

## Tema 8:

### Intersección de superficies. Aplicaciones al dibujo técnico.

#### Consideraciones generales.

El proceso para obtener la intersección de dos superficies  $S1$  y  $S2$ , se desarrolla como sigue (figura 1):

1. Por medio de una superficie auxiliar  $\alpha$  (que generalmente es un plano) se obtiene la intersección con cada una de las superficies:

$$\alpha \cap S1 = i_{\alpha S1}; \quad \alpha \cap S2 = i_{\alpha S2}$$

2. Los puntos comunes a ambas intersecciones, son puntos de la intersección de ambas superficies:  $i_{\alpha S1} \cap i_{\alpha S2} = I1, I2, \dots$  son puntos de la intersección solución.

3. Repitiendo la construcción con otras superficies auxiliares, cada una de ellas determina nuevos puntos, que unidos ordenadamente, dan la intersección buscada.

La condición que han de cumplir las superficies auxiliares es que corten a las dadas según líneas sencillas y fáciles de determinar. En el caso del ejemplo que se muestra en la figura 1, las superficies auxiliares son planos como el  $\alpha$ , siendo las intersecciones con el cono y esfera  $i_{\alpha S1}$ ,  $i_{\alpha S2}$ , círculos, que se cortan en los puntos  $I1$  e  $I2$  de la intersección solución.

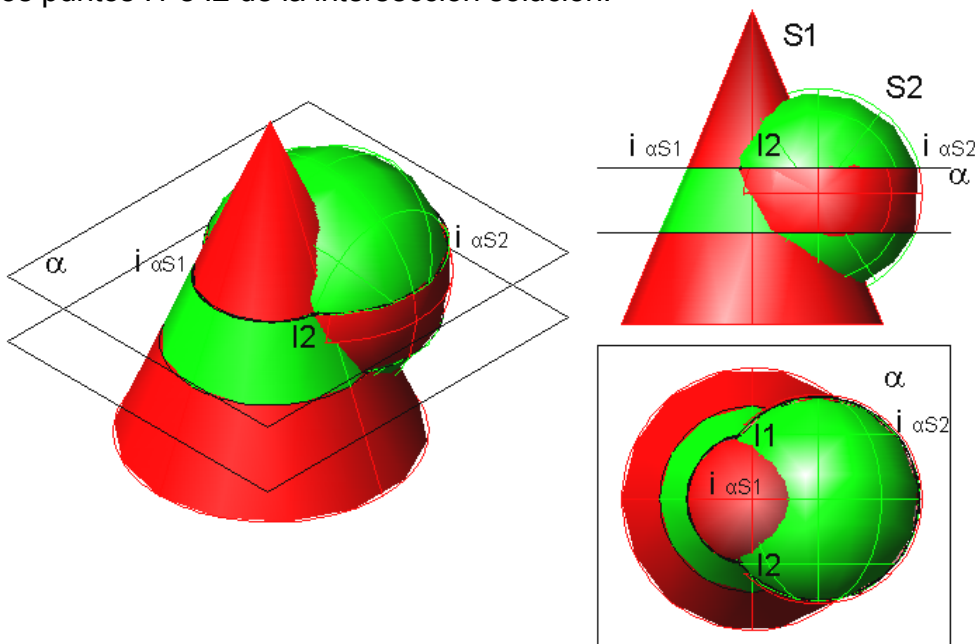


Figura 1. Intersección entre cono y esfera.

#### Intersección de superficies regladas desarrollables.

La intersección entre superficies regladas se obtiene empleando planos auxiliares que pasen por sus vértices. Así:

- si son dos figuras de vértice propio (conos, pirámides o cono-pirámide), por la línea que une sus vértices  $V1-V2-T$  (figuras 2, 6),
- si es una figura de vértice propio y otra impropio (cono-cilindro, prisma-pirámide, cono-prisma, pirámide-cilindro) por la línea  $r(V, T)$  que pase por el vértice del cono y sea paralela a las generatrices del cilindro (figuras 3, 7,8).
- si son dos figuras de vértice impropio (cilindros, prismas o prisma-cilindro) por un punto se hacen pasar dos rectas paralelas  $s, t$ , a las generatrices de los cilindros  $g1$  y  $g2$ , las cuales definen un plano, cuya traza con el horizontal es  $\delta 1$ . Los planos auxiliares son paralelos al plano  $\delta(s, t)$  obtenido (figuras 4, 5).

De este modo las intersecciones  $i_{\alpha S1}$ ,  $i_{\alpha S2}$ , de los planos auxiliares con las superficies son rectas, que se cortan respectivamente en puntos  $I1, I2, \dots$  de la intersección solución.

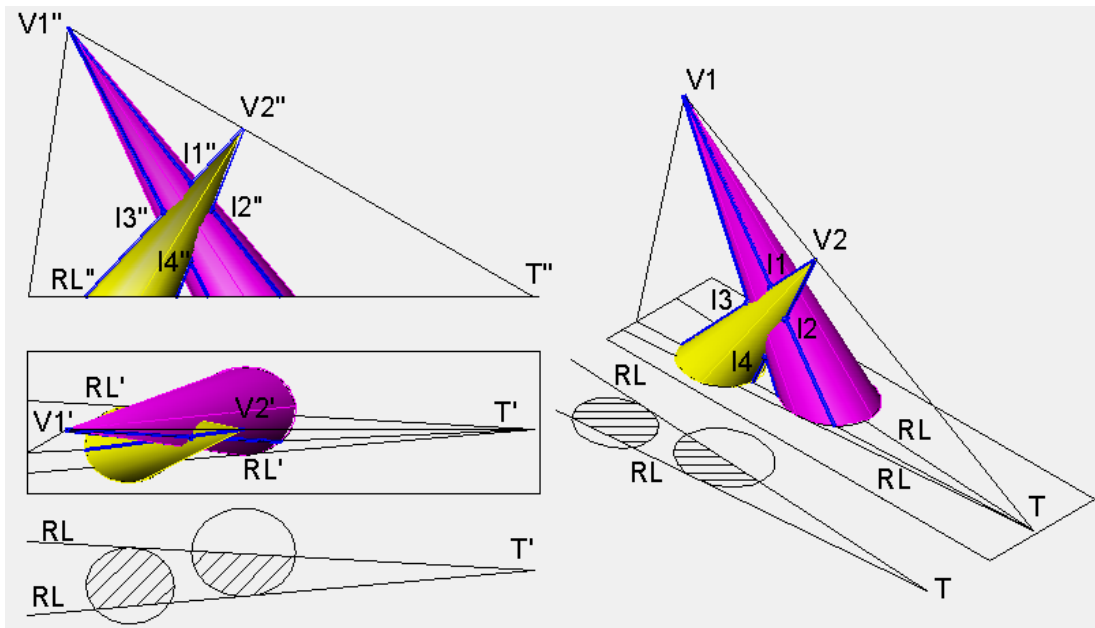


Figura 2. Intersección cono-cono. Planos límite: RL-V1-V2. Mordedura.

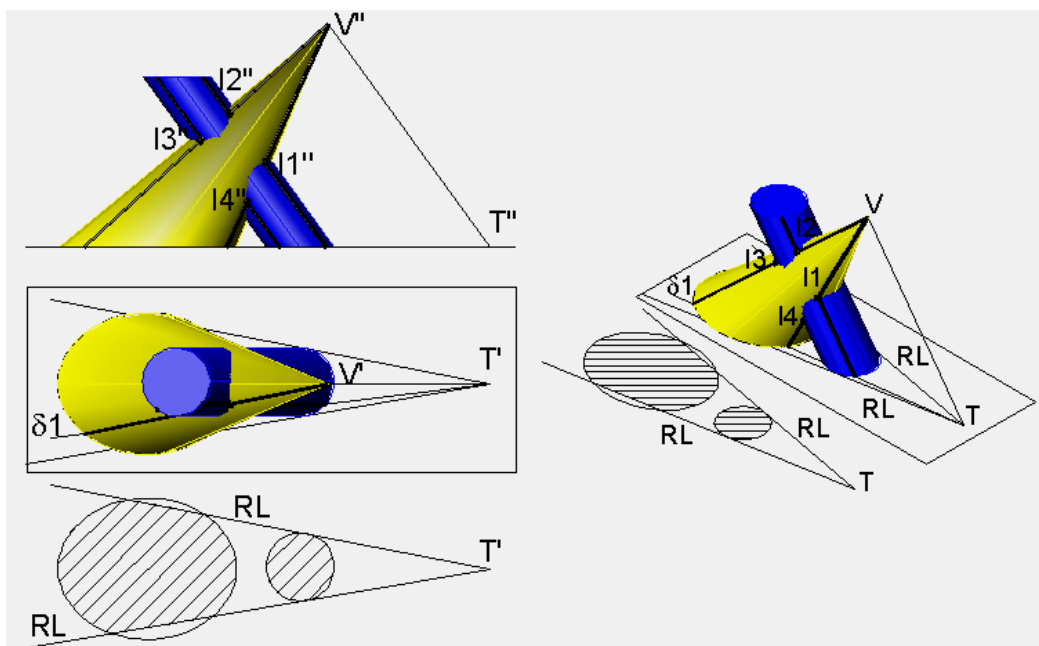


Figura 3. Intersección Cono-cilindro. RL-V. Penetración.

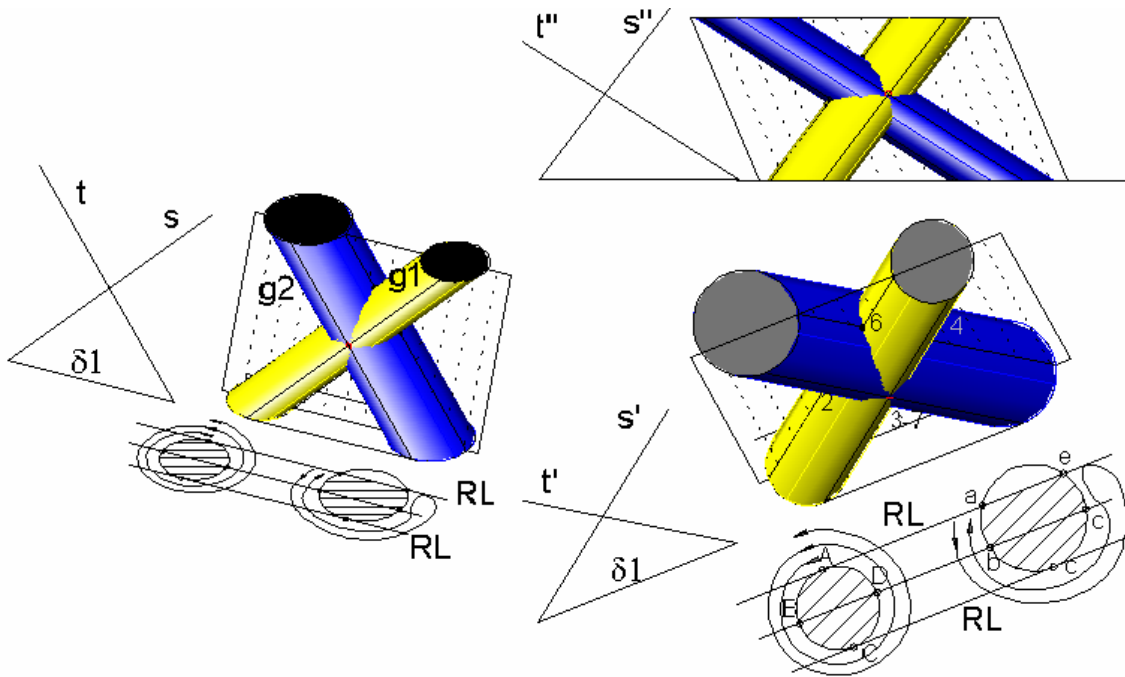


Figura 4. Intersección Cilindro-cilindro.  $\delta(t,s)$ . Límite sencillo.

La intersección se encuentra entre dos planos límite, definidos por las rectas RL y la línea antes indicada, V1-V2-T,... según el caso. El procedimiento para realizar gráficamente la intersección (figura 4) consiste en:

- trazar algunos planos auxiliares que estén entre las rectas límite,
- obtener las generatrices intersección respectivas,
- obtener los puntos intersección de las generatrices correspondientes,
- finalmente, **unir ordenadamente** los puntos de la intersección solución.

En el caso de la figura 4, para unir ordenadamente los puntos de la intersección, se sigue el orden que se muestra al analizar las bases de los cilindros, de las que salen las generatrices que dan lugar a los puntos de la intersección.

A – a = 1	A – e = 5	A – a = 1 Cierre
B – b = 2	B – d = 6	
C – c = 3	C – c = 7	3-7 Punto doble.
D – d = 4	D – b = 8	

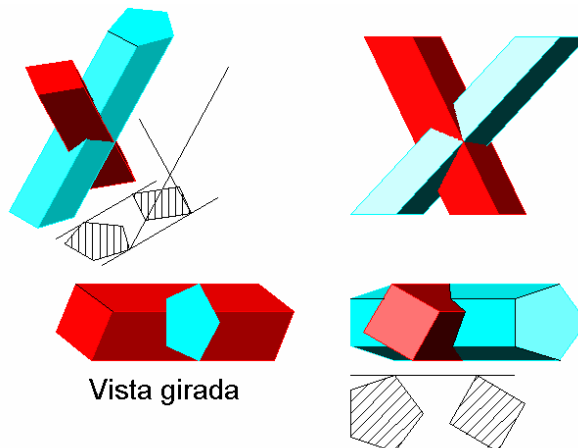


Figura 5. Intersección Prisma-prisma. Límite doble.

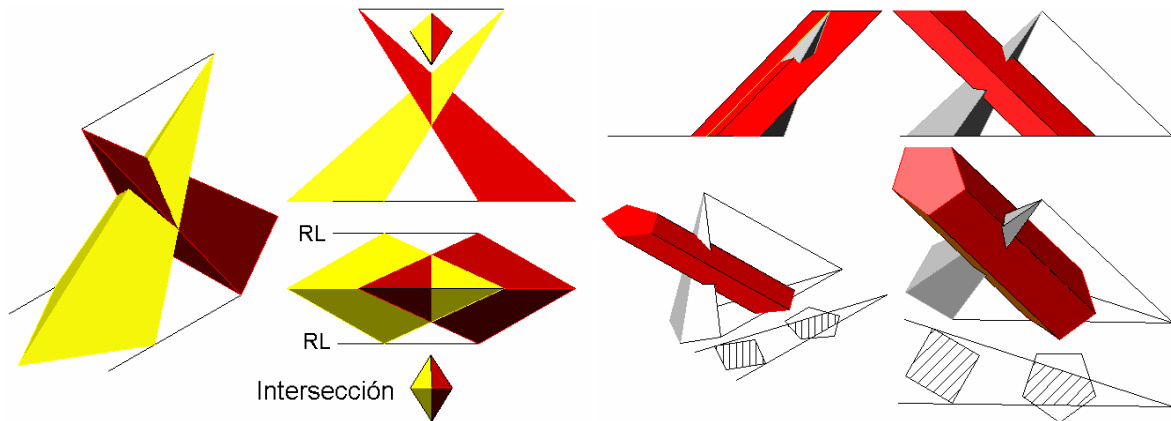


Figura 6. Intersección Pirámide-Pirámide (Límite doble), Pirámide-Prisma (Penetración).

Los tipos de intersección de superficies que pueden darse son, figura 6:

- a) penetración (figura 3,6,7); que da lugar a una curva alabeada con dos ramas independientes (sin puntos comunes), una de entrada y otra de salida.
- b) mordedura (figura 2,7); que da lugar a una curva alabeada.
- c) límite sencillo (figura 4); que da lugar a una curva alabeada, con dos ramas, una de entrada y otra de salida, pero que tienen un punto común.
- d) límite doble (figura 5,6,8); que da lugar a una curva, con dos ramas, una de entrada y otra de salida, pero con dos puntos comunes. Este caso será objeto de estudio más detallado, por sus interesantes aplicaciones al dibujo técnico.

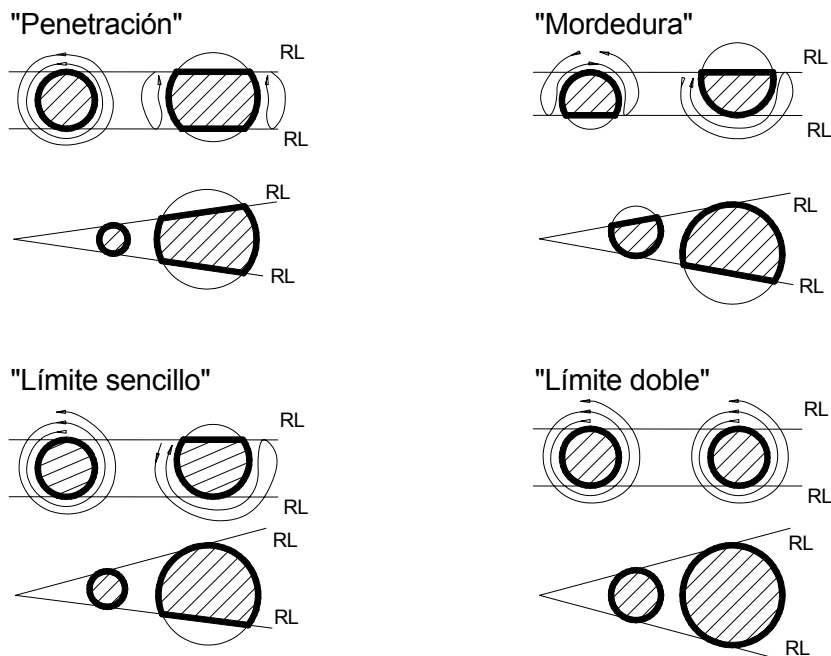


Figura 6. Análisis del tipo de intersección a partir de las bases y de las rectas límite.

Si las figuras están apoyadas en planos diferentes, la obtención de los planos límite se realiza de forma similar, según se muestra en las figuras 7 y 8.

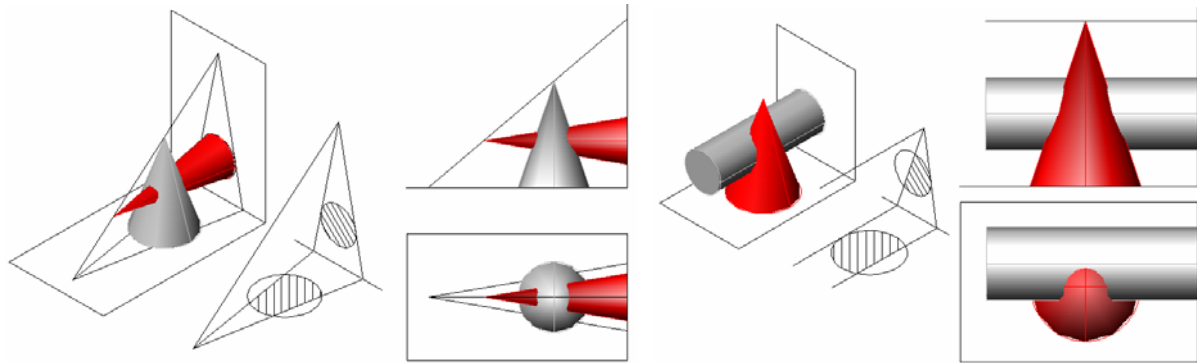


Figura 7. Intersección de figuras apoyadas en planos diferentes.

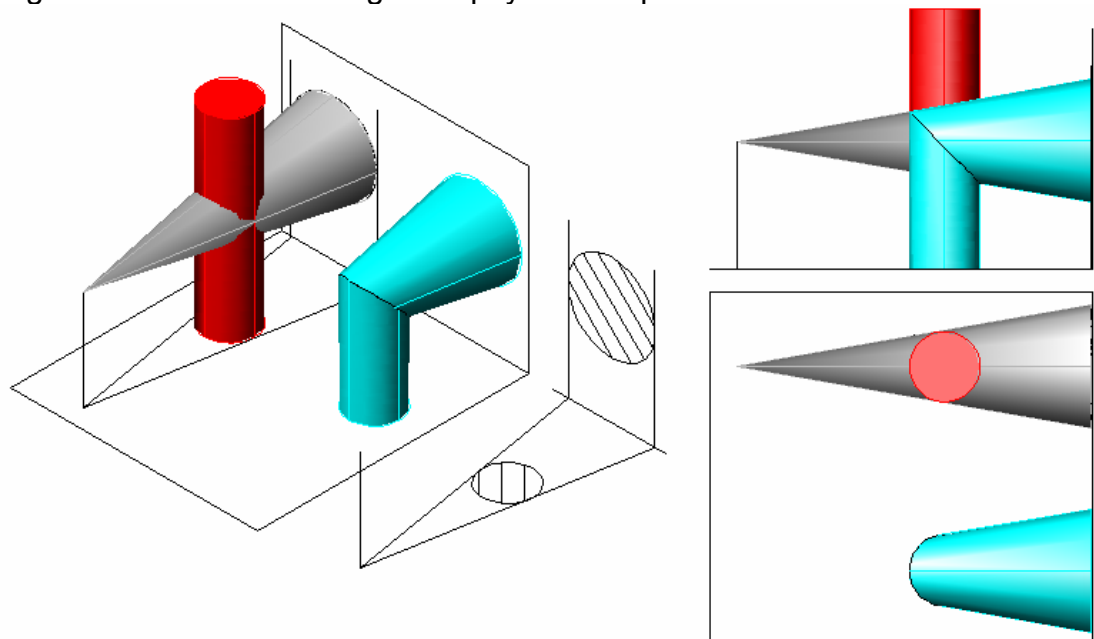


Figura 8. Intersección cilindro-cono, límite doble. Formación de un codo.

Estas operaciones son de ejecución inmediata en los programas CAD usualmente empleados.

### Aplicaciones al dibujo técnico.

Las aplicaciones al dibujo técnico de las intersecciones que se han visto, están relacionadas con la ingeniería, por ejemplo, con temas de calderería o conducciones de fluidos, así como con la arquitectura.

Vista la obtención gráfica de la curva intersección de dos superficies radiadas, que es una curva alabeada, se van a pasar a analizar ciertos casos particulares que son de gran aplicación y cuya obtención es más sencilla.

En las cuádricas (superficies de 2º orden), la intersección resultante es una curva de 4º grado y puede ser continua o discontinua, es decir, que esté constituida por una o dos líneas alabeadas (según los casos: penetración, mordedura, límite sencillo o límite doble).

Sin embargo, hay ciertas intersecciones (figura 9), que dan lugar a curvas planas, como las que cumplen el Teorema de Monge:

“Dos superficies de 2º orden (cuádricas) circunscritas alrededor de una tercera superficie de 2º orden (la más sencilla, la esfera) o inscritas a la misma, se intersecan por dos curvas de 2º orden (cónicas)”.

Si además cumplen la siguiente propiedad geométrica, se simplifica notablemente su representación (figura 9):

Si dos cuádricas tienen un plano principal común y su intersección se compone de dos curvas planas, estas se proyectan ortogonalmente sobre dicho plano según dos segmentos de recta.

Los casos que se van a ver a continuación, cumplen estos requisitos y son superficies radiadas que se circunscriben a una esfera, los cuales son de aplicación en codos, injertos o bifurcaciones de superficies.

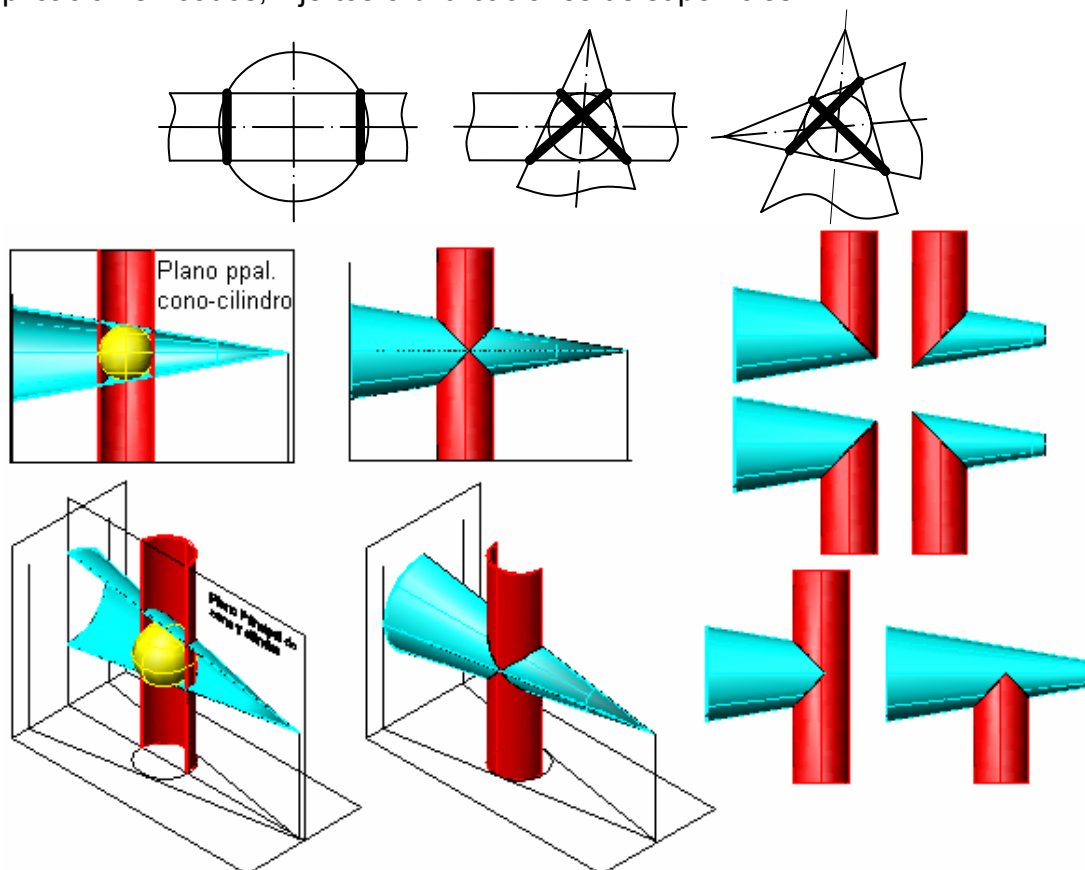


Figura 9. Intersecciones planas de cuádricas. Codos e injertos.

En el caso que se muestra en la figura 9, en la intersección del cono con el cilindro, se aprecia que si se toman dos de los tramos en que divide la intersección, se forma un codo cuya unión es una curva plana, de la que se puede obtener, con sencillez, el desarrollo de cada una de las partes del mismo. Análogamente, si se toman tres de los tramos, se forma un injerto. En la figura 10, se muestran bifurcaciones, en las que la intersección se realiza con tres superficies.

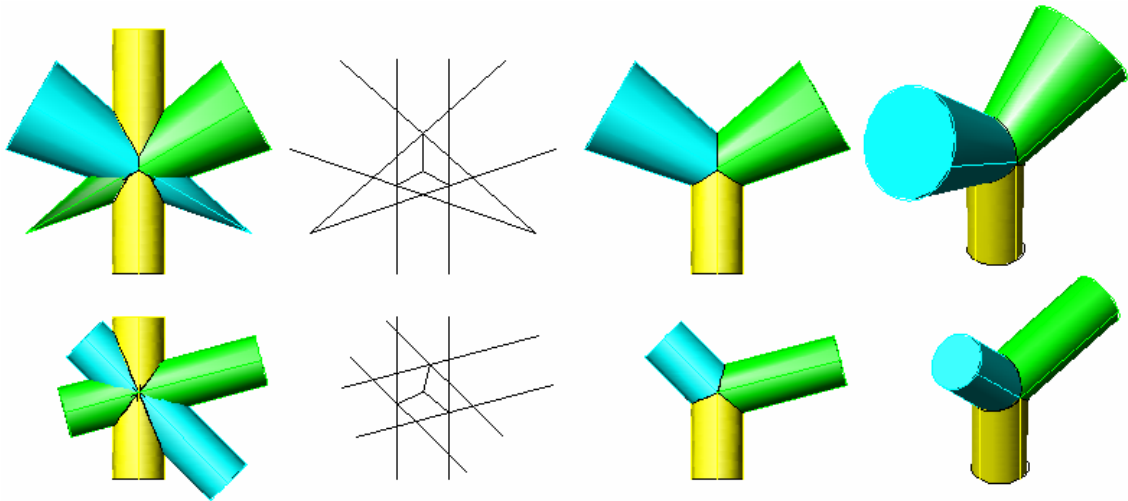
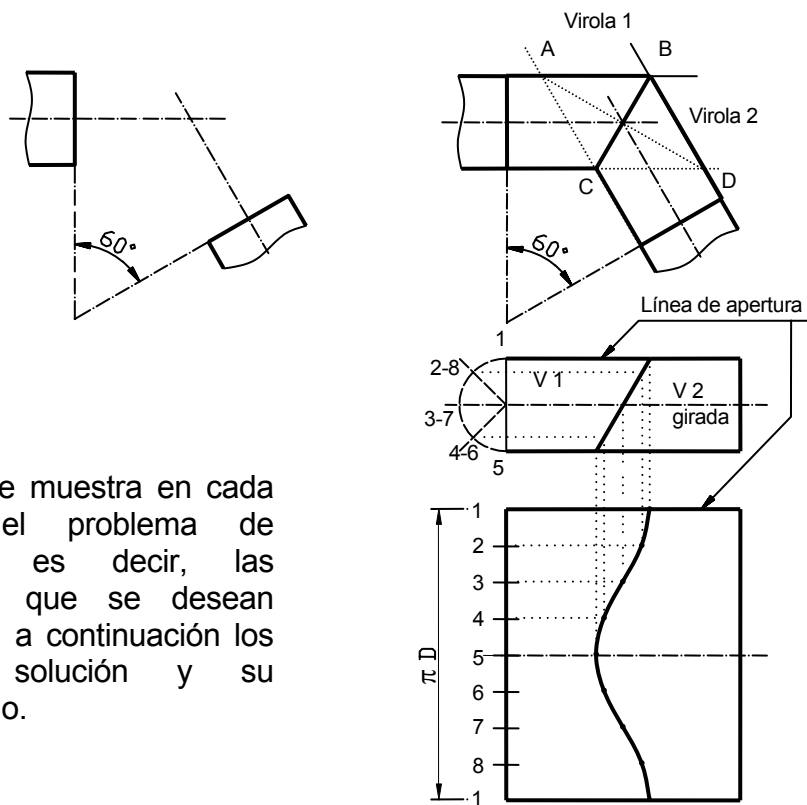


Figura 10. Bifurcaciones. Superficies que intervienen y resolución.

**Resolución de codos de dos o más virolas (cónicos, cilíndricos y mixtos).**

Un codo es la unión de los extremos de dos tuberías, cuyos ejes se cortan o son paralelos, es decir, pueden estar las bocas formando un ángulo cualquiera o ser paralelas. Se van a resolver diversos casos, en los que se va a obtener la intersección y el desarrollo correspondiente sobre una superficie plana, de modo que a partir de éste, se pueda construir dicho codo.



Se muestra en cada figura el problema de partida, es decir, las tuberías que se desean resolver, a continuación los codos solución y su desarrollo.

Figura 11. Resolución de un codo con dos virolas. Desarrollo.

Con el objeto de suavizar la curvatura del codo, se suelen realizar más de dos virolas (figura 12). Definido el número de virolas, se obtiene el ángulo que abarcan, sabiendo que el enlace con la boca de la tubería se realiza con media virola, ya que enlazan la sección elíptica de una virola con la circular de la boca. De este modo el ángulo de la virola es:

$$\text{Áng...virola} = \frac{\text{Áng...bocas}}{n^{\circ} \text{ virolas} - 1}$$

El desarrollo de los codos (figuras 11 y 12) se realiza girando 180° alternativamente las virolas, de este modo el codo se transforma en un cilindro recto y se puede obtener a partir de una plancha rectangular.

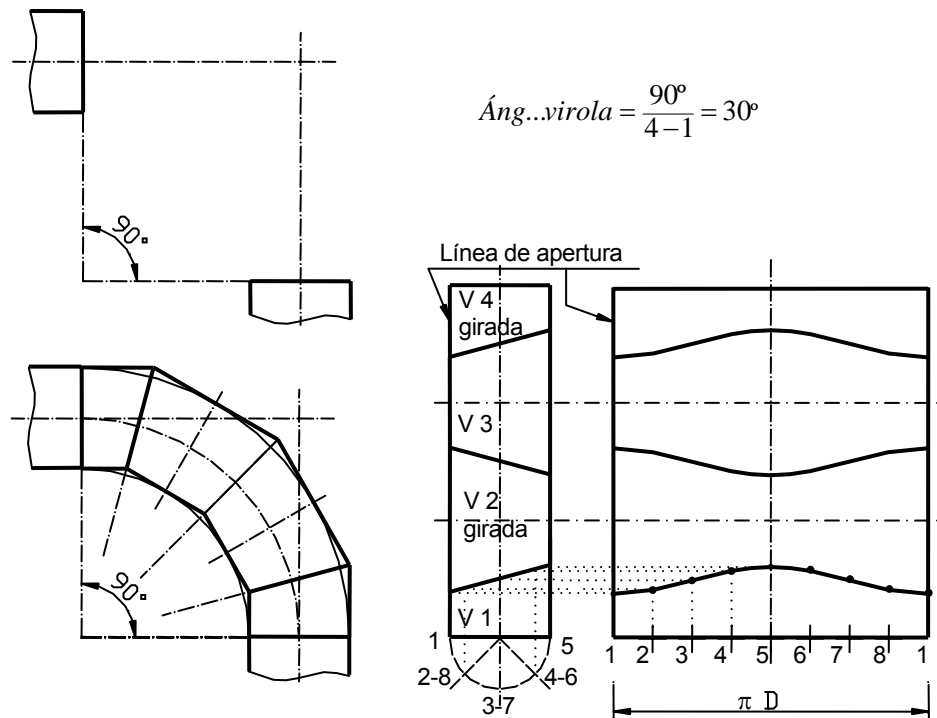


Figura 12. Resolución de un codo mediante cuatro virolas. Desarrollo.

En el caso de que se hayan de unir dos tubos con diferente diámetro, una de las soluciones más interesantes es realizar un codo con troncos de cono de modo que la reducción sea la misma en todo él. Los pasos a seguir son (figura 13):

1. Con centro en la intersección de los ejes, se gira uno de ellos hasta alinearlos, y se traza el cono correspondiente.
2. Se traza la esfera inscrita, con centro en el punto de giro anterior y se traza el cono deshaciendo el giro, obteniéndose el cuadrilátero ABCD, que sirve para resolver el codo.
3. El desarrollo se realiza desarrollando el tronco de cono obtenido inicialmente, del cual salen ambas virolas. La línea de apertura de una virola se halla girada 180° respecto a la otra.

En la figura 14 se muestran otras formas de resolución, combinando virola cilíndrica con cónica o dos cónicas de diferente conicidad.



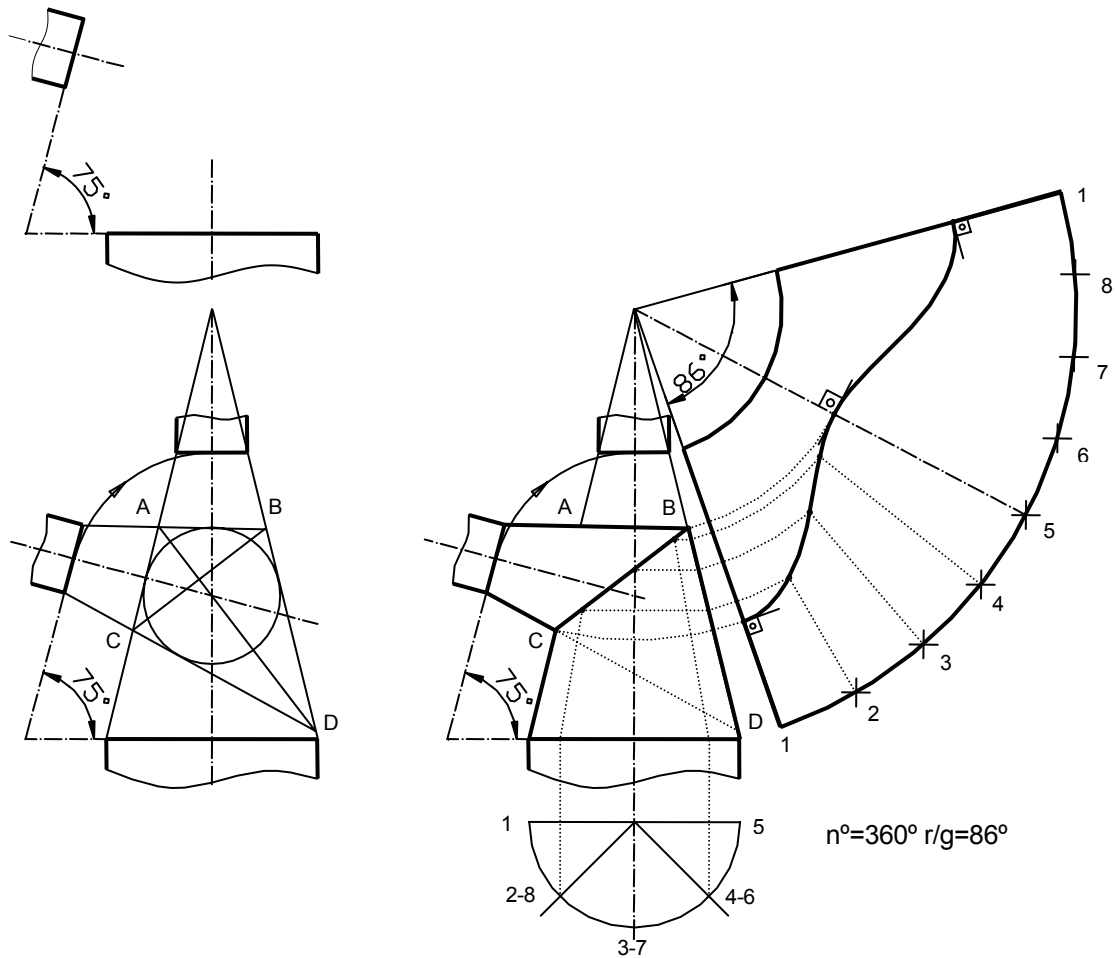


Figura 13. Resolución de un codo con dos virolas cónicas. Desarrollo.

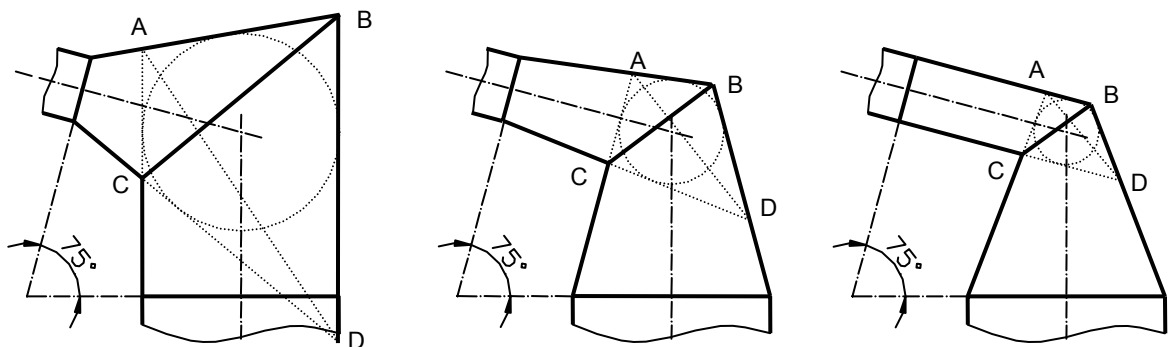


Figura 14. Otras formas de resolución del codo anterior.

Las figuras 15 y 16 muestran la resolución de codos con tres virolas de una misma superficie cónica, lo que facilita su construcción, teniendo las virolas el mismo ángulo de reducción. En la figura 15, se ha determinado la virola central trazando el eje tangente al arco que une los centros de las bocas y perpendicular a la bisectriz del ángulo que forman, aunque se podría haber determinado de otro modo. El resto de la construcción es parecida a la anterior.

En la figura 16, las bocas son paralelas. Para su resolución se ha hecho la unión por medio de arcos tangentes, que sirven de base para su resolución, como se muestra en la construcción auxiliar realizada.

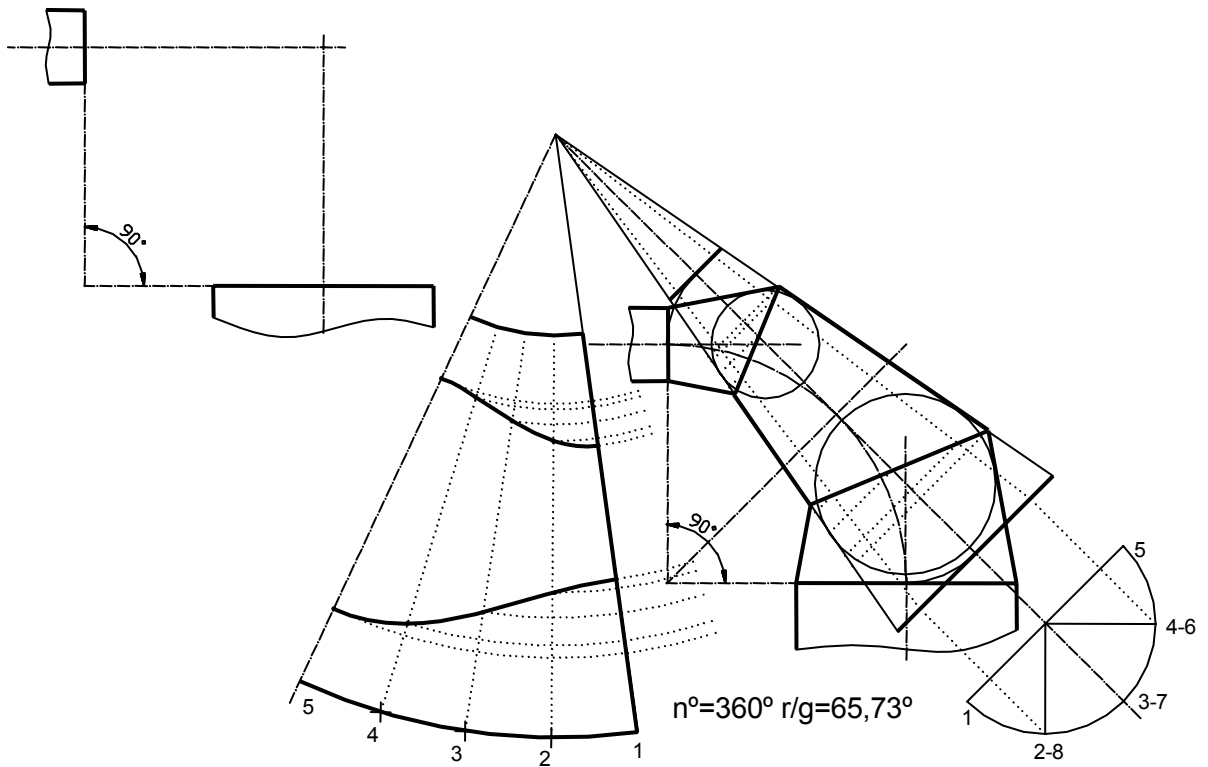


Figura 15. Resolución de un codo con tres virolas cónicas. Desarrollo.

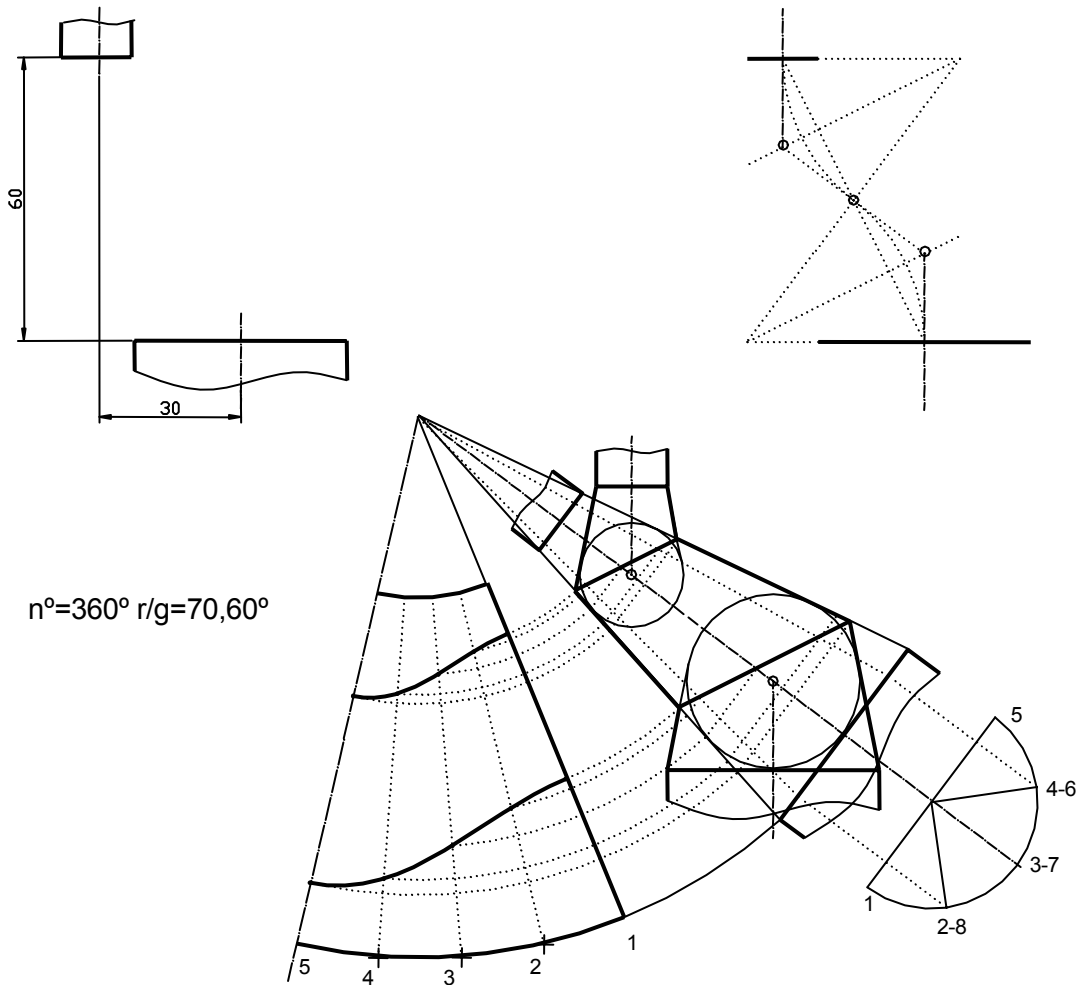


Figura 16. Unión de dos tubos paralelos con virolas cónicas. Desarrollo.

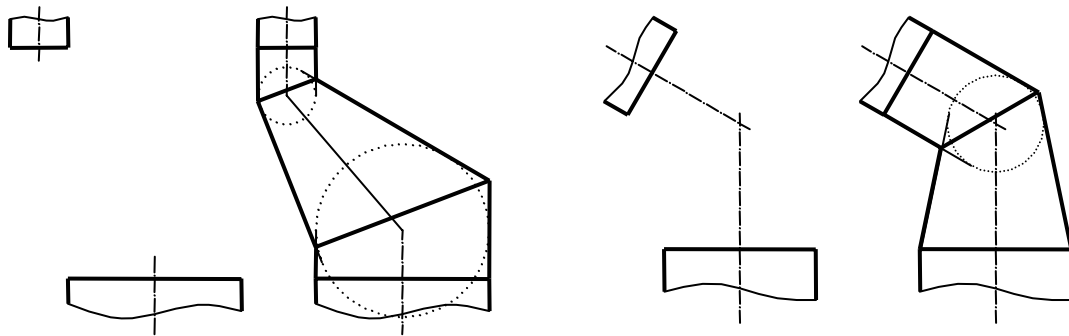


Figura 17. Unión de dos tubos con virolas cónicas y cilíndricas.

La figura 17 muestra otras posibles soluciones al codo propuesto en el caso anterior.

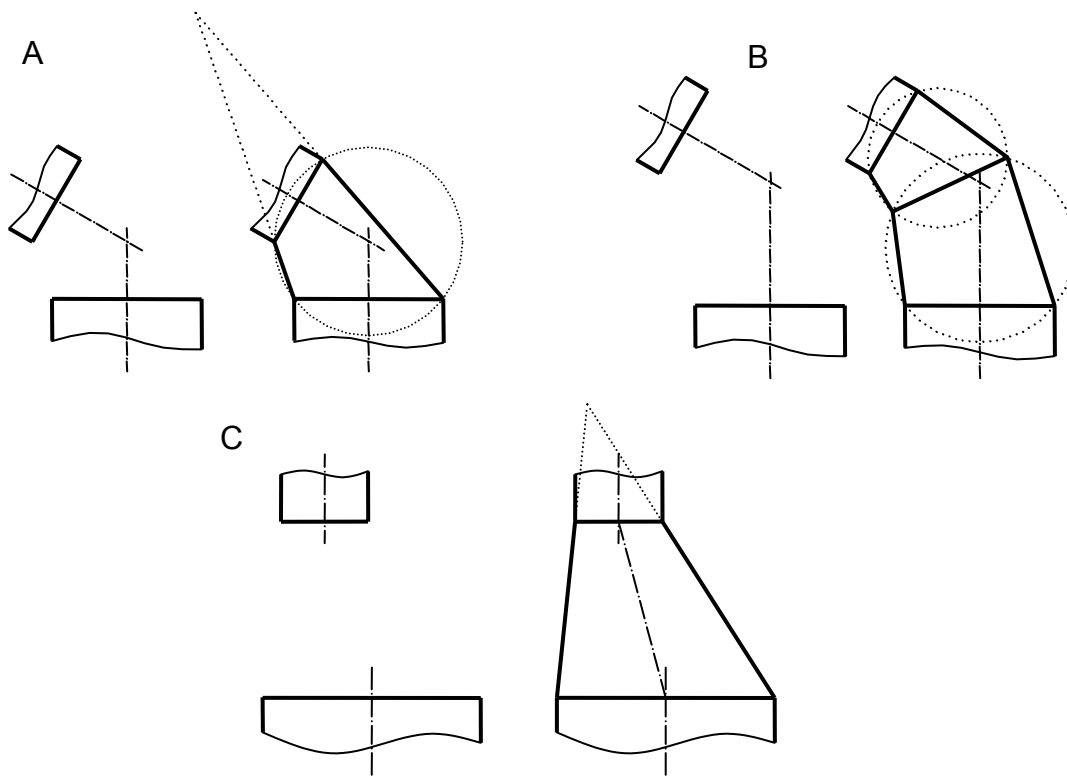


Figura 18. Resolución de un codo. A) dos bocas coesféricas, con una virola. B) con dos virolas, en la que la unión intermedia se elige coesférica con las dos bocas. C) dos bocas paralelas.

Otras formas de resolución de codos, en los que las superficies resultantes son también radiadas desarrollables (conos o cilindros) son:

1. Cuando las dos bocas circulares se encuentran en una misma esfera, el cono resultante tiene sección recta elíptica (figura 18 A y B). En el caso B se eligen las esferas por tanteo, para obtener la solución que se considere adecuada.
2. Cuando las dos bocas son paralelas, al ser homotéticas, resulta una superficie cónica (figura 18 C).

## Resolución de injertos.

Un injerto consiste en conectar un extremo de una tubería a un tramo de tubería (figura 19). Su resolución es similar a los codos, pero la intersección resultante son dos semidiagonales. Se resuelven los tres casos siguientes.

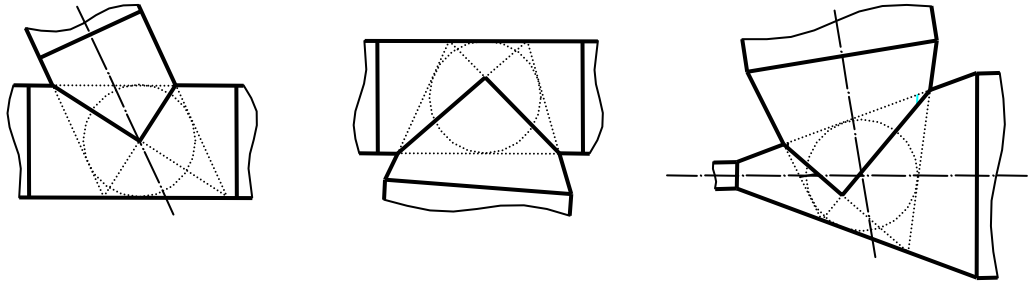
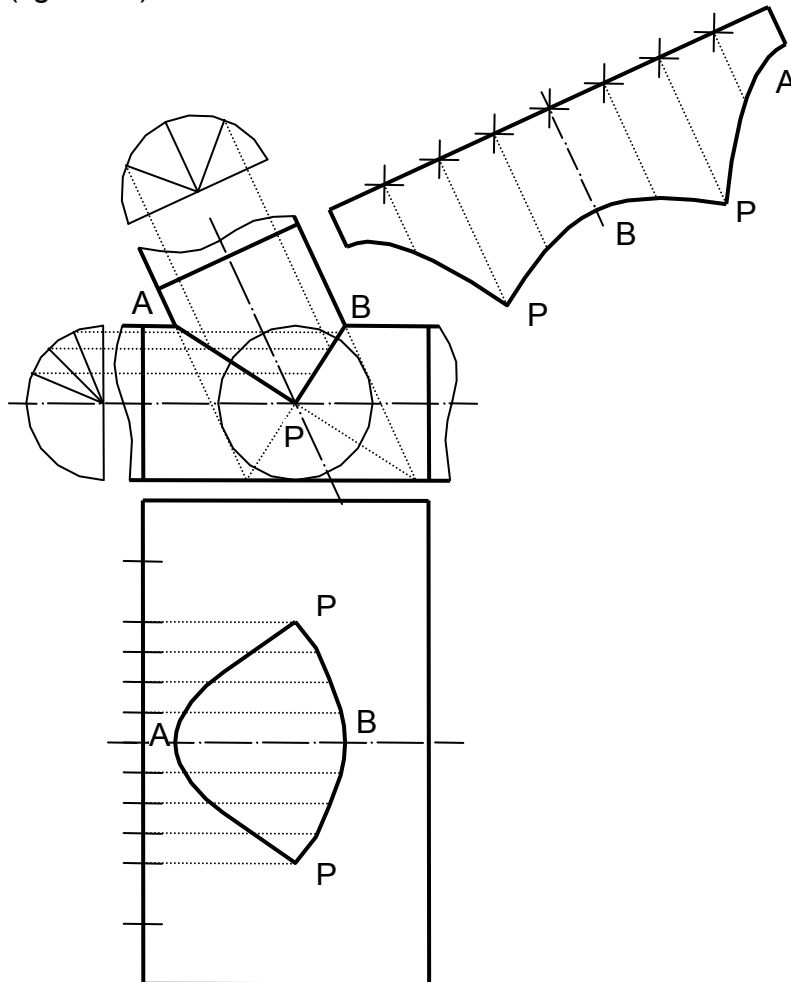


Figura 19. Injertos.

Ejemplo 1°. Injerto de una tubería cilíndrica, en otra de igual diámetro (figura 20).

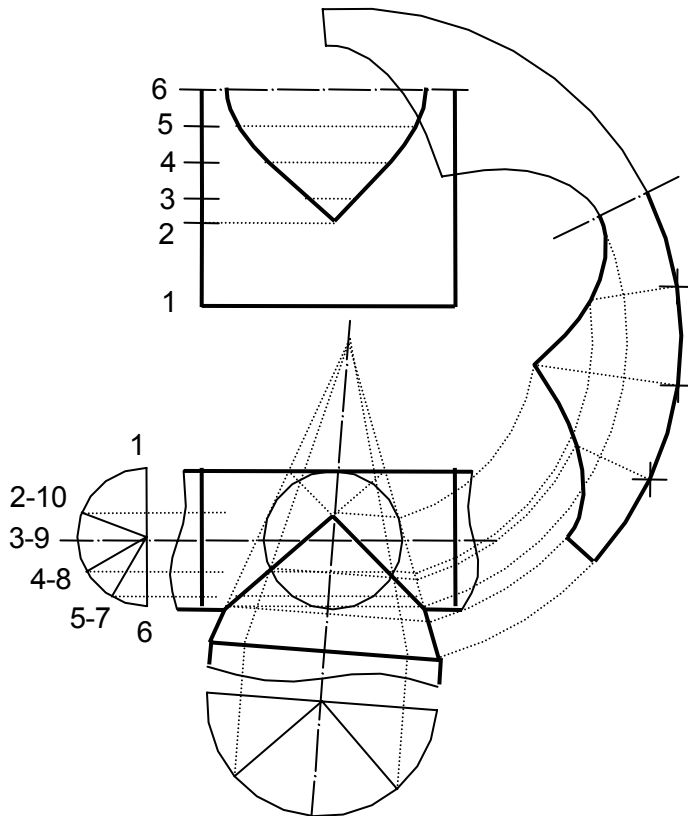


Se traza la esfera del mismo diámetro que los cilindros y se obtiene la intersección, que se corresponde con dos semidiagonales.

En el trazado del desarrollo de la intersección se tiene en cuenta que el punto P, de intersección de las diagonales, es anguloso, y los puntos A, B tienen la tangente perpendicular a las generatrices.

Figura 20. Resolución y desarrollo de un injerto de tubos cilíndricos.

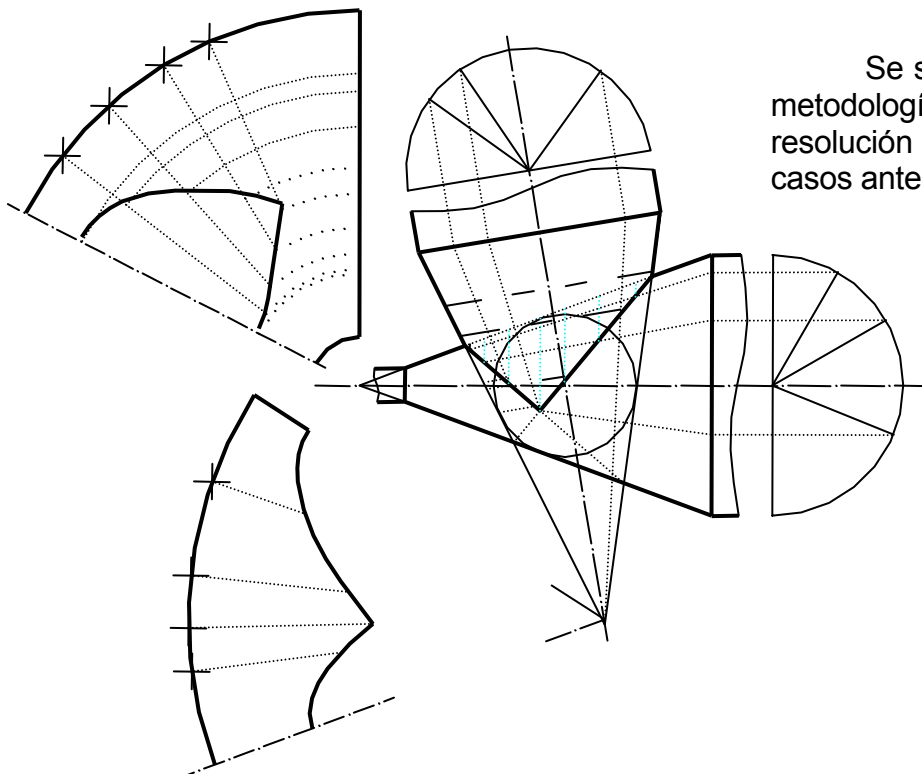
Ejemplo 2º. Injerto sobre una tubería cilíndrica de otra tubería de diferente diámetro (figura 21).



Se traza una esfera de diámetro el del tubo cilíndrico, y se circunscribe la correspondiente virola cónica, obteniéndose el cuadrilátero del que se seleccionan los semidiámetros que se corresponden con la intersección.

Figura 21. Injerto sobre un tubo cilíndrico de otro de distinto diámetro.

Ejemplo 3º. Injerto sobre una tubería cónica (figura 22).



Se sigue la misma metodología para su resolución que en los casos anteriores.

Figura 22. Injerto sobre una tubería cónica.

## Bifurcaciones.

Son conexiones de tres tuberías, es decir, intervienen tres superficies. El proceso de resolución es similar a los anteriores. Se van resolviendo dos a dos, siendo la intersección tres semidiagonales que se cortan en un punto, una por cada uno de los tres cuadriláteros que se pueden formar.

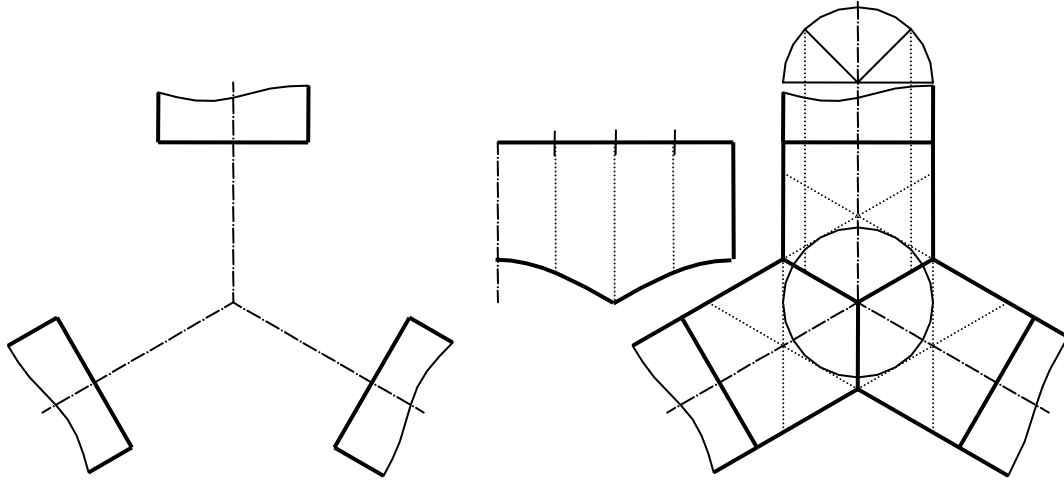


Figura 23. Bifurcación de tres tubos iguales a  $120^\circ$ , que se cortan en un punto. Las tres virolas son iguales.

En el caso de la figura 23, las tres bocas de los tubos son iguales y a  $120^\circ$ , resultando los tres codos iguales, por lo que sólo se ha representado medio desarrollo de uno de ellos. La esfera elegida para su resolución tiene el diámetro de los tubos.

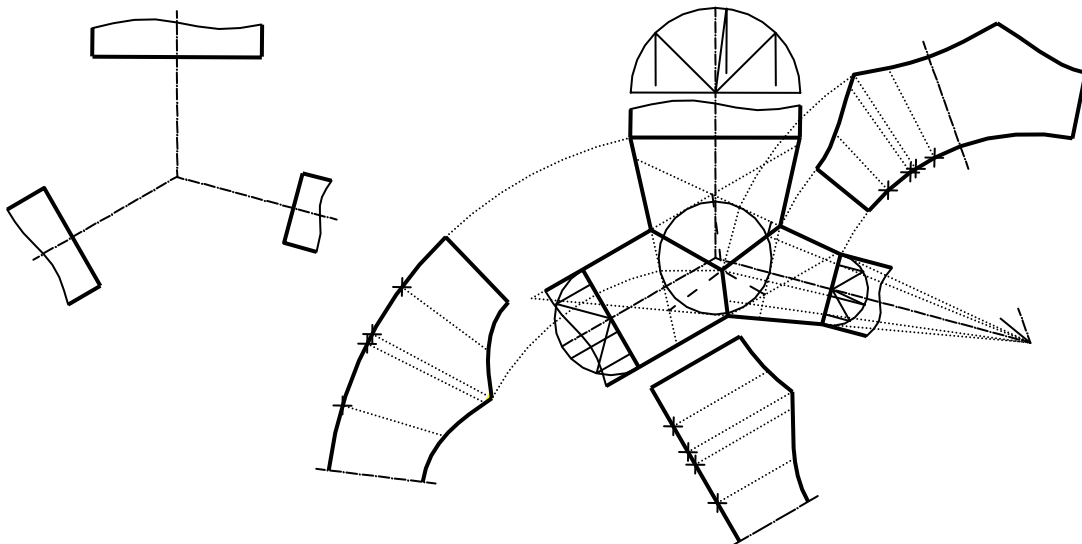


Figura 24. Bifurcación de tres tubos diferentes, que se cortan en un punto. Las tres virolas son diferentes.

En la figura 24, las tres bocas de los tubos son distintas y no guardan simetría, para su resolución se ha elegido una esfera de radio el del tubo intermedio, siendo las virolas de las otras dos bocas, superficies cónicas (obsérvese que la resolución de estas dos virolas, difiere un poco al estar el vértice del cono en el lado contrario de la boca)

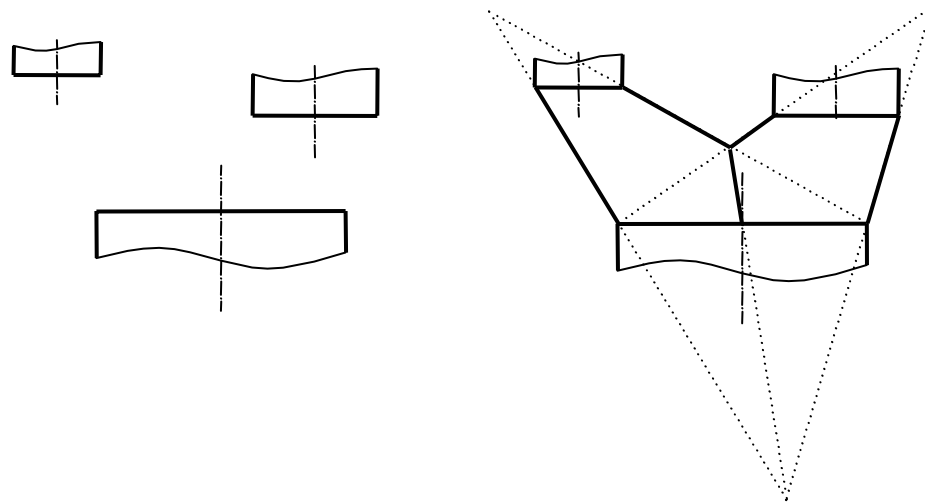


Figura 25. Bifurcación de tubos paralelos.

Hay casos en los que se pueden resolver los codos y bifurcaciones obteniendo la superficie radiada solución sin que esta no sea circunscrita a una esfera. Ya se indicó esto en la figura 18 para los codos y en las figuras 25 y 26 se indica para las bifurcaciones.

En la figura 25, la bifurcación se hace en bocas paralelas, por lo que son homotéticas y son secciones de un cono inclinado. Se observa que intervienen dos conos que tienen una base común y se muestra como obtener su intersección. En la figura 26, dos de las bocas son paralelas y dos de ellas son coesféricas.

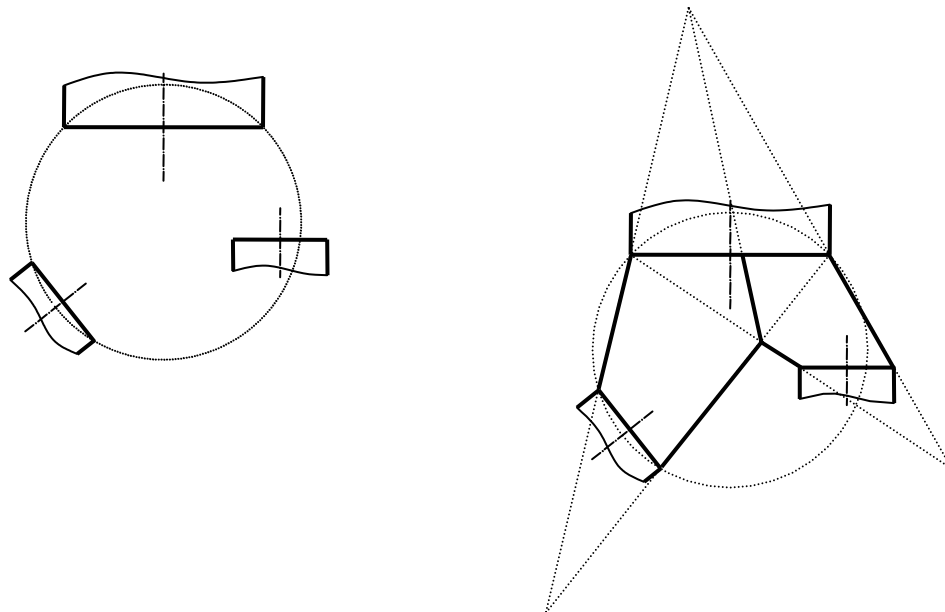


Figura 23. Bifurcación de tubos cuyas bocas son coesféricas y paralelas.