

### 7. DINÁMICA DE ROTACIÓN

FORMULARIO

<b>MCU:</b>	$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$	$\omega = \text{cte}$	$\alpha = 0$
<b>MCUA:</b>	$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + 1/2 \alpha t^2$	$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$	$\alpha = \text{cte}$

Analogía entre las expresiones de dinámica de traslación y de rotación:

Posición	Velocidad	Aceleración	Masa	Fuerza	Mom. lineal	Trabajo	Energía cinética
x	$v = dx / dt$	$a = dv / dt$	m	$F = m a$	$p = m v$	$W = F e$	$Ec = mv^2/2$
Ángulo girado	Vel. angular	Acel. angular	Mom. inercia	Mom. par	Mom. angular	Trabajo	En. cin. rotación
$\theta$	$\omega = d\theta / dt$	$\alpha = d\omega / dt$	I	$M = I \alpha$	$L = I \omega$	$W = M \theta$	$Ec = I\omega^2/2$

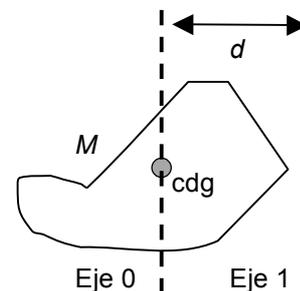
**Momentos de inercia:**  $I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$

Cuerpo homogéneo	Eje	I
Varilla	Transversal por su centro	$1/12 M l^2$
Disco	Normal por su centro	$1/2 M R^2$
Anillo	Normal por su centro	$M R^2$
Rectángulo	Normal por su centro	$1/12 M (a^2+b^2)$
Esfera	Coincidiendo con su diámetro	$2/5 M R^2$
Cilindro	Coincidiendo con su altura	$1/2 M R^2$

*Teorema de Steiner:* el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje cualquiera,  $I_1$ , es igual a:

$$I_1 = I_0 + M d^2$$

$I_0$  es el mom. de inercia respecto a un eje paralelo al considerado que pasa por su centro de gravedad,  $M$  la masa del cuerpo y  $d$  la distancia entre ambos ejes.



**Conservación del momento angular:**

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \text{en ausencia de momentos: } \vec{L}_{\text{Total}} = I\vec{\omega} = \text{cte}$$

**Fuerza centrífuga:**  $F_c = mv^2/R = m\omega^2 R$

7.1) Un niño hace que ruede un aro por un camino horizontal con la velocidad de 7,2 km./h. ¿Hasta que distancia podría subir el aro por una cuesta a costa de su energía cinética? La inclinación de la cuesta es igual a 10 m por cada 100 m de camino.

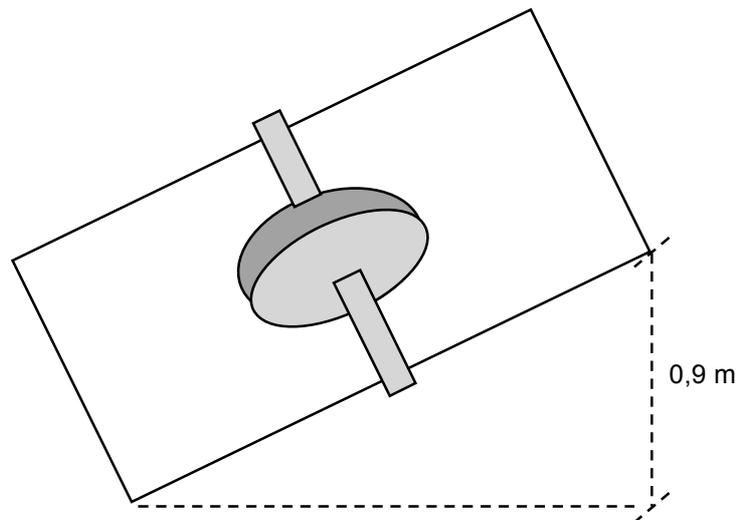
7.2) En un tambor de masa  $M = 9$  kg hay enrollado un cordón a cuyo extremo va atado un peso de masa  $m = 2$  kg. Hallar la aceleración del peso. Considerar que el tambor es un cilindro homogéneo y despreciar el rozamiento.

7.3) Un ventilador gira con una velocidad correspondiente a 900 r.p.m. Este ventilador, al ser desconectado, empieza a girar con movimiento uniformemente retardado y da 75 vueltas hasta que se para por completo. El trabajo de las fuerzas que lo frenan es igual a 44,4 J. Hallar: 1) el momento de inercia del ventilador y 2) el momento de las fuerzas que lo frenan.

7.4) Un volante cuyo momento de inercia  $I = 245$  kg.m<sup>2</sup> giraba a 20 r.p.s. Después que el momento de rotación de las fuerzas dejó de actuar sobre el volante, éste dio 1.000 vueltas y se paró. Hallar: 1º) el momento de las fuerzas de rozamiento, 2º) el tiempo transcurrido desde que dejó de actuar el momento de rotación de las fuerzas hasta que el volante se paró por completo.

7.5) Un volante comienza a girar con una aceleración constante  $\alpha = 0,5$  rad/s<sup>2</sup> y después de un tiempo  $t_1 = 15$  s de haber empezado a moverse adquiere un momento de la cantidad de movimiento  $L = 73,5$  kg.m<sup>2</sup>/s. Hallar la energía cinética que tendrá este volante al cabo de un tiempo  $t_2 = 20$  s de haber empezado la rotación.

7.6) Por un plano inclinado formado por dos carriles de altura  $h = 0,9$  m e inclinación pequeña, rueda sin deslizar un cilindro de radio  $r$  y masa  $M = 72$  kg, que lleva solidario otro coaxial de radio  $R = 6r$  y masa  $M = 248$  kg. Se supone que este conjunto se abandona sin velocidad inicial en la parte más elevada del plano. Calcular la velocidad de traslación cuando ha descendido  $h$  sobre la vertical.

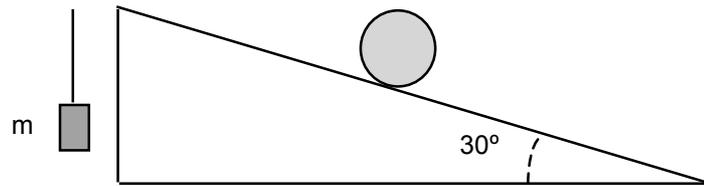


7.7) Una plataforma horizontal de 100 kg de masa gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y da 10 r.p.m. Un hombre que pesa 60 kgf se encuentra en estas condiciones en el borde de la plataforma. ¿Con qué velocidad comenzará a girar la plataforma si el hombre se traslada desde el borde hacia el centro de la misma? Considerar que la plataforma es un disco circular homogéneo y que el hombre es una masa puntual.

7.8) Hallar la energía cinética de un ciclista que marcha con la velocidad  $v = 9$  km./h. El peso del ciclista con la bicicleta es  $P = 78$  kgf, con la particularidad de que a las ruedas les corresponde un peso  $P_1 = 3$  kgf. Considerar que las ruedas son aros.

7.9) Un volante de radio  $R = 0,2$  m y masa  $m = 10$  kg está unido a un motor por medio de una correa de transmisión. La tensión de la correa, que se mueve sin deslizamiento, es constante e igual a  $T = 14,7$  N. ¿Qué número de r.p.m. dará el volante al cabo de un tiempo  $t = 10$  s, después de comenzar el movimiento? Considerar que el volante es un disco homogéneo. El rozamiento se desprecia.

7.10) Un cilindro puede rodar sin rozamiento ni deslizamiento sobre un plano inclinado  $30^\circ$  y está unido por medio de un hilo ideal que pasa por una polea sin masa y sin rozamiento a otra masa igual a la cuarta parte de la suya, como se indica en el esquema. Calcular la velocidad con que este cilindro baja por el plano inclinado, cuando partiendo del reposo, la masa menor ha ascendido 0,7 m.



7.11) Se tiene un volante de radio  $R = 1$  m y una masa  $M = 100$  kg se supone localizada en la llanta. Arrollada a su eje cuyo radio es  $r = 10$  cm y masa despreciable hay una cuerda de la que pende un cuerpo de masa  $m = 40$  kg, este cuerpo está a una altura  $h = 18$  m del suelo. Calcular: 1) La aceleración con que cae el cuerpo. 2) La tensión de la cuerda durante la caída. 3) Tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo. 4) Energía cinética adquirida por el volante al llegar al suelo.

7.12) Un cilindro macizo y homogéneo de 1 metro de radio y 100 kg de masa tiene su eje, también macizo y homogéneo, de 10 cm de radio y 10 kg de masa. Tangencialmente al eje se aplica una fuerza de 1 N durante 10 minutos. Calcular la velocidad angular en vueltas por minuto.

7.13) En la parte superior de un doble plano inclinado, siendo  $\alpha = 30^\circ$  para ambos planos, hay una polea ideal sin masa ni rozamiento, por la que pasa un hilo ideal. En uno de los extremos del hilo hay una masa  $m$ , que desliza sobre su plano con un coeficiente de fricción  $\mu = 0,1$  y en el otro un cilindro de masa doble que se puede mover sobre el plano rodando sin deslizamiento ni rozamiento, pues el de rodadura se considera despreciable. Determinar si el cilindro asciende o desciende y la velocidad lineal cuando se ha desplazado un metro a lo largo del plano, partiendo del reposo.

7.14) Un volante gira con una velocidad constante correspondiente a  $v = 10$  r.p.s. y su energía cinética  $W_0 = 800$  kgm. ¿Cuánto tiempo tardará un momento de fuerzas de rotación  $M = 50$  N.m aplicado a este volante en aumentar al doble su velocidad angular?

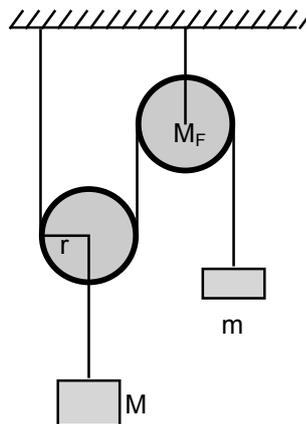
7.15) Un aro y un disco, cuyos pesos  $P$  son iguales, ruedan sin resbalar con velocidades lineales  $v$  iguales. La energía cinética del aro  $W_1 = 4$  kgm. Hallar la energía cinética  $W_2$  del disco.

7.16) Un disco uniforme de radio  $R = 12$  cm y masa  $M = 400$  g está montado sobre un eje apoyado sobre cojinetes sin fricción. Alrededor de su borde se encuentra arrollada

una cuerda de la que cuelga un cuerpo de masa  $m = 50$  g. Calcular: a) la velocidad de  $m$  cuando ha descendido 50 cm partiendo del reposo, b) la tensión de la cuerda.

7.17) Un cuerpo con el radio  $R$  y la masa  $m$  rueda horizontalmente sin deslizarse con velocidad  $v$ . Después rueda hacia arriba por un plano inclinado, hasta una altura máxima  $h$ . Si  $h = 3v^2/4g$ , a) ¿Cual es el momento de inercia del cuerpo? b) ¿De que cuerpo se trata?.

7.18) Una polea fija y otra móvil están montadas como indica la figura. Las dos poleas se consideran como cilindros macizos y homogéneos y pesan 1 kilo cada una; el hilo es ideal. La masa que pende de la polea móvil pesa también 1 kilo, y la que cuelga del extremo del hilo 1/2 kilo. Calcular la velocidad de la masa  $M$  cuando está a 2 metros de distancia de su posición inicial y su energía cinética en kilográmetros.



7.19) Un disco gira alrededor de un eje vertical dando 30 r.p.m. Sobre este disco y a 20 cm de distancia del eje de rotación se encuentra un cuerpo. ¿Que valor deberá tener el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el disco para que aquel no se deslice fuera de éste?

7.20) Un disco que pesa 2 kgf rueda sin resbalar por un plano horizontal con la velocidad de 4 m/s. Hallar la energía cinética del disco.

7.21) Dos pesas cuyos pesos son distintos están unidas entre sí por un hilo que pasa por una polea. El momento de inercia de la polea es  $I = 50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  y su radio  $R = 20$  cm. La polea se mueve con rozamiento y el momento de las fuerzas de rozamiento  $Mr = 98,1 \text{ N}\cdot\text{m}$ . Hallar la diferencia que hay entre las tensiones del hilo  $T_1 - T_2$  por ambos lados de la polea, sabiendo que esta última gira con una aceleración angular constante  $\alpha = 2,36 \text{ rad/s}^2$

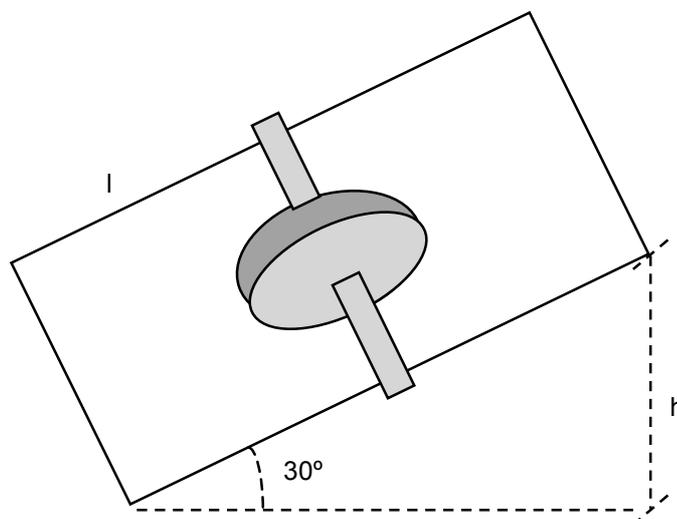
7.22) Un disco gira alrededor de un eje vertical dando 30 r.p.m. Sobre este disco y a 20 cm de distancia del eje de rotación se encuentra un cuerpo. Que valor deberá tener el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el disco para que aquel no se deslice fuera de éste.

7.23) Un volante está construido con un disco macizo de 0,5 m de diámetro y 0,02 m de espesor, y de dos ejes que sobresalen, de 0,1 m de diámetro y 0,1 m de longitud. Si el material de que está formado tiene densidad de  $6.000 \text{ kg./m}^3$ , hállese su momento de inercia respecto al eje de rotación.

7.24) Una plataforma gira alrededor de un eje vertical, dando una vuelta cada 10 segundos. El momento de inercia de la plataforma respecto a este eje es  $1.200 \text{ kg.m}^2$ . Un hombre de 80 kg de masa se encuentra inicialmente de pie en el centro de la plataforma y comienza a andar a lo largo de un radio. ¿Cuál es la velocidad angular de la plataforma cuando el hombre se ha alejado 2 m del centro?

7.25) Una plataforma horizontal de 100 kg de masa gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y da 10 r.p.m. Un hombre que pesa 60 kgf se encuentra en estas condiciones en el borde de la plataforma. ¿Con qué velocidad comenzará a girar la plataforma si el hombre se traslada desde el borde hacia el centro de la misma? Considerar que la plataforma es un disco circular homogéneo y que el hombre es una masa puntual.

7.26) Un disco de acero de 2,5 kg y 20 cm de diámetro, se fija a un eje de 1,5 kg de masa y 5 cm de diámetro. El eje se apoya en rieles que forman un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal y se desliza sobre ellos sin resbalar. Calcular: a) El momento de inercia del sistema disco eje. b) La aceleración lineal del centro del disco cuando el sistema gira.



7.27) Lanzamos hacia arriba rodando por un plano inclinado de  $30^\circ$  una esfera maciza. Su centro de gravedad lleva al salir una velocidad de 5 m/s. Calcular: a) Altura que alcanzará la esfera; b) Tiempo que tardará en regresar al plano horizontal

7.28) Una varilla uniforme de acero con longitud de 1,2 m y masa de 6,4 kg se encuentra unida en cada extremo a una pequeña bola que tiene la masa de 1,06 kg. La varilla está obligada a girar en un plano horizontal alrededor de un eje vertical que pasa por su punto central. Se observa que en cierto instante se encuentra girando con una velocidad angular de 39 r.p.s. Debido a la fricción del eje, queda en reposo 32 s después. Calcular: a) la aceleración angular, b) el momento de fricción ejercido por el eje, c) el trabajo total hecho por la fricción del eje y d) el número de revoluciones que se llevan a cabo durante los 32 s.

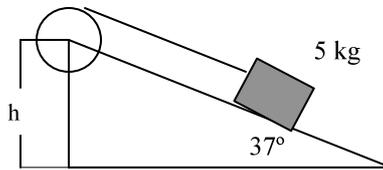
7.29) Dos masas iguales, cada una de 0,10 kg se fijan en los extremos de una varilla muy ligera de 1 m de longitud, que está sostenida en el centro por un pivote sin fricción, como se indica en la figura. El mecanismo interno de la varilla puede mover las masas hacia el centro a lo largo de la varilla. El sistema gira con una velocidad angular de 8 rad/s con las masas en los extremos de la varilla. Si se pone a trabajar el mecanismo interno de la varilla y las masas se mueven para que estén a 0,25 m del centro, cada una, ¿Cuál será la velocidad angular del sistema y cuales serán las  $E_c$  inicial y final de éste?

7.30) La velocidad de rotación de una rueda que gira con movimiento uniformemente retardado por haber sido frenada, disminuye en 1 min. desde 300 hasta 180 r.p.m. El momento de inercia de la rueda es igual a  $2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Hallar 1) la aceleración angular de la rueda, 2) el momento decelerador (de la fuerza que la frena) 3) el trabajo de frenado y 4) el número de vueltas que da la rueda en este minuto.

7.31) Una polea cuyo peso  $P = 1 \text{ kgf}$  está sujeta en el borde de una mesa. Las pesas A y B pesan lo mismo  $P_1 = P_2 = 1 \text{ kgf}$ , y están unidas entre sí por un hilo que pasa por la antedicha polea. El coeficiente de rozamiento de la pesa B con la mesa es  $K = 0,1$ . Considerando que la polea es un disco homogéneo y depreciando su rozamiento, hallar: 1) la aceleración con que se mueven las pesas y 2) las tensiones  $T_1$  y  $T_2$  de las ramas del hilo.

7.32) Una masa de 5 kg está sostenida por un plano inclinado sin fricción, como se muestra en la figura. La masa está fija a una cuerda delgada que está enrollada en un cilindro

homogéneo de 4 kg de masa y 30 cm de radio. Cuando el sistema parte del reposo, calcular: a) la aceleración de la masa, b) la energía cinética de la masa después de haberse movido 5 m.



7.33) Una piedra de afilar tiene forma de cilindro macizo, con 0,5 m de radio y 50 kg de masa.

a) Si parte del reposo, ¿qué momento le comunicará en 10 s una velocidad angular de 300 r.p.m.

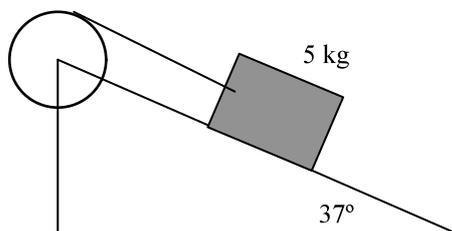
b) Cual es su energía cinética cuando gira a 300 r.p.m.

7.34) Una masa de 2 kg está sostenida por un hilo sin masa enrollado en una polea cuyo diámetro es 0,80 m y su momento de inercia es de  $0,60 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Si el sistema inicialmente está en reposo, ¿cuales son la tensión en el hilo, la velocidad de la masa de 2 kg y la energía cinética total del sistema cuando la masa de 2 kg ha alcanzado un punto exactamente a 3 m bajo su punto de partida? ¿Cuánto tiempo habrá pasado desde que arranca y el instante en que pasa por este punto la masa de 2 kg?

7.35) Un bloque de masa  $m = 5 \text{ kg}$  desliza por una superficie inclinada  $37^\circ$  con la horizontal, como se indica en la figura. El coeficiente cinético de rozamiento es de 0,25. Se enrolla una cuerda unida al bloque alrededor de un volante cuyo eje fijo pasa por O. El volante tiene una masa  $M = 20 \text{ kg}$  y su radio exterior  $R = 0,2 \text{ m}$ .

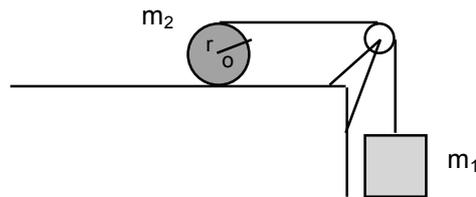
a) ¿Con qué aceleración desliza el bloque por el plano?

b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?



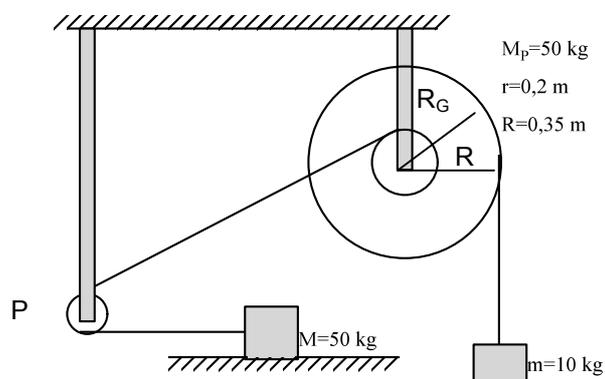
7.36) Una masa de 3 kg se fija a un cordón largo sin masa que está enrollado a un tambor. El tambor gira en un eje horizontal fijo sobre cojinetes sin fricción. Sabiendo que la tensión en el cordón es de 10 N, calcular; a) el momento de inercia del tambor, b) que fracción de la energía total del sistema se debe a la rotación del tambor, si la velocidad de la masa de 3 kg es de 4 m/s.

7.37) Una masa  $m_1 = 1$  kg cuelga del extremo de una cuerda sin peso, que pasa por una polea sin rozamiento y después se enrolla en un cilindro de masa  $m_2 = 8$  kg y radio  $r = 10$  cm que rueda sobre un plano horizontal. Hallar: 1º) La aceleración de la masa  $m_1$ . 2º) La tensión de la cuerda. 3º) La aceleración angular del cilindro. Recordar que  $a_A = a_0 + \alpha r$



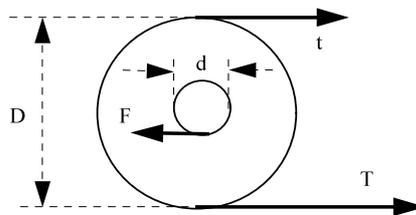
7.38) Un tanque se pone en movimiento por el motor que hace rodar cuatro ruedas (dos en cada lado). Las ruedas con sus salientes agarran las orugas. Determinar la velocidad del tanque, pasados 10 s de haberse puesto en marcha este último, si la potencia útil media del motor  $P = 200$  kw, la masa del tanque  $M_1 = 10.000$  kg, la masa de cada oruga  $M_2 = 700$  kg, la masa de cada rueda  $M_3 = 200$  kg. Considerar las ruedas como cilindros homogéneos.

7.39) En el instante  $t = 0$  s las masas  $M$  y  $m$  del sistema se encuentran como se indica en la figura. La polea  $P$  se puede considerar sin masa, y el radio de giro de la polea doble es  $R_G = 0,4$  m. Si el sistema se deja en libertad en la posición anterior, determinar: a) Las tensiones de las cuerdas, sabiendo que el coeficiente de rozamiento sobre la horizontal es 0,2; b) Distancia recorrida por la masa  $M$  después de  $t = 2$  s.



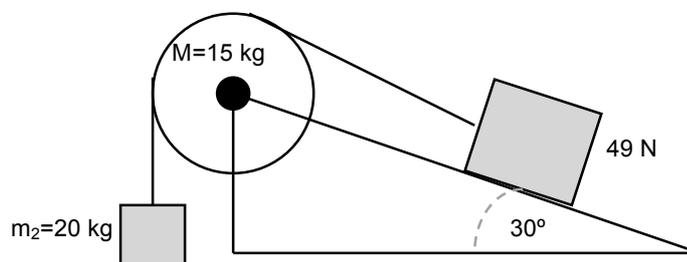
7.40) Una masa de 2 kg está sostenida por un hilo sin masa enrollado en una polea cuyo diámetro es de 0,80 m y su momento de inercia es de  $0,60 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Si el sistema inicialmente está en reposo, ¿cuáles son la tensión en el hilo, la velocidad de la masa de 2 kg y la energía cinética total del sistema cuando la masa de 2 kg ha alcanzado un punto exactamente a 3 m bajo su punto de partida? ¿Cuánto tiempo habrá pasado desde que arranca y el instante en el que pasa por este punto la masa de 2 kg?

7.41) Una polea recibe la rotación de la otra polea (conductriz) mediante la transmisión por correa. El ramal conductriz de la correa está tensado con una fuerza  $T = 98 \text{ N}$ , el ramal conducido, con una fuerza  $t = 49 \text{ N}$ . La masa de la polea  $M = 200 \text{ kg}$ , su diámetro  $D = 0,4 \text{ m}$ . Determinar la aceleración angular de la polea, tomando en consideración el rozamiento del árbol en los cojinetes. El diámetro del árbol  $d = 0,06 \text{ m}$ , el coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,1$ . Del peso del árbol se puede prescindir. La polea se considerará un cilindro macizo homogéneo.



7.42) Un cuerpo de masa  $m_1 = 10 \text{ kg}$  y coeficiente cinético de rozamiento 0,85, desliza por una superficie inclinada  $30^\circ$  con la horizontal. Este cuerpo se une por medio de una cuerda, sin masa, a otro cuerpo de masa  $m_2 = 20 \text{ kg}$  como se indica en la figura. La cuerda pasa por una polea maciza de masa 15 kg y radio  $R = 0,2 \text{ m}$  que tiene un eje de 5 cm de radio y cuyo coeficiente de rozamiento dinámico entre el eje y el cojinete es 0,15. Calcular:

- ¿Con qué aceleración desliza el bloque por el plano?
- ¿Cuál es la tensión de la cuerda?



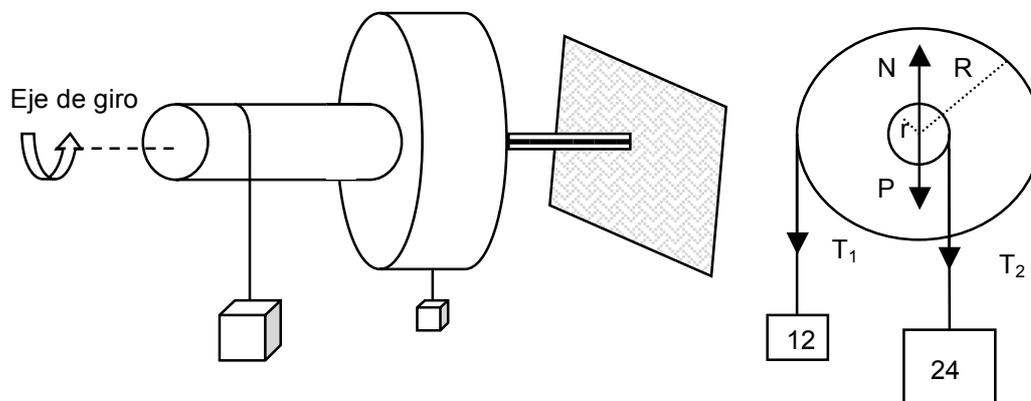
7.43) Un disco uniforme con una masa de 120 kg y un radio de 1,4 m rueda inicialmente con una velocidad angular de 1.100 rev/min.

- a) A una distancia radial de 0,6 m se aplica una fuerza tangencial. ¿Qué trabajo debe realizar esta fuerza para detener el disco?
- b) Si la rueda se detiene en 2,5 min., ¿Qué momento produce la fuerza? ¿Cuál es la magnitud de la fuerza?
- c) ¿Cuántas revoluciones da la rueda en estos 2,5 min.?

7.44) Una rueda pose una delgada llanta de 3,0 kg y cuatro radios, cada uno de masa 1,2 kg. Determinar la energía cinética de la rueda al rodar sobre una superficie horizontal a la velocidad de 6,0 m/s.

7.45) Las ruedas de una bicicleta tienen un radio de 35 cm y una masa de 0,6 kg cada una. La bicicleta acelera uniformemente de 0 a 36 km/h en 100 s. a) Hallar la aceleración angular de las ruedas; b) hallar la energía cinética total de las ruedas en el instante  $t = 100$  s (se considera que el 25 % de la masa de la rueda se concentra en la llanta y el 75 % en el eje; c) repetir el apartado anterior si las ruedas son lenticulares (la masa de la rueda se considera distribuida de forma uniforme en todo el disco).

7.46) Dos cilindros homogéneos de 10 kg de masa cada uno, se pegan para formar el mecanismo de la figura, que puede girar sin rozamiento respecto al eje que está unido a la pared. Los radios de los cilindros son  $R = 0,4$  m y  $r = 0,1$  m. Del cilindro mayor radio se cuelga un bloque de 12 kg y del de menor radio uno de 24 kg. Dibujar todas las fuerzas sobre la polea. Explica por qué el conjunto gira en el sentido contrario a las agujas del reloj (sin resolver el sistema de ecuaciones). Cuando la masa de 12 kg ha descendido 1 m partiendo del reposo, ¿cuánto ha ascendido la de 24 kg? Calcular la velocidad del bloque de 12 kg en ese instante. ¿Qué utilidad puede tener un mecanismo de este tipo?



7.47) El objeto de la figura es macizo y homogéneo; las masas de los cilindros son  $M_1 = M_2 = 2.500 \text{ kg}$  y  $M_3 = 69,5 \text{ kg}$ ; sus radios son  $R_1 = R_3 = 0,6 \text{ m}$  y  $R_2 = 0,1 \text{ m}$ . a) hallar su momento de inercia respecto al eje  $OO'$  y respecto al eje  $AA'$ ; b) hallar la velocidad angular si el objeto gira respecto a  $OO'$  con momento angular  $L = 20 \text{ kg m}^2/\text{s}$ ; c) hallar el tiempo que el objeto tarda en hundirse en un lago de  $40 \text{ m}$  de profundidad partiendo del reposo (despreciar rozamientos).

