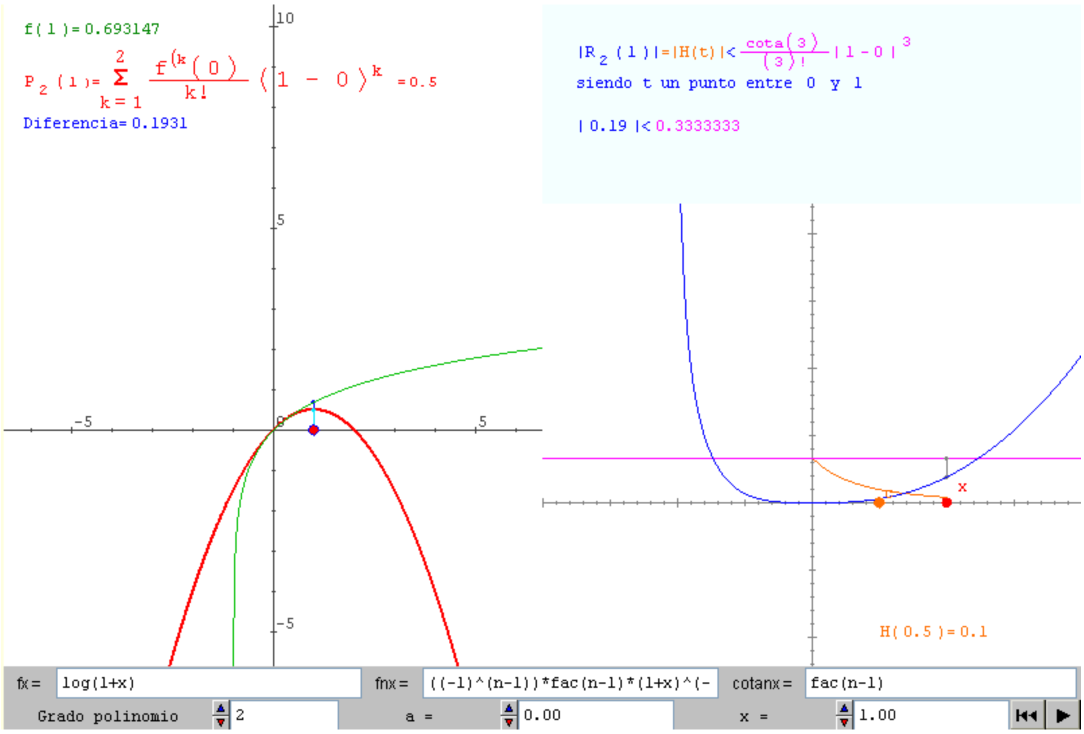
TEOREMA DEL VALOR MEDIO o DE LAGRANGE: Si la función es continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) entonces existe un c en (a, b) de forma que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Nota: Basta considerar en (1) x=b y t=c.

En el primer ejercicio de esta práctica se estimará el error que se comete al sustituir el valor de una función en un punto x por el polinomio de Taylor de grado n desarrollado en un punto a: $f(x) \approx T_n\left[f(x);a\right]$.

Laboratorio: Acotación del resto de Lagrange



1 Sitúate en el applet de la figura anterior. En él debes introducir:

- **a**: es el punto en el que desarrollas el polinomio de Taylor
- **grado del polinomio**: el valor n en el polinomio de Taylor
- **x**: el punto en el que se quiere aproximar f(x) por su polinomio de Taylor
- **fx**: La función f(x) de la que calculamos su polinomio de Taylor
- **fnx**: La expresión de la derivada enésima de f(x)
- **cotanx**: Una acotación de la derivada enésima para todo punto c comprendido entre x y a. Como observarás en principio este valor depende del valor de n y del punto x. Se tendrá entonces:

$$\left|f^{(n}(c)\right| < \cot a(n,x)$$

siendo válida esta desigualdad para todo c comprendido entre a y x.

Conocidos estos valores entonces se puede estimar el resto de la siguiente manera:

$$|R_n| < \frac{\cot a(n+1,x)}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Veamos un ejemplo. Considera $f(x) = \log(1+x)$, $a = 0$. A partir de ahora, por comodidad, se escribirá $T_n\left[f(x);0\right] = T_n(x)$

PASO 1: Buscamos una acotación para la derivada enésima.

- Calcula la expresión de $f^{(n}(x)$

- Calcula una cota de $\left|f^{(n}(t)\right|$ con t comprendido entre 0 y x. Observa que la cota es distinta si -1<x<0 y si $0 < x \leq 1$.
  - Si -1<x<0 la cota es:
  - Si $0 < x \leq 1$ la cota es:

PASO 2: Analizamos la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ siendo x>0.

Consideremos ahora x=1 (x>0). Introduce en el applet el valor de cotanx obtenido para este caso (ver paso 1).

El valor de $f(1) = \log 2 \simeq$

Valor que proporciona el polinomio	Valor del resto	Cota del resto
n=1 $T_1(1) \simeq$	$\lvert R_1(1) \rvert \simeq$	
n=2 $T_2(1) \simeq$	$\lvert R_2(1) \rvert \simeq$	
n=3 $T_3(1) \simeq$	$\lvert R_3(1) \rvert \simeq$	

Observa en todos los casos como la cota del error calculada es siempre mayor que la función:

$\lvert H(t) \rvert = \frac{\lvert f^{(n+1}(t) \rvert}{(n+1)!} \lvert x-a \rvert^{n+1}$ cuando t recorre todos los puntos comprendidos entre x y a.

En el applet puedes comprobarlo moviendo el punto c de la figura de la derecha y viendo que para todos los puntos comprendidos entre x=1 y a=0 se cumple:

$$\lvert H(c) \rvert < \text{cot}\,a\ del\ resto$$

PASO 3: Analizamos la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ siendo -1<x<0.

Consideremos ahora x=-0.5 (-1<x<0). Introduce en el applet el valor de cotanx obtenido para este caso (ver paso 1).

El valor de $f(-0.5) = \log(0.5) \simeq$

Valor que proporciona el polinomio	Valor del resto	Cota del resto
n=1 $T_1(-0.5) \simeq$	$\lvert R_1(-0.5) \rvert \simeq$	

n=2 $T_2(-0.5) \simeq$	$\lvert R_2(-0.5)\rvert \simeq$	
n=3 $T_3(-0.5) \simeq$	$\lvert R_3(-0.5)\rvert \simeq$	

Observa en todos los casos como la cota del error calculada es siempre mayor que la función:

$\left|H(t)\right| = \dfrac{\left|f^{(n+1}(t)\right|}{(n+1)!}\left|x-a\right|^{n+1}$ cuando t recorre todos los puntos comprendidos entre x y a.

En el applet puedes comprobarlo moviendo el punto t de la figura de la derecha y viendo que para todos los puntos comprendidos entre x=-0.5 y a=0 se cumple:

$$\left|H(t)\right| < \cot a \ del \ resto$$

2 Calcular $\sqrt[3]{30}$ a partir del polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x)=\sqrt[3]{x}$ y acotar el error cometido.