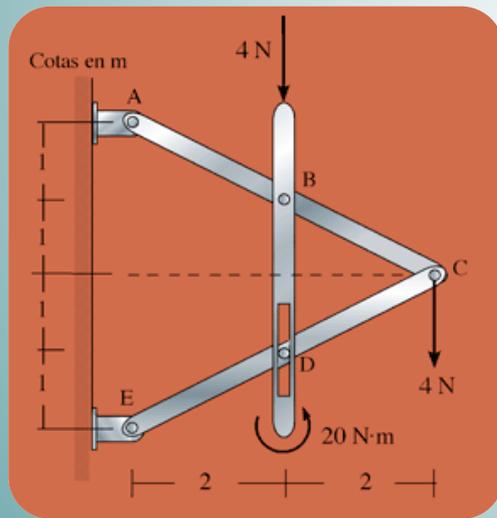


Mecánica

Tema 01. Vectores. Centros de gravedad. Cargas distribuidas.



Cecilia Pardo Sanjurjo

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

- **Vectores. Sistemas de vectores deslizantes**
- **Centros de gravedad**
- **Cargas distribuidas**

Vectores. Sistemas de vectores deslizantes

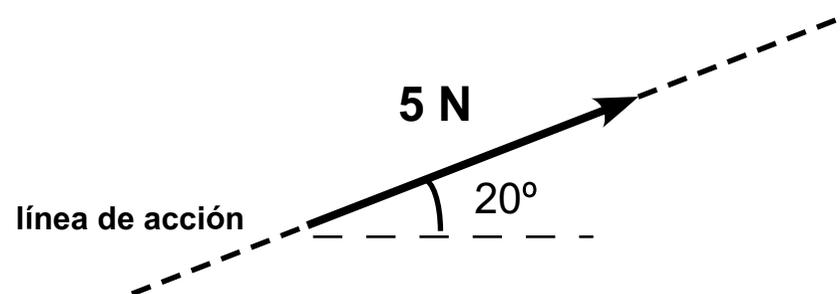
Segmentos orientados ideales para representar magnitudes de las que es necesario especificar tamaño, dirección y sentido

Módulo: tamaño del vector

Dirección: orientación del segmento (por ejemplo mediante ángulos)

Sentido: indicado por la punta de la flecha

Línea de acción: recta que contiene la dirección del vector (recta soporte)



Tipos de vectores

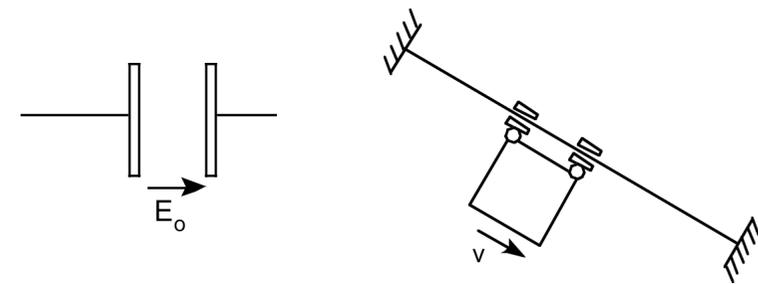
Libres: dos vectores libres son iguales si tienen mismo módulo, dirección y sentido, no importa su punto de aplicación

Ligados: dos vectores ligados son iguales si tienen mismo módulo, dirección, sentido y punto de aplicación

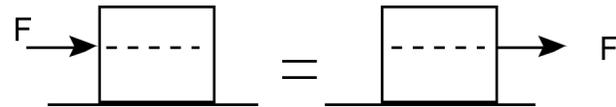
Deslizantes: dos vectores deslizantes son iguales si tienen mismo módulo, dirección y sentido, y la misma línea de acción

Ejemplos:

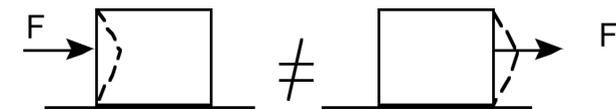
Vector libre: vectores constantes en una zona



Vectores deslizantes: fuerzas en sólidos rígidos

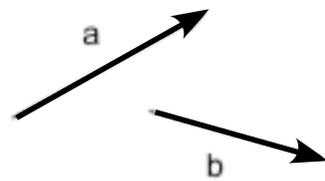


Vector ligado: fuerzas en sólidos deformables

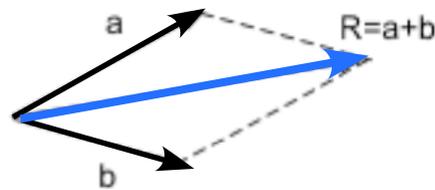


Suma o composición de vectores

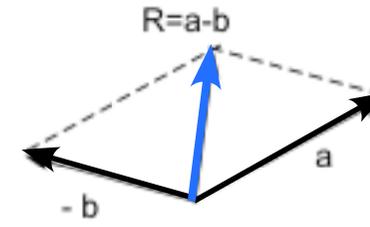
Libres: se suman en cualquier punto siguiendo la regla del paralelogramo; el resultado es un vector libre que se puede llevar a cualquier punto de aplicación.



vectores libres

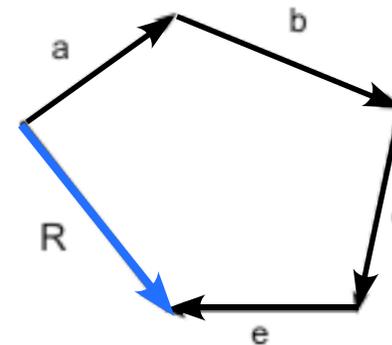
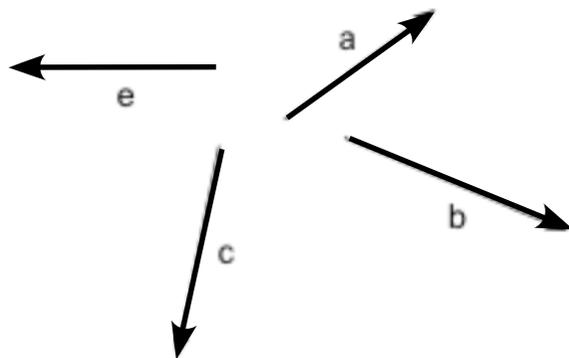


Suma

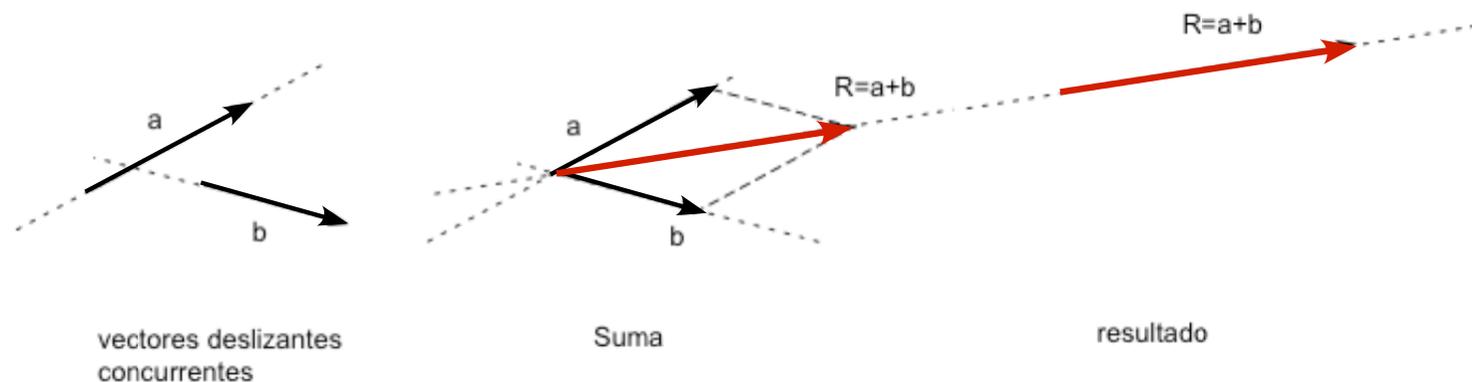


resta

Varios vectores: uno a continuación de otro, la resultante R va del origen del primero a la punta del último dibujado

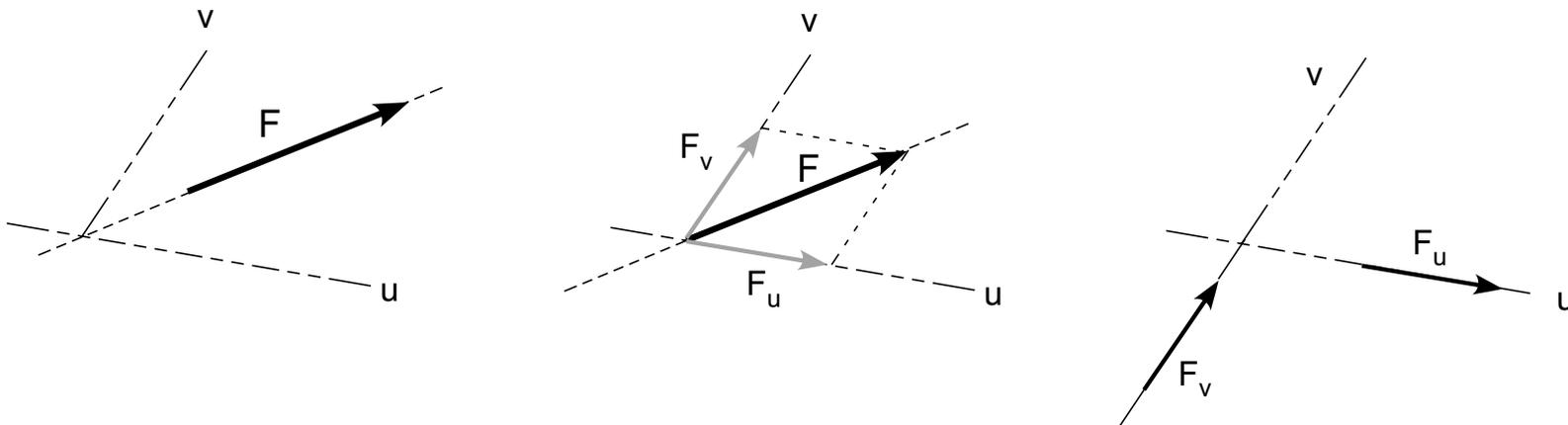


- **Ligados:** Únicamente se pueden componer o descomponer si están aplicados en el mismo punto. El vector resultante está ligado a ese punto.
- **Deslizantes:** Se pueden sumar o descomponer si sus líneas de acción se cortan, en ese caso se llevan los vectores a ese punto común y se componen o descomponen con la regla del paralelogramo. El vector resultante puede deslizarse a lo largo de su línea de acción.



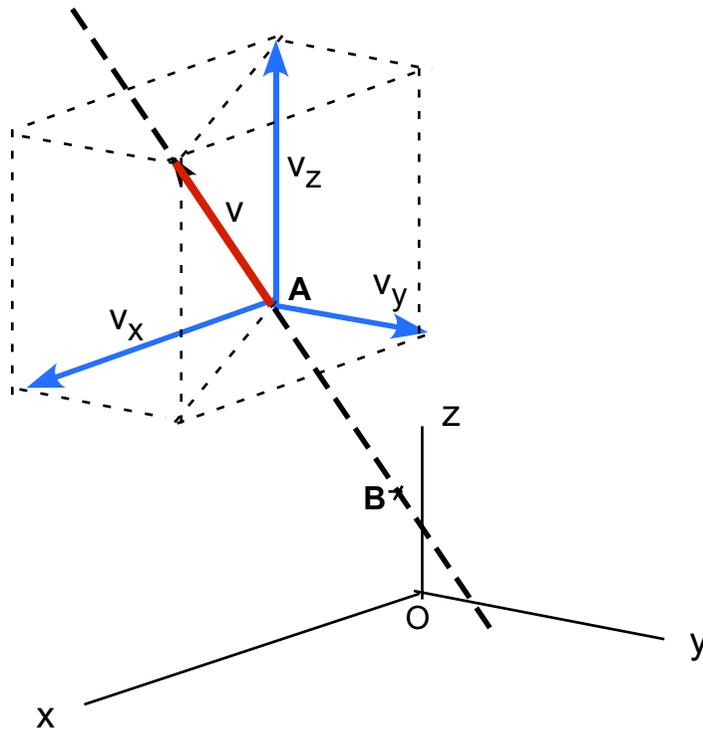
Descomposición en dos direcciones u , v

Las direcciones u y v han de concurrir en la línea de acción del vector a descomponer si se trata de un vector deslizante



Componentes rectangulares

Elegido un sistema de ejes cartesianos Oxyz es cómodo dar el vector v como:



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

Siendo v_x , v_y , v_z las componentes del vector en las direcciones de los ejes

Módulo del vector $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

- Si el vector fuese ligado hay que dar su punto de aplicación: (el punto A)
- Si se tratase de un vector deslizante habría que dar un punto de su línea de acción, por ejemplo el B:

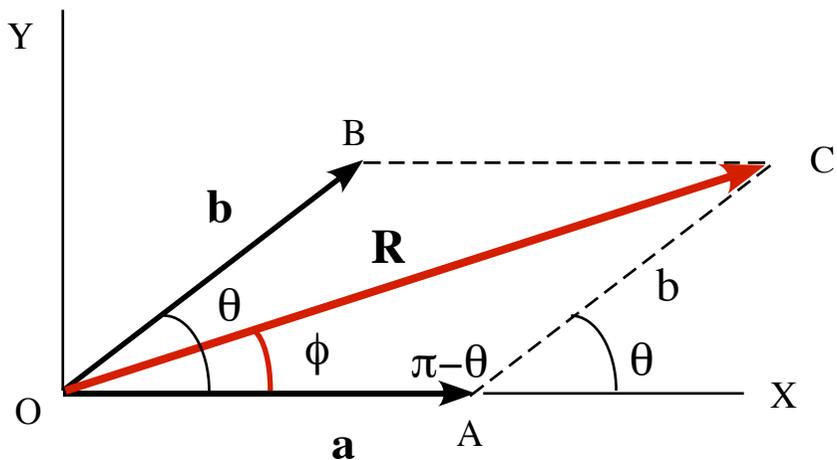
$$B (b_x, b_y, b_z)$$

Si los vectores se pueden sumar:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \text{ y } \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

$$R_x = a_x + b_x \quad R_y = a_y + b_y \quad R_z = a_z + b_z$$



Si se conoce el módulo de los vectores que se quieren sumar y el ángulo que forman, se puede utilizar el teorema de coseno para hallar el módulo de R

Utilizando el teorema del cos en OAC:

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta$$

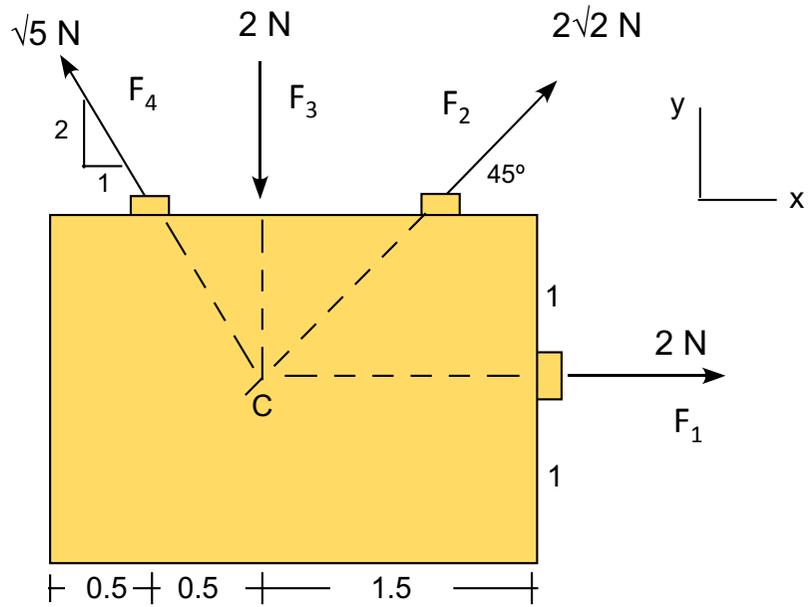
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

El ángulo ϕ se puede hallar del teorema del seno en OAC:

$$\frac{b}{\text{sen} \phi} = \frac{R}{\text{sen}(\pi - \theta)} \rightarrow \text{sen} \phi = \frac{b}{R} \text{sen} \theta$$

Un sistema de vectores concurrentes se puede sustituir por un vector resultante en el punto de concurrencia

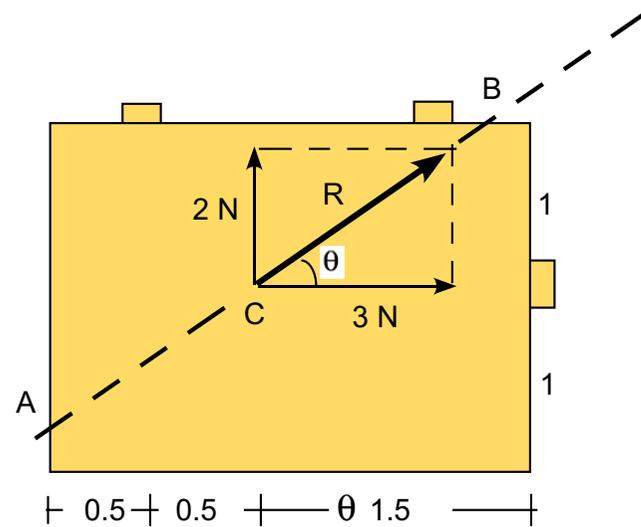
Ejemplo:



(cotas en m)

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum F_x = 2 + 2 - 1 = 3 \text{ N} \\ R_y &= \sum F_y = 2 + 2 - 2 = 2 \text{ N} \end{aligned} \right\} \underline{\underline{\vec{R} = 3\vec{i} + 2\vec{j}}}$$

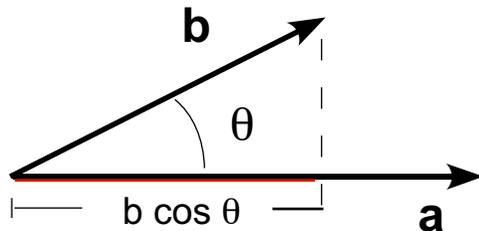
$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= 2\vec{i} & \vec{F}_2 &= 2\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{F}_3 &= -2\vec{j} & \vec{F}_4 &= -\vec{i} + 2\vec{j} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} R &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ N} \\ \text{tg}\theta &= \frac{2}{3} \rightarrow \theta = 33.69^\circ \end{aligned}$$

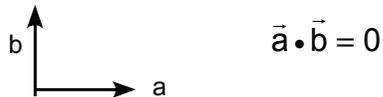
Producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Es el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman. Su resultado es un escalar

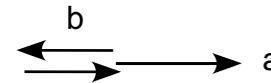


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \theta$$

* Si \vec{a} y \vec{b} perpendiculares $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



* Si \vec{a} y \vec{b} son paralelos $\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \mp a b$



Descomponiendo \vec{b} en direcciones \perp y \parallel a \vec{a} : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a b_{\parallel}$

Se utiliza para proyectar un vector sobre otro $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = b \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a}$

• Si se conocen las componentes cartesianas de los vectores:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} &= b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{aligned} \right\} \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

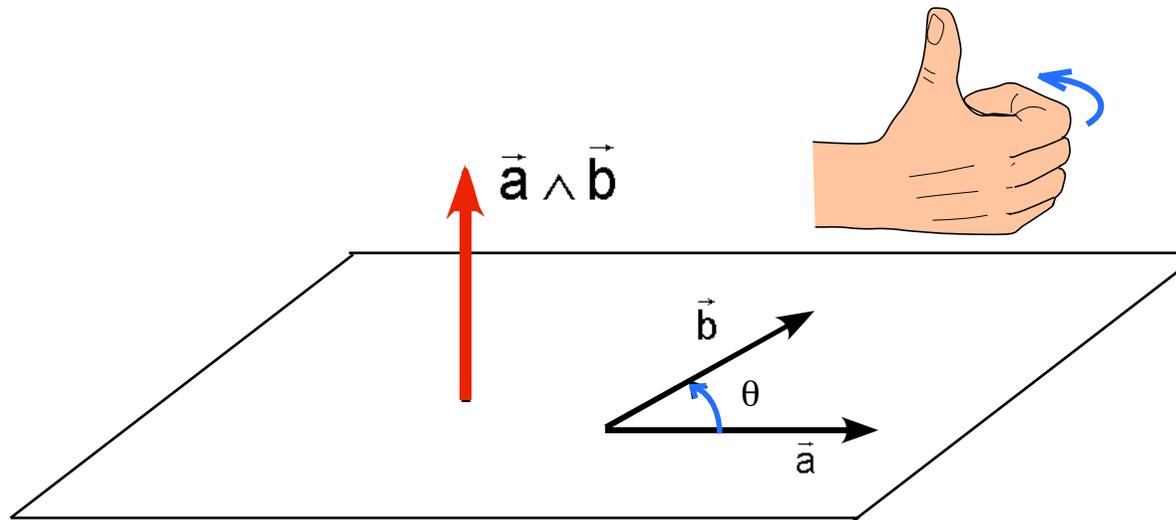
Producto vectorial $\vec{a} \wedge \vec{b}$

Es un vector con:

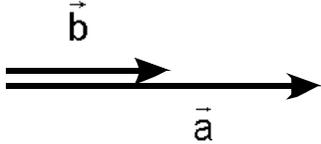
Módulo $\rightarrow |\vec{a} \wedge \vec{b}| = a b \text{ sen } \theta$ ($\theta =$ menor ángulo formado por los vectores)

Dirección \rightarrow perpendicular al plano determinado por \vec{a} y \vec{b} $\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$

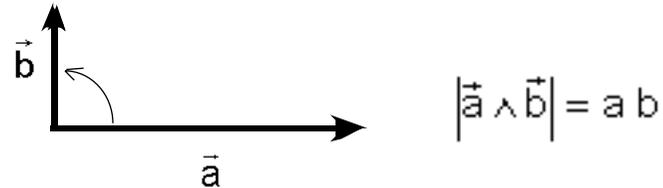
Sentido \rightarrow el del pulgar de la mano derecha cuando los otros se doblan desde el \vec{a} hacia \vec{b} por el camino más corto



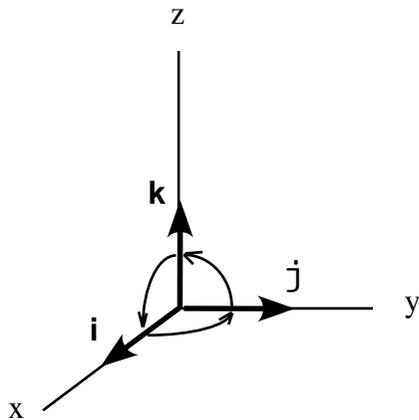
Producto vectorial

- Vectores paralelos:  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$

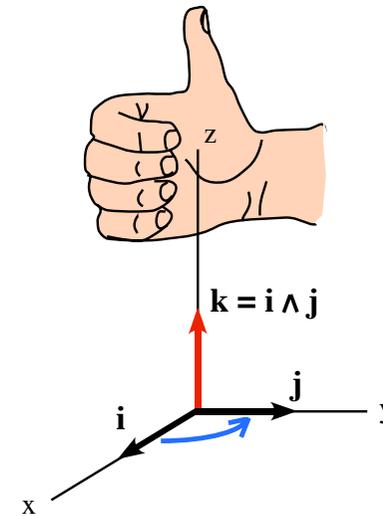
- Vectores perpendiculares:



- En función de las componentes cartesianas:



$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

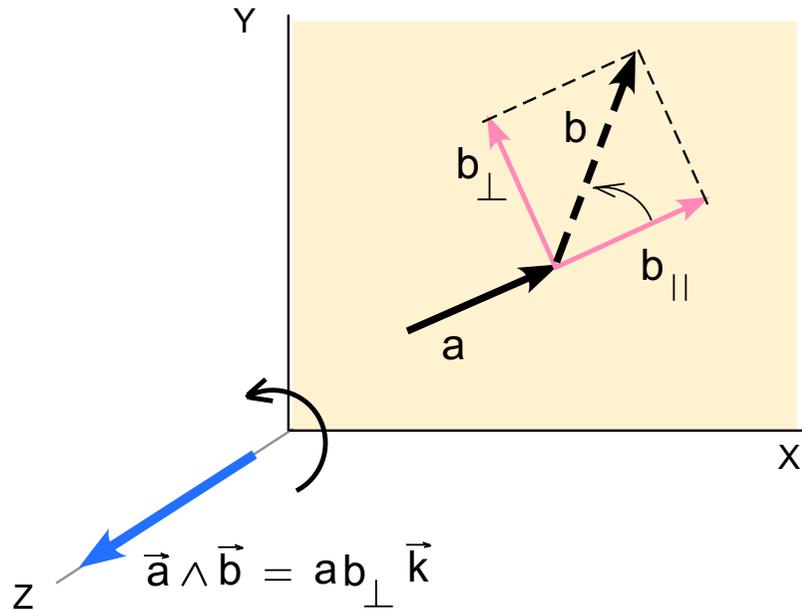


siempre que los versores de los ejes elegidos verifiquen

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

- Doble producto vectorial: $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ $(\vec{b} \wedge \vec{c}) \wedge \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$

Producto vectorial de vectores contenidos en el plano Oxy

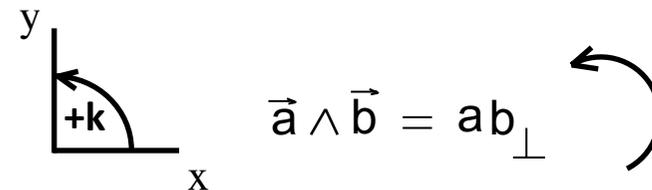


- Es cómodo proyectar uno de los vectores en componentes perpendicular y paralela sobre el otro:

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = a b_{\perp}$$

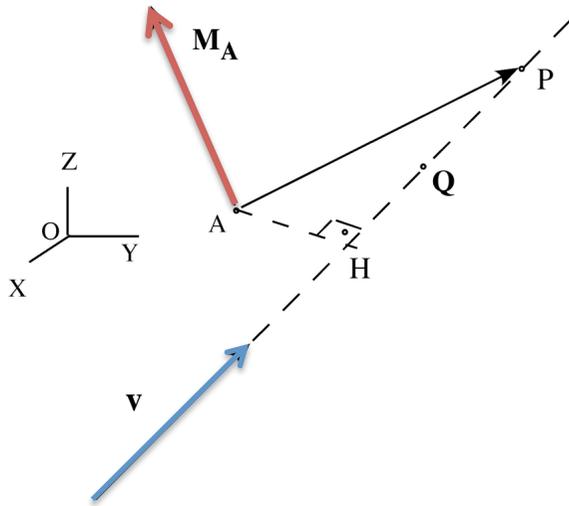
- La dirección del producto vectorial es siempre en el eje z

- El sentido de giro asociado a los ejes (en este caso antihorario) se utiliza para definir el sentido **+k**



El resultado se puede indicar con el módulo y el sentido de giro del producto vectorial: si coincide con el asociado a los ejes es **+k** y si es opuesto **-k**

Momento de un vector respecto a un punto A:



Producto vectorial del vector de posición de un punto de la recta soporte del vector respecto a A, por el vector

$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}$$

\vec{M}_A es un vector ligado al punto A

Sea Q otro punto de la línea de acción del vector:

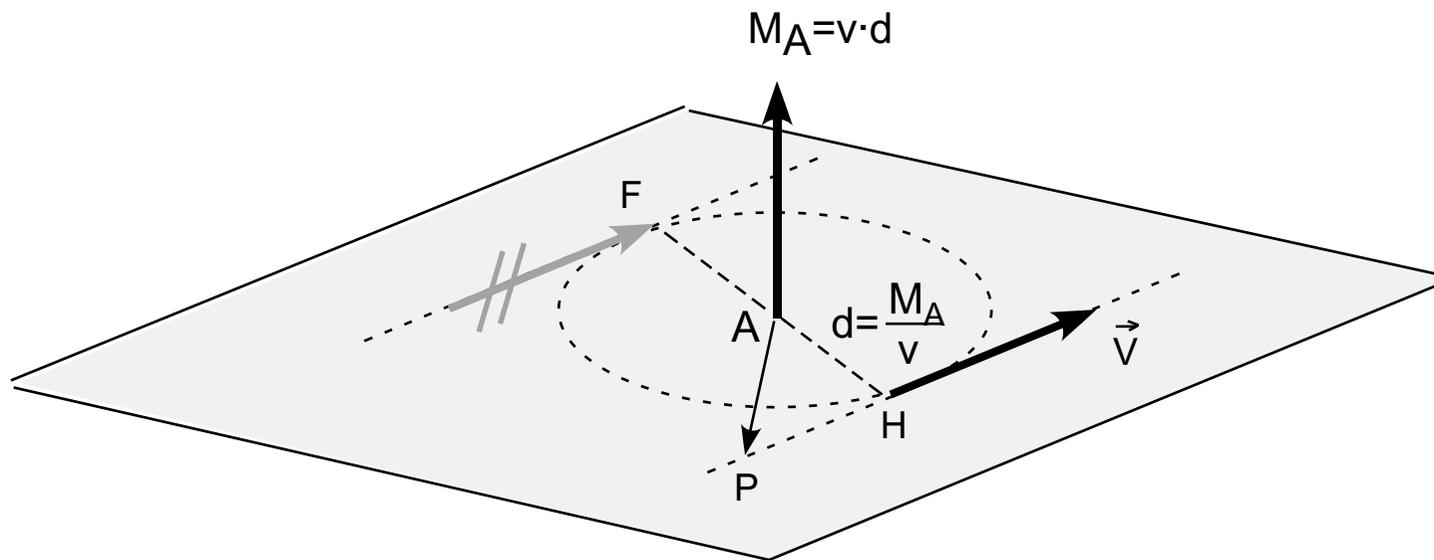
$$\vec{M}_A = A\vec{Q} \wedge \vec{v} = (A\vec{P} + P\vec{Q}) \wedge \vec{v} = A\vec{P} \wedge \vec{v} + \cancel{P\vec{Q} \wedge \vec{v}} = A\vec{P} \wedge \vec{v}$$

El momento respecto a un punto es **independiente del punto de la línea de acción del vector que se utilice.**

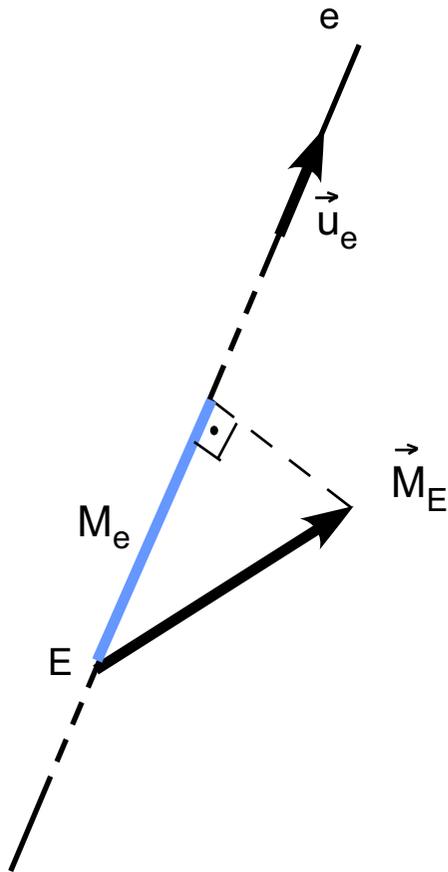
Si elegimos H tal que AH es perpendicular a la línea de acción: $M_A = AH \cdot v$

Un vector deslizante está determinado si se da el vector y el momento respecto a un punto (\vec{v}, \vec{M}_A)

- El vector y el vector de posición **AP** están en un plano perpendicular al M_A
- El módulo del momento $M_A = v \cdot d$ fija la distancia mínima a la que está la línea de acción del vector del punto A (2 posibilidades: por H o F)
- Los sentidos de los vectores determinan completamente la línea de acción



Momento respecto a un eje



Se llama momento respecto al eje e , a la proyección sobre el mismo del momento respecto a uno de sus puntos.

Si \vec{u}_e es el vector unitario en la dirección del eje, y E un punto cualquiera del eje:

$$M_e = \vec{M}_E \cdot \vec{u}_e$$

Sistema de vectores deslizantes

Sean los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ con P_1, P_2, \dots, P_n puntos de sus respectivas líneas de acción

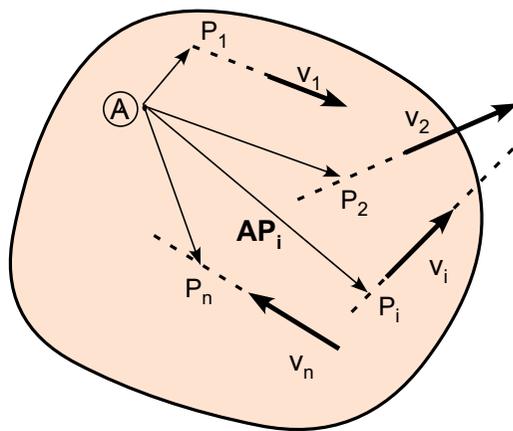
- **Resultante**: suma de los vectores como si fuesen libres

$$\vec{R} = \sum_i \vec{v}_i$$

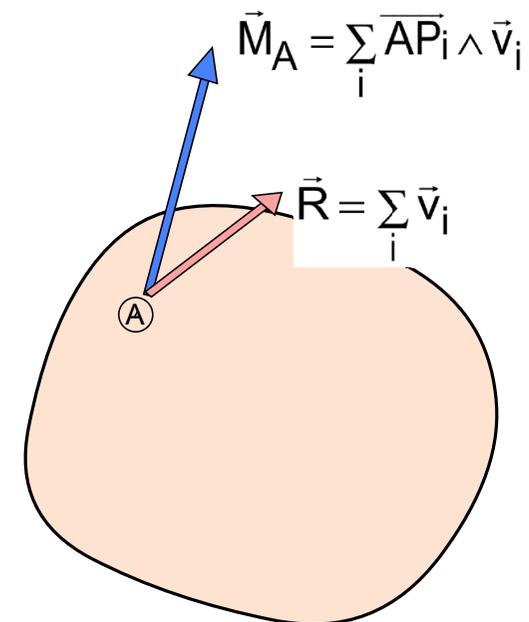
- **Momento del sistema respecto al punto A**:

$$\vec{M}_A = \sum_i \overline{AP_i} \wedge \vec{v}_i$$

Reducción de un sistema en el punto A: (\vec{R}, \vec{M}_A)



Reducción en A



Campo de momentos

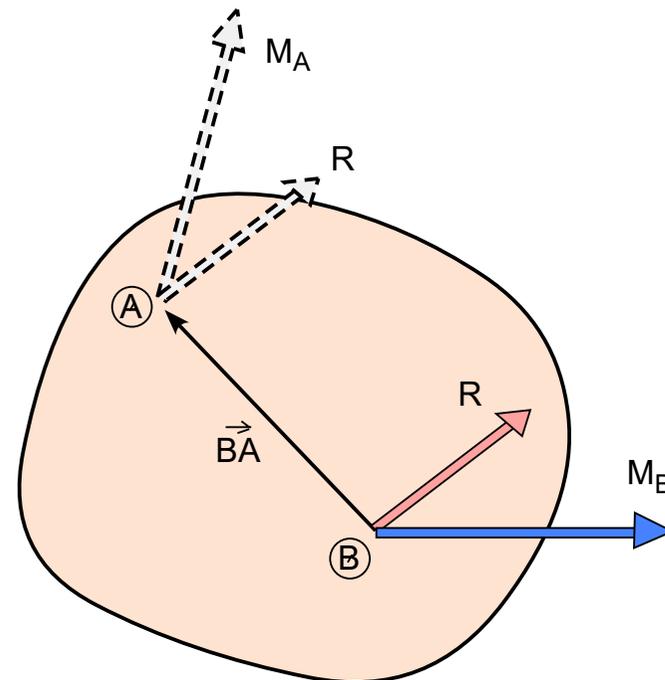
- Sea la reducción en A de un sistema (\vec{R}, \vec{M}_A)

El momento respecto a otro punto B:

$$\begin{aligned}\vec{M}_B &= \sum_{i=1}^n B\vec{P}_i \wedge \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (B\vec{A} + A\vec{P}_i) \wedge \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n B\vec{A} \wedge \vec{v}_i + \sum_{i=1}^n A\vec{P}_i \wedge \vec{v}_i = \\ &= B\vec{A} \wedge \sum_{i=1}^n \vec{v}_i + \vec{M}_A = B\vec{A} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A\end{aligned}$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + B\vec{A} \wedge \vec{R}$$

Ec. campo de momentos o de cambio de punto de momento



Se dice que dos sistemas de vectores deslizantes son equivalentes cuando tienen la misma resultante y el mismo momento respecto a un punto.

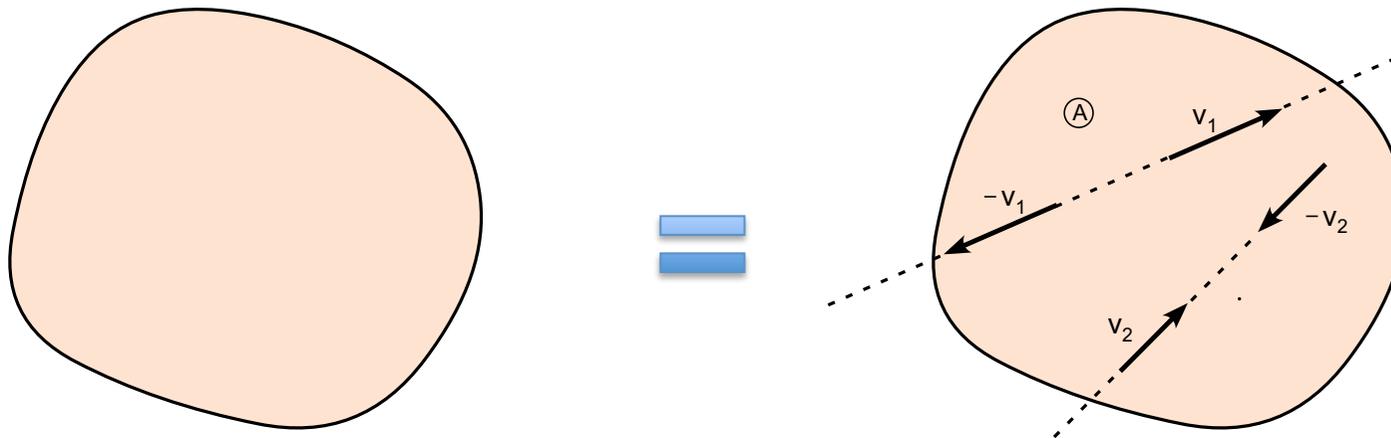
De la expresión del campo de momentos se deduce fácilmente que si se verifica para un punto se cumple para todos.

Consideremos los sistemas más sencillos:

Sistema nulo (ningún vector)

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \vec{M}_A = \vec{0} \quad \forall A$$

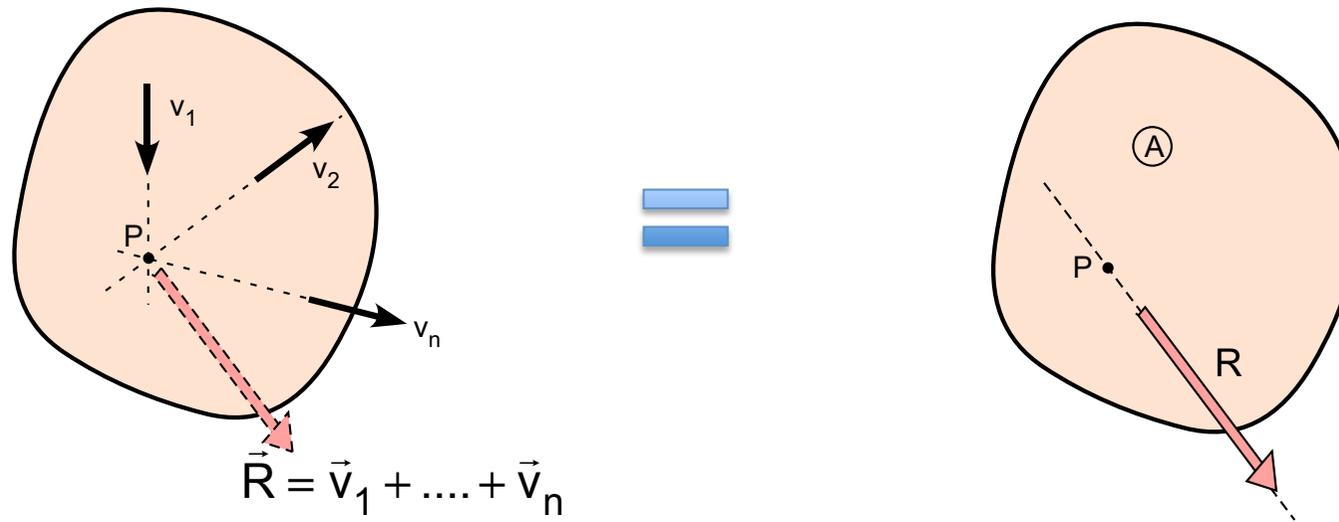
Se obtiene un sistema equivalente si se añaden parejas de vectores \mathbf{v} y $-\mathbf{v}$ con la misma línea de acción



Sistema de vector único

$$\vec{R} = \vec{v} \quad \vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{R} \quad \vec{M}_P = \vec{0} \quad (\text{si } P \in \text{l. de acción})$$

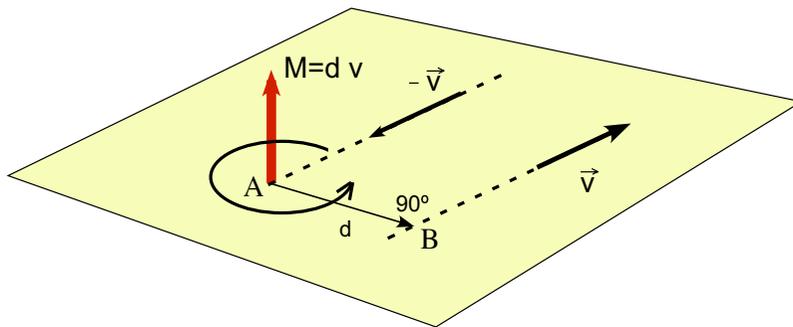
- Un sistema de vectores cuyas líneas de acción se cortan en un mismo punto P (vectores concurrentes) se pueden componer llevándolos al punto de concurrencia y sustituirlos por un solo vector, la resultante, cuya línea de acción pasa también por P. (Teorema de Varignon)



$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n) = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{R}$$

Par de vectores

Se llama así a dos vectores iguales y opuestos con líneas de acción paralelas separadas una distancia d



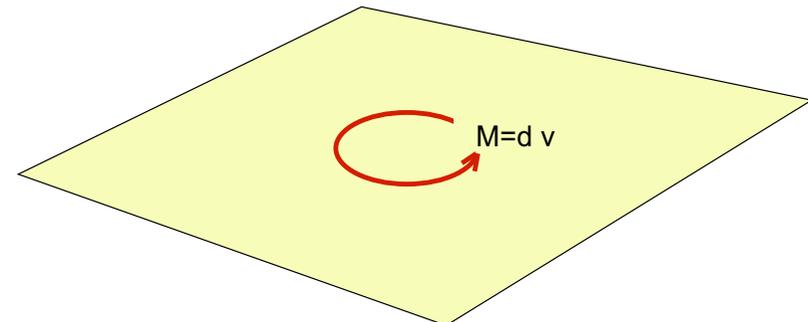
Elegimos A y B puntos de las líneas de acción tales que AB sea perpendicular a ellas.

$$\vec{R} = \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

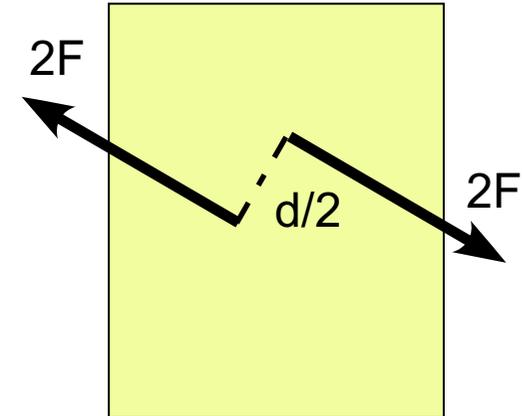
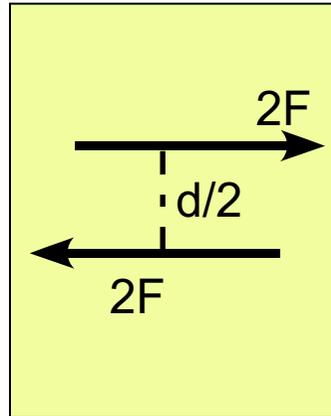
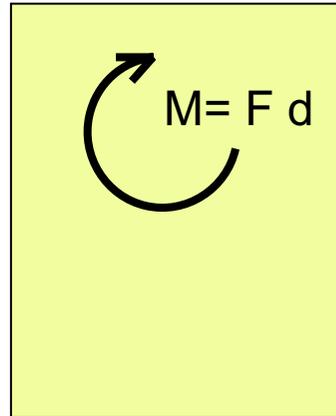
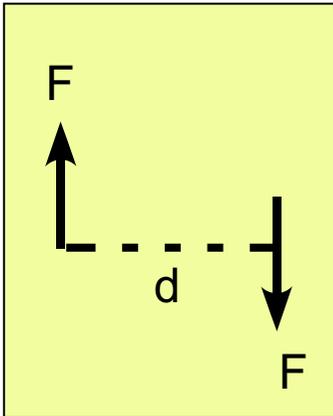
$$\vec{M}_A = \overline{AB} \wedge \vec{v} = d v \vec{u}_\perp$$

Respecto a otro punto O : $\vec{M}_O = \vec{M}_A + \overline{OA} \wedge \vec{R} = \vec{M}_A \equiv \vec{M}$

Un par de vectores se reduce a un único momento, el cual es independiente del punto de cálculo .

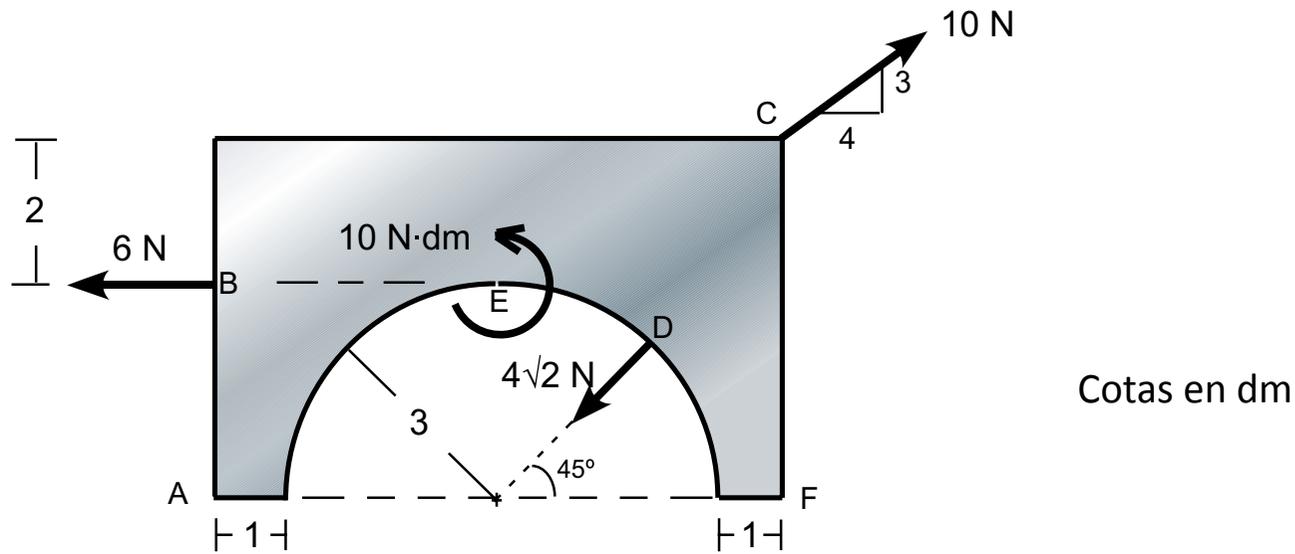


Pares equivalentes

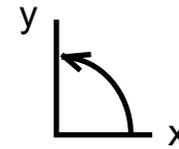
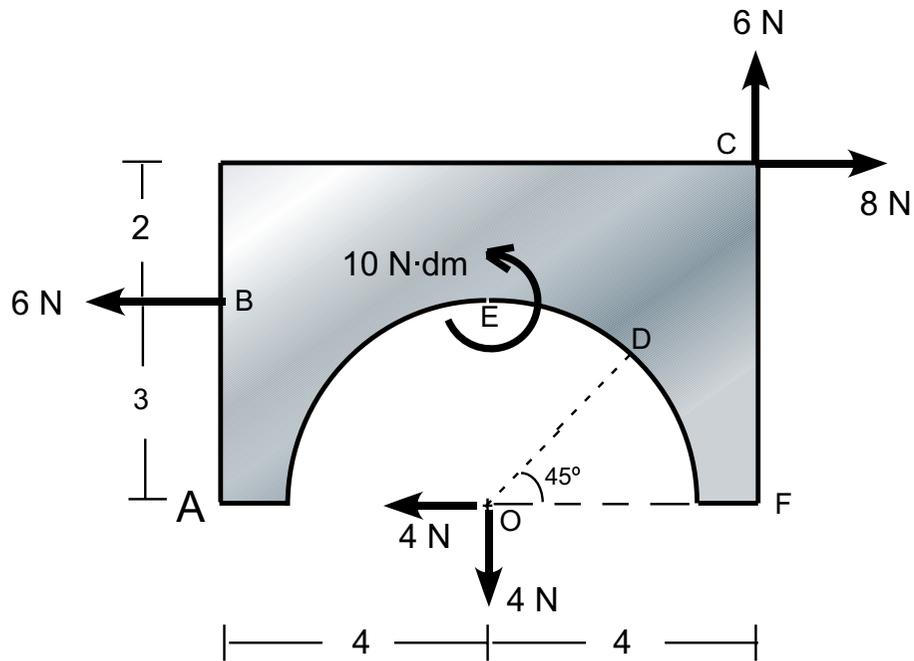


Los pares son equivalentes mientras se mantengan el módulo, la dirección y el sentido

Ejemplo en el plano:



Reducir en el punto A el sistema de fuerzas aplicado en la pieza que se muestra en la figura



Resultante:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F_{Bx} + F_{Cx} + F_{Dx} = -6 + 8 - 4 = -2 \text{ N} \\ R_y &= F_{By} + F_{Cy} + F_{Dy} = 6 - 4 = 2 \text{ N} \end{aligned} \right\}$$

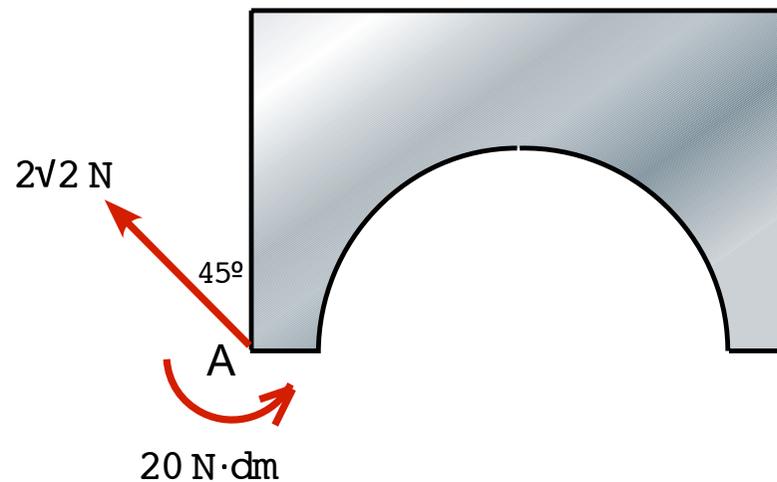
$$\vec{R} = -2\vec{i} + 2\vec{j} \quad (\text{N})$$

Momento respecto a A:

$$M_A = 10 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 8 - 8 \cdot 5 - 4 \cdot 4 = 20 \text{ N} \cdot \text{dm}$$

$$\vec{M}_A = 20 \vec{k} \quad (\text{N} \cdot \text{dm})$$

Reducción en A:



Invariantes

Sea (\vec{R}, \vec{M}_A) la reducción de un sistema en el punto A. Al cambiar de punto de reducción a B, (\vec{R}, \vec{M}_B) , hay tres cantidades que se mantienen constantes:

1) $\vec{R} = \text{vector constante}$

2) $\vec{M}_B \cdot \vec{R} = \text{cte}$

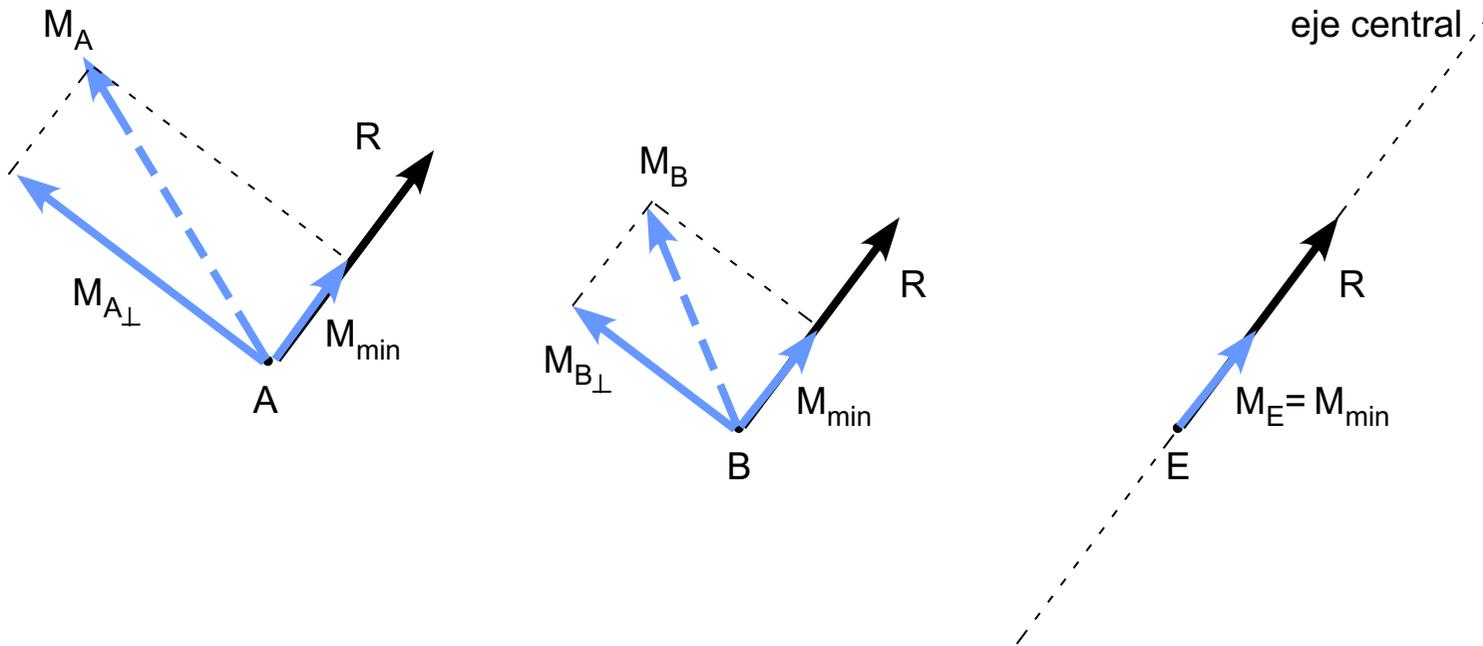
Demostración:
$$\vec{M}_B \cdot \vec{R} = (\vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R} + \underbrace{(\vec{BA} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R}}_{\text{vect. perpendic.}} = \vec{M}_A \cdot \vec{R}$$

$\vec{M}_B \cdot \vec{R} = \text{cte}$ significa que la proyección del momento en la dirección paralela a R es constante para todos los puntos: $\vec{M}_B \cdot \vec{R} = M_{\parallel} R = \text{cte}$

3) $M_{\text{mín}} \equiv M_{\parallel} = \frac{\vec{M}_B \cdot \vec{R}}{R} = \text{cte}$

Eje central de un sistema de vectores

Los puntos del espacio respecto a los cuales el momento es mínimo se llama eje central



En el eje central la reducción del sistema es lo más sencilla posible $(\vec{R}, M_{min} \vec{u}_R)$

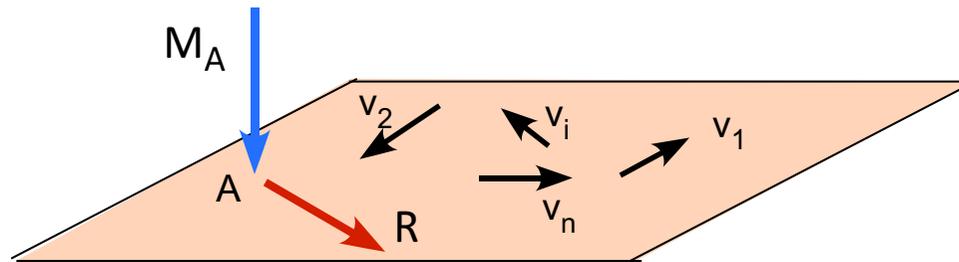
Los puntos del eje central se encuentran planteando que el M_E y R sean paralelas

- Los invariantes ayudan a clasificar el sistema de vectores y saber cuál es el sistema equivalente más sencillo al dado:

$$\vec{R} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \vec{M} = \vec{0} & \text{sistema nulo} \\ \vec{M} \neq \vec{0} & \text{par único} \end{cases}$$

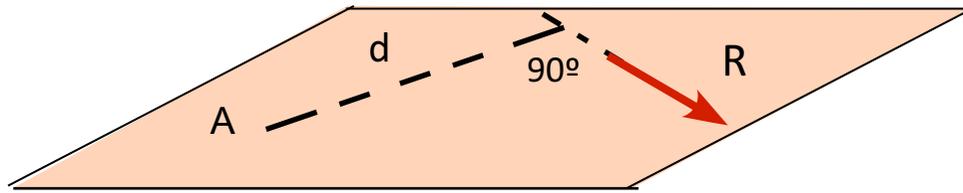
$$\vec{R} \neq \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \vec{R} \cdot \vec{M} = 0 & \text{vector único} \\ \vec{R} \cdot \vec{M} \neq 0 & \text{vector y par} \end{cases}$$

Sistema de vectores en un plano



$$\vec{M}_A \perp \vec{R} \rightarrow \vec{M}_A \cdot \vec{R} = 0 \rightarrow M_{\text{mín}} R = 0$$

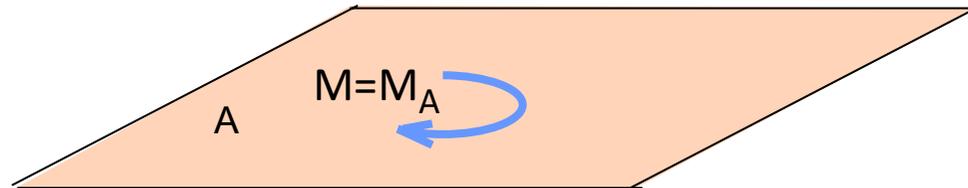
- Si R no es 0, se reduce a un único vector en el eje central
- Si $R=0$, se reduce a un par en cualquier punto
- Si $R=0$ y $M=0$, es un sistema nulo



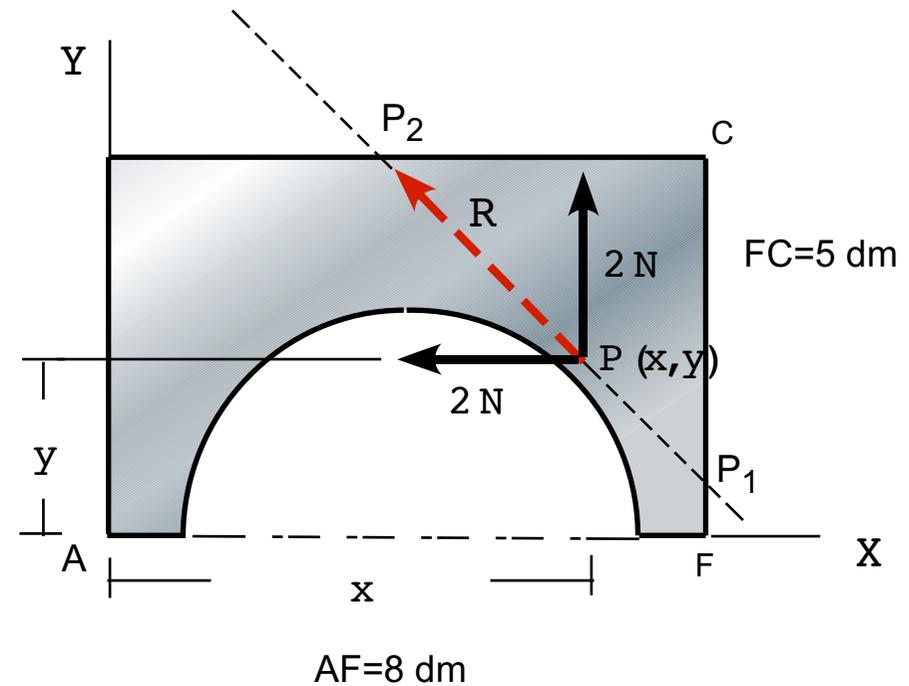
$$\vec{R} \neq \vec{0}$$

$$M_A = d \cdot R$$

$$\vec{R} = \vec{0}$$



En el ejemplo anterior, se quiere convertir el sistema en un sistema nulo mediante la aplicación de una fuerza en un borde de la placa.



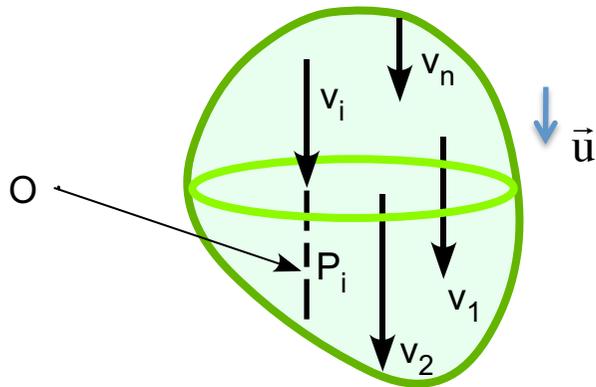
$$\left. \begin{array}{l} M_A = 20 \text{ N}\cdot\text{dm} \\ M_A = 2y + 2x \end{array} \right\} 10 = y + x$$

$$x = 8 \rightarrow y = 2 \quad P_1(8, 2)$$

$$y = 5 \rightarrow x = 5 \quad P_2(5, 5)$$

Habría que aplicar una fuerza $-\vec{R}$ en uno de esos dos puntos

Sistema de vectores paralelos



$\vec{v}_1 = m_1\vec{u}$, $\vec{v}_2 = m_2\vec{u}$ vectores paralelos al \vec{u}

$$\vec{R} = \sum m_i\vec{u} = (\sum m_i)\vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{OP}_i \wedge m_i\vec{u} = (\sum m_i\vec{OP}_i) \wedge \vec{u}$$

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$$

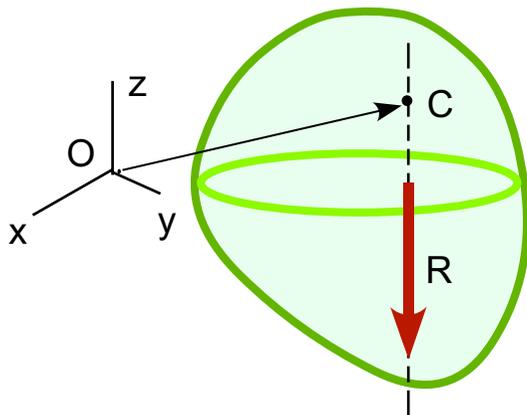
Sustituimos entonces todo el sistema por una sola fuerza, R.
Si C es un punto cualquiera de su recta soporte o eje central:

$$\vec{M}_O = \vec{OC} \wedge \vec{R} = \vec{OC} \wedge (\sum m_i)\vec{u}$$

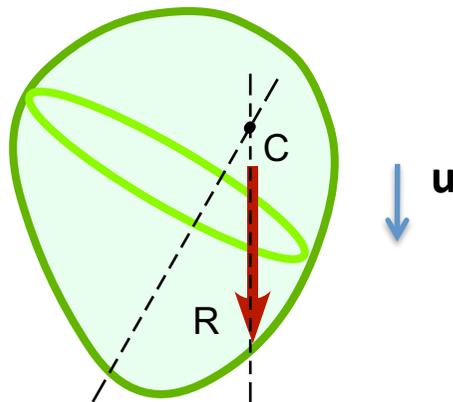
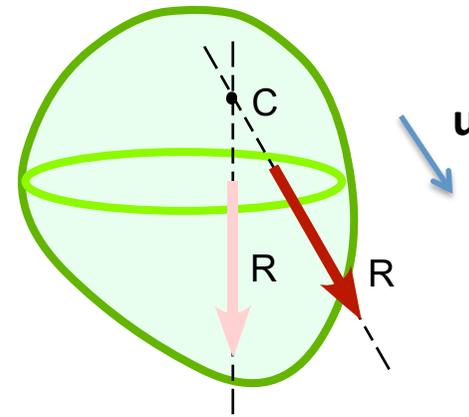
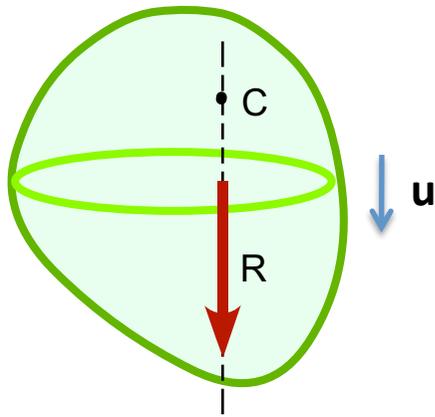
Igualando a la expresión obtenida antes para M_O se llega:

$$\left[(\sum m_i\vec{OP}_i) - (\sum m_i)\vec{OC} \right] \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

Haciendo el corchete $\vec{0}$ se define un punto C del eje central, independiente de la dirección del campo



$$\vec{OC} = \frac{\sum m_i\vec{OP}_i}{\sum m_i} = \text{Centro de Vectores}$$



El centro de vectores es independiente de la dirección del sistema de vectores paralelos. Siempre se puede reducir a la resultante aplicada en ese punto.

- Si utilizamos un sistema de ejes xyz en O:

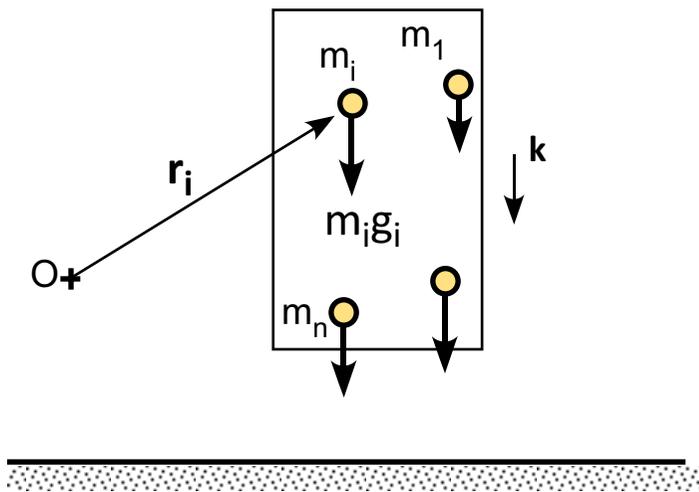
$$\overrightarrow{OC} = (x_c \ y_c \ z_c); \overrightarrow{OP}_i = (x_i \ y_i \ z_{ic})$$

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad ; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Coordenadas del centro de vectores

Un sistema de vectores paralelos se sustituye por su resultante aplicada en el centro de vectores C

Un ejemplo de un sistema de vectores paralelos, es el de las fuerzas peso que actúan sobre un sistema de masas que se encuentran próximas a la superficie de la Tierra.



$$\vec{p}_i = m_i \vec{g}_i \approx m_i g \vec{k}$$

El centro de vectores de las fuerzas peso se llama **centro de gravedad** (c.d.g. o G) :

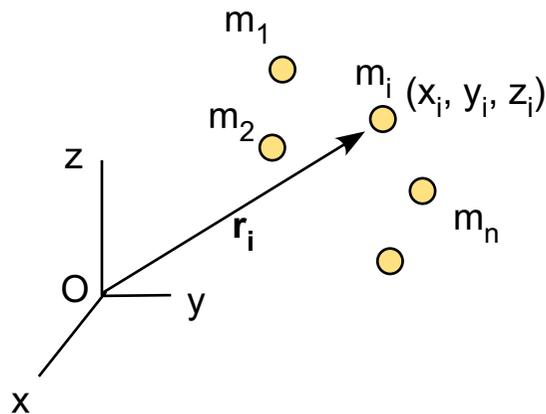
$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i g_i \vec{r}_i}{\sum m_i g_i} \stackrel{\text{si } g_i = g}{=} \frac{\sum m_i g \vec{r}_i}{\sum m_i g} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \vec{r}_{\text{c.d.m.}}$$

Como a nuestra escala de trabajo habitual g es constante, el c.d.g. coincide con el centro de masas del sistema (c.d.m.)

Centros de Gravedad

El **centro de masas** (c.d.m.) es un punto del sistema de puntos materiales o de un cuerpo en que puede concentrarse toda la masa del mismo. Su definición surgirá en la parte de dinámica, al escribir la 2ª ley de Newton para un sistema de puntos materiales ($F = m a_{\text{c.d.m.}}$).

El **centro de gravedad** (c.d.g.) es el punto en que actúa la resultante del peso de un cuerpo. Cerca de la corteza terrestre y en la escala a que nos vamos a mover, los vectores peso constituyen un sistema de fuerzas paralelas y la aceleración de la gravedad será constante. En este caso c.d.g. y c.d.m. coinciden y nos referiremos a ellos con la letra **G**



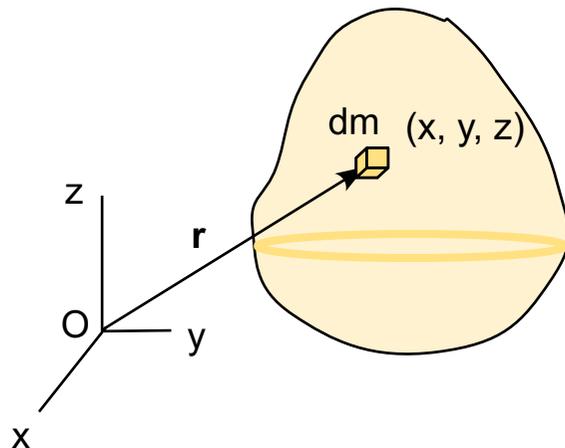
$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Coordenadas de G:

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \quad z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Sólidos: masa continua

$$m_i \rightarrow dm \quad r_i \rightarrow r \quad \Sigma \rightarrow \int$$



$$\vec{r}_G = \frac{\int_{\text{sólido}} \vec{r} \, dm}{\int_{\text{sólido}} dm}; \quad m_{\text{sólido}} = \int_{\text{sólido}} dm$$

$$x_G = \frac{\int_{\text{sólido}} x \, dm}{m_{\text{sólido}}} \quad y_G = \frac{\int_{\text{sólido}} y \, dm}{m_{\text{sólido}}} \quad z_G = \frac{\int_{\text{sólido}} z \, dm}{m_{\text{sólido}}}$$

Si el cuerpo tiene **3 dimensiones**, la masa ocupa un volumen $dm = \rho \, dV$

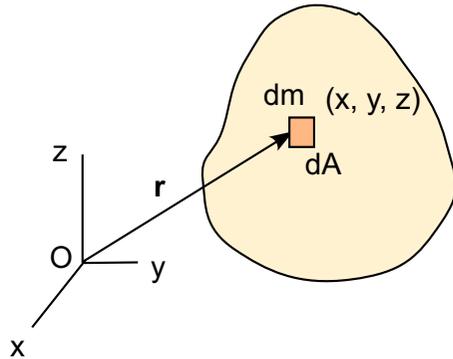
siendo ρ : densidad de masa por unidad de volumen (kg / m^3)

$$x_G = \frac{\int_{\text{sólido}} x \, dm}{m_{\text{sólido}}} = \frac{\int_{\text{sólido}} x \rho \, dV}{\int_{\text{sólido}} \rho \, dV} \stackrel{\text{si } \rho = \text{cte}}{=} \frac{\int_{\text{sólido}} x \, dV}{\int_{\text{sólido}} dV}$$

Y análogamente para y_G y z_G

Si el sólido es **una placa (2 dimensiones)**, su masa ocupa un área. La masa es proporcional al área que ocupa $dm = \sigma dA$ siendo

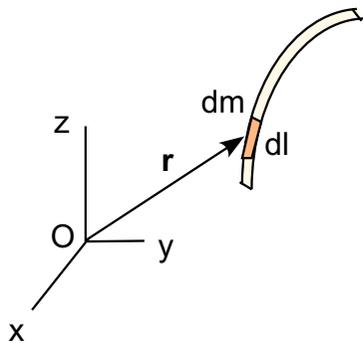
σ : densidad de masa por unidad de área (kg / m^2)



$$x_G = \frac{\int_{\text{sólido}} x dm}{m_{\text{sólido}}} = \frac{\int_{\text{sólido}} x \sigma dA}{\int_{\text{sólido}} \sigma dA} \stackrel{\text{si } \sigma = \text{cte}}{=} \frac{\int_{\text{sólido}} x dA}{\int_{\text{sólido}} dA}$$

Si el sólido es **unidimensional** (“alambre”) su masa ocupa una longitud del mismo. En este caso $dm = \lambda dl$

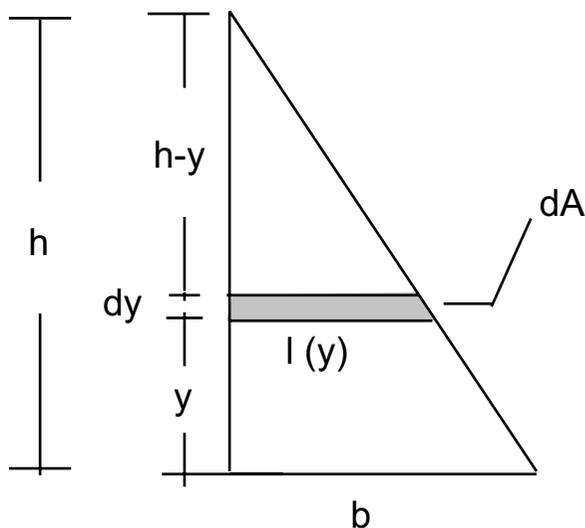
λ : densidad de masa por unidad de longitud (kg / m)



$$x_G = \frac{\int_{\text{sólido}} x dl}{m_{\text{sólido}}} = \frac{\int_{\text{sólido}} x \lambda dl}{\int_{\text{sólido}} \lambda dl} \stackrel{\text{si } \lambda = \text{cte}}{=} \frac{\int_{\text{sólido}} x dl}{\int_{\text{sólido}} dl}$$

(análogamente para y_G y z_G)

Ejemplo: **G** de un triángulo rectángulo de densidad constante



$$y_G = \frac{\int_{\text{triángulo}} y dA}{\int_{\text{triángulo}} dA} = \frac{\int_{\text{triángulo}} y dA}{\frac{1}{2}bh}$$

Tomamos como dA el trozo sombreado :

$$dA = l(y) dy = \frac{b}{h}(h-y) dy$$

Donde hemos tenido en cuenta que: $\frac{l(y)}{(h-y)} = \frac{b}{h} \rightarrow l(y) = \frac{b}{h}(h-y)$

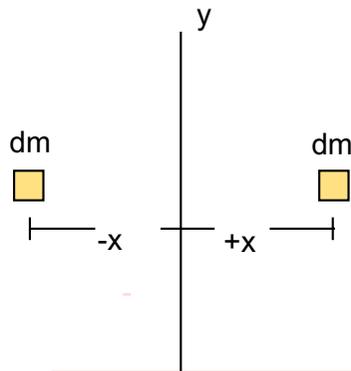
Sustituyendo en la integral: $y_G = \frac{2}{bh} \frac{b}{h} \int_0^h (h-y) \cdot y \cdot dy = \frac{1}{3}h$ $y_G = \frac{1}{3}h$

La coordenada horizontal la obtendríamos en este caso , sin más que cambiar h por b

$x_G = \frac{1}{3}b$

Simetrías

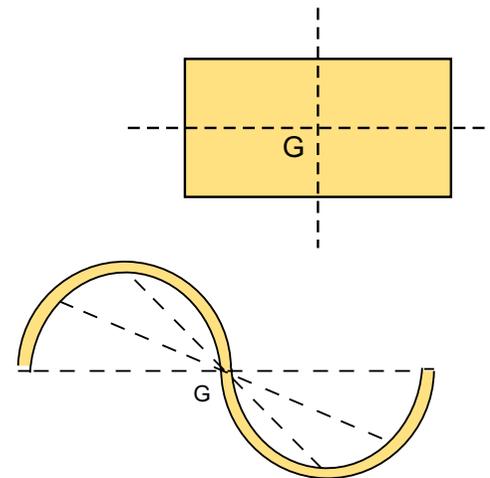
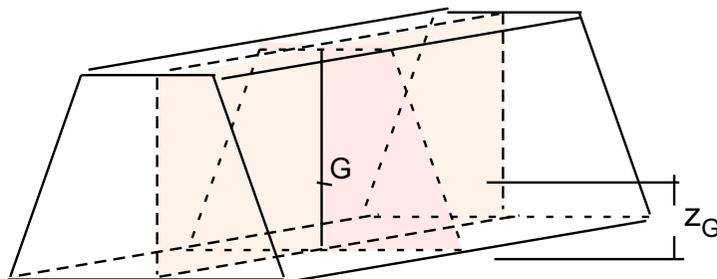
Supongamos que el eje Y fuese de simetría de la pieza: por cada dm a una distancia x a la derecha del eje, habría otro idéntico a la misma distancia al otro lado.



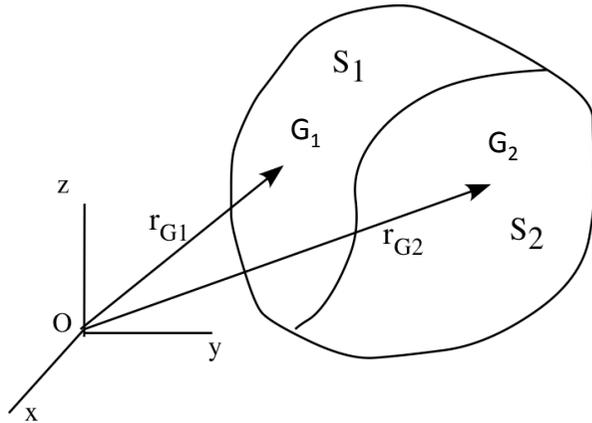
Su contribución al numerador de la x_G sería :
 $-x dm + x dm = 0 \rightarrow G$ en el eje y

Si existe un elemento de simetría en la pieza, el c.d.g. está sobre él

- Si hay un plano de simetría, G está en el plano
- Si hay un eje de simetría, G está en el eje
- Si hay un centro de simetría, G coincide con él



Composición de centros de gravedad



Tenemos un sólido $S = S_1 + S_2$ de masa m

S_1 y S_2 con masas y cdg's conocidos

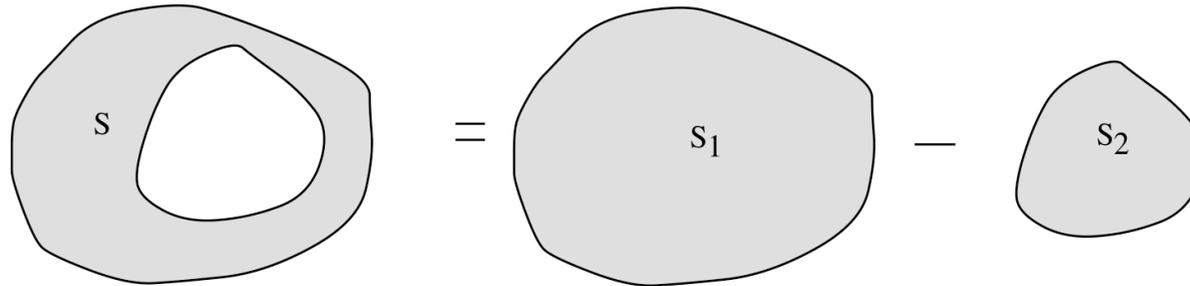
El G del conjunto sería el de un sistema de dos masas: m_1 en G_1 y m_2 en G_2

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_{G1} + m_2 \vec{r}_{G2}}{m_1 + m_2} \quad m = m_1 + m_2$$

Si la descomposición es en N cuerpos: S_1, \dots, S_N

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_{G1} + m_2 \vec{r}_{G2} + \dots + m_N \vec{r}_{GN}}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

Si el sólido tiene huecos, es como si hubiese partes con masa negativa

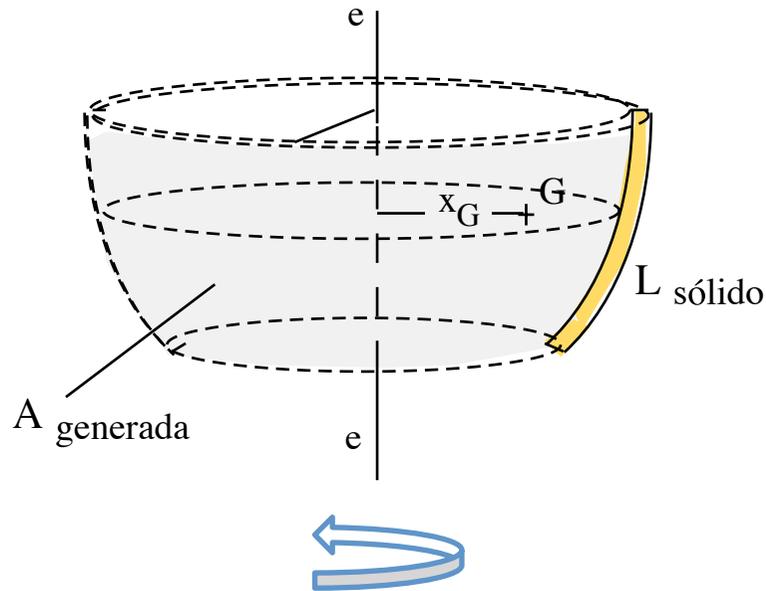


$$S = S_1 - S_2 \quad m = m_1 - m_2 \quad \longrightarrow \quad \vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_{G1} - m_2 \vec{r}_{G2}}{m_1 - m_2}$$

(Para N cuerpos, la composición tendrá sumas y restas, si hay huecos)

Teoremas de Pappus- Guldin

Permiten situar c.d.g. de sólidos homogéneos. Hay uno para sólidos unidimensionales planos (“alambres”) y otro para placas planas



1^{er} teorema

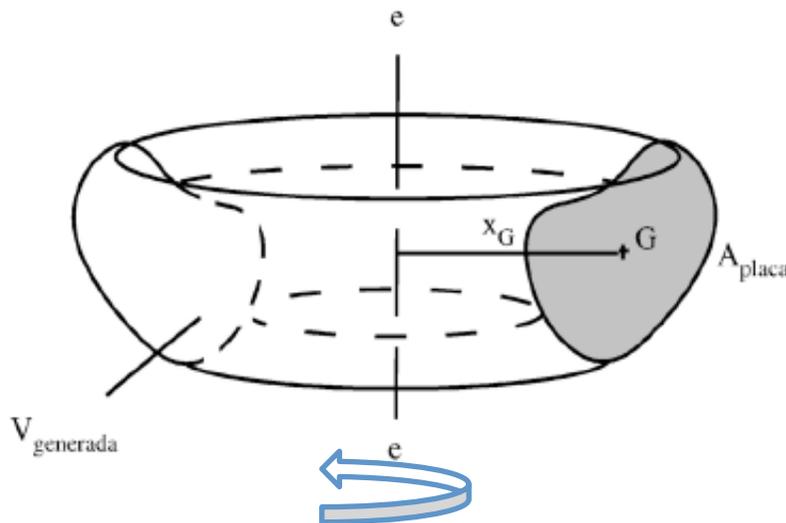
Sea un sólido unidimensional plano de longitud $L_{\text{sólido}}$. El área de revolución por él generada al hacerlo girar en torno a un eje cualquiera que no lo corte, está relacionada con la posición de su c.d.g. de la siguiente forma:

$$A_{\text{generada}} = 2\pi x_G L_{\text{sólido}}$$

Siendo x_G la distancia del cdg al eje de revolución

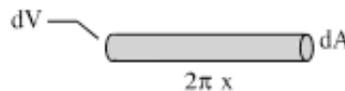
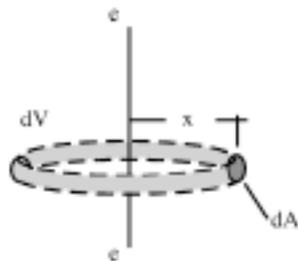
2º teorema

Sea una placa de superficie A_{placa} . El volumen generado por revolución en torno a un eje que no la corte, V_{generado} está relacionado con el c.d.g. de la placa en la forma:



$$V_{\text{generado}} = 2\pi x_G A_{\text{placa}}$$

Siendo x_G la distancia del cdg de la placa al eje de rotación



Demostración: Un trozo elemental de área dA , situado a distancia x del eje de revolución genera un volumen dV :

$$dV = 2\pi x dA$$

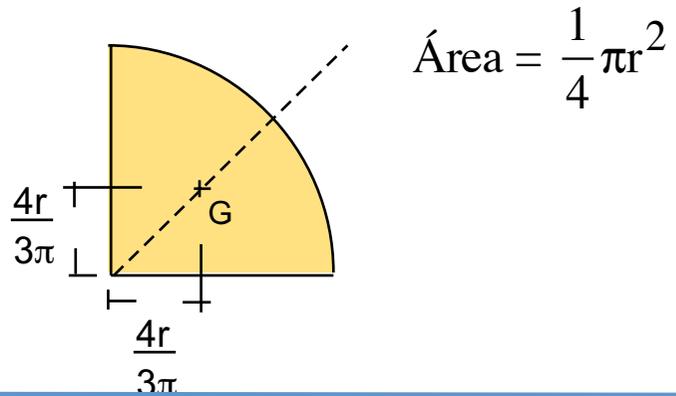
Integrando a todos los dA de la placa:

$$\int dV = 2\pi \int_{\text{placa}} x dA \rightarrow V_{\text{generado}} = 2\pi x_G A_{\text{placa}}$$

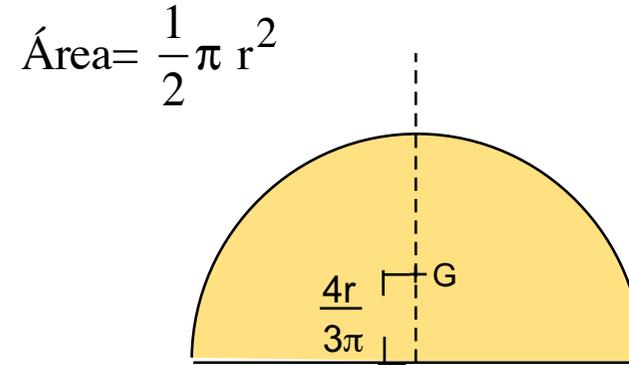
ya que:

$$x_G = \frac{\int_{\text{placa}} x dA}{A_{\text{placa}}} \rightarrow \int_{\text{placa}} x dA = x_G A_{\text{placa}}$$

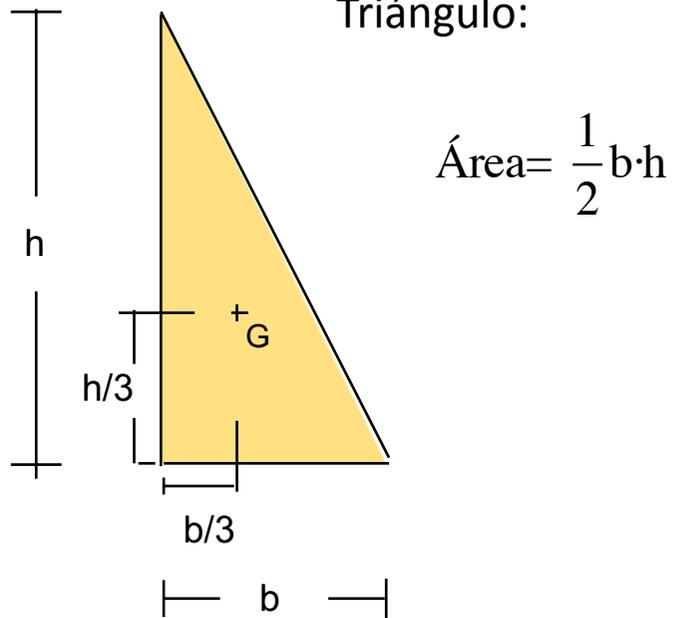
Cuadrante de disco de radio r:



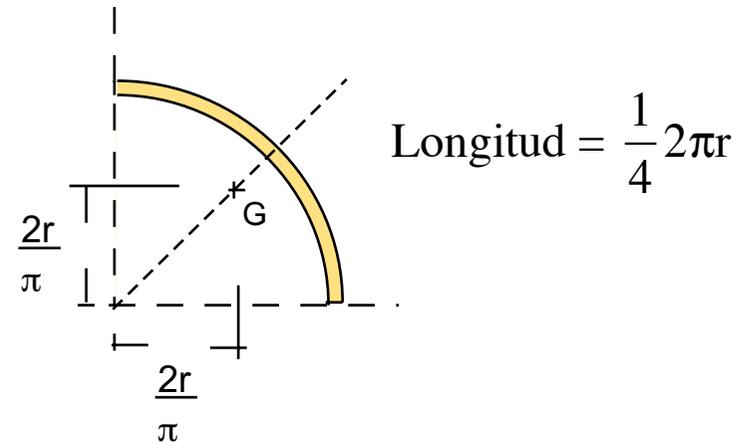
Semidisco de radio r:



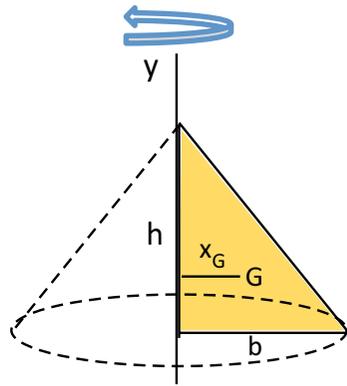
Triángulo:



Cuarto de circunferencia de radio r



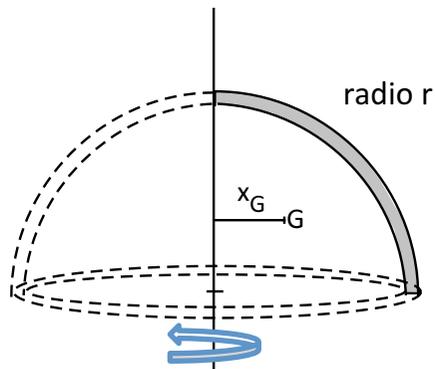
Ejemplos: Algunos c.d.g. usando Pappus-Guldin



• **Placa triangular** genera cono

$$V_{\text{generado}} = 2\pi x_G A_{\text{placa}}$$

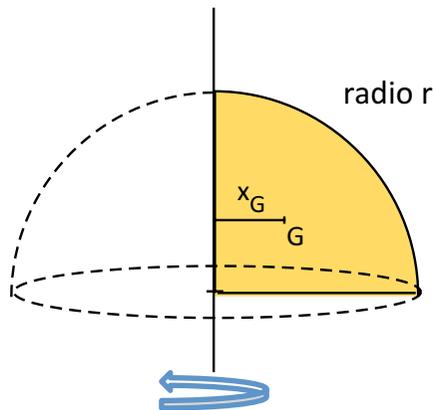
$$\frac{1}{3}\pi b^2 h = 2\pi x_G \frac{1}{2}bh \rightarrow x_G = \frac{1}{3}b$$



• **Cuarto de circunferencia** genera media cáscara esférica

$$A_{\text{generada}} = 2\pi x_G L_{\text{sólido}}$$

$$\frac{1}{2}4\pi r^2 = 2\pi x_G \frac{1}{4}2\pi r \rightarrow x_G = \frac{2r}{\pi}$$



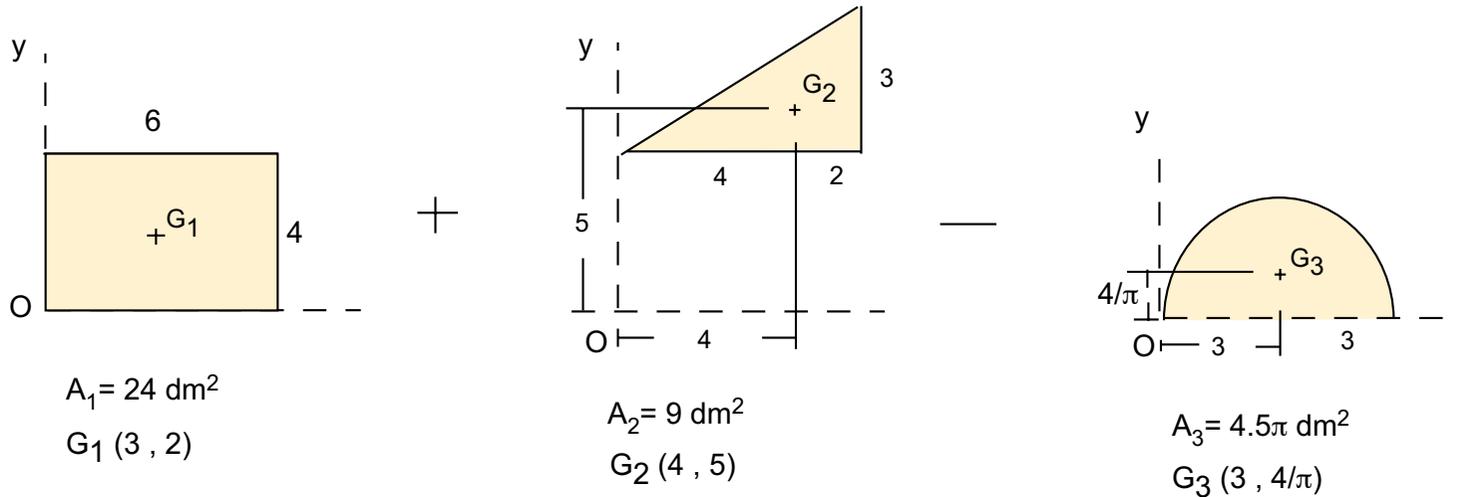
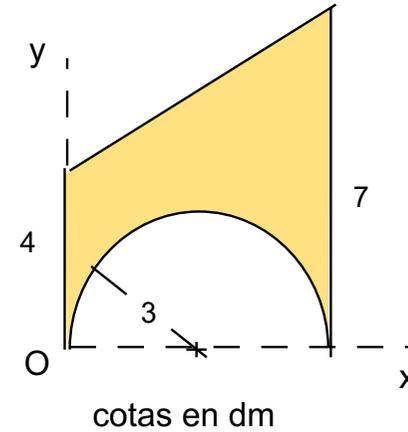
• **Cuadrante de disco** genera media esfera

$$V_{\text{generado}} = 2\pi x_G A_{\text{placa}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi x_G \frac{\pi r^2}{4} \rightarrow x_G = \frac{4r}{3\pi}$$

Ejemplo:

Hallar el c.d.g. de la placa de la figura

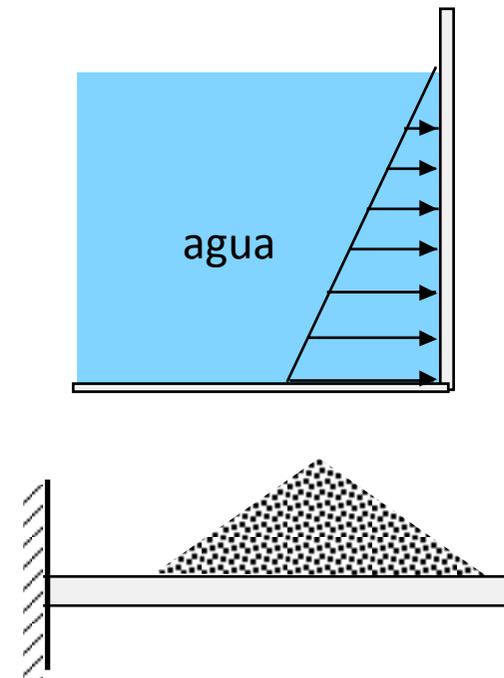


$$x_G = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 - x_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{3 \cdot 24 + 4 \cdot 9 - 3 \cdot (4.5\pi)}{24 + 9 - 4.5\pi} \approx 3.48 \text{ dm}$$

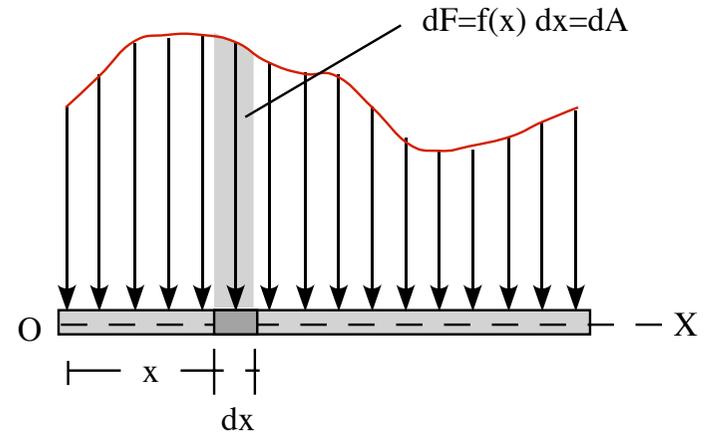
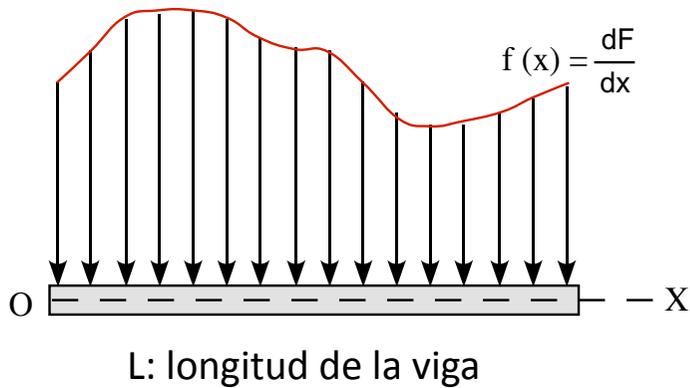
$$y_G = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 - y_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{2 \cdot 24 + 5 \cdot 9 - (4/\pi) \cdot (4.5\pi)}{24 + 9 - 4.5\pi} \approx 4 \text{ dm}$$

Cargas distribuidas

En muchas situaciones las fuerzas no actúan sobre un solo punto sino que ejercen su acción de forma continua sobre una superficie o longitud. El peso de muchos libros sobre un estante, el peso de la nieve sobre un tejado o la fuerza que hace el agua sobre la pared del depósito que la contiene son ejemplos de fuerzas distribuidas en una zona. En tales casos es frecuente expresarlas como una densidad de carga que se extiende sobre dicha zona. Vamos a ver como se reduce una carga por unidad de longitud en un sólido.



Cargas distribuidas



Sea $f(x)$ la carga por unidad de longitud que actúa a lo largo de la viga: $f(x) = \frac{dF}{dx}$ (N/m)

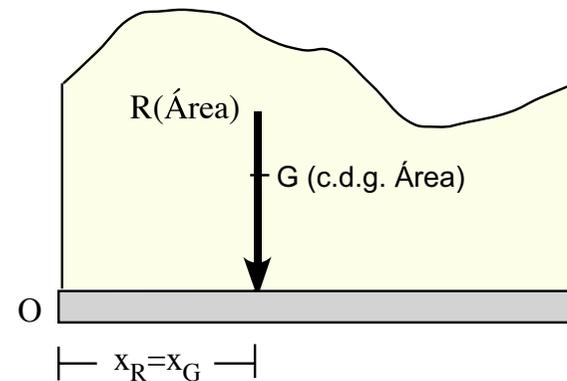
Sobre un trozo de longitud dx , actúa una fuerza $dF = f(x) dx = dA$.

Resultante: $R = \int dF = \int_0^L f(x) dx = \text{Área}$

Aplicada en x_R :

$$M_O = x_R R = \int x dF = \int_0^L x f(x) dx = \int x dA$$

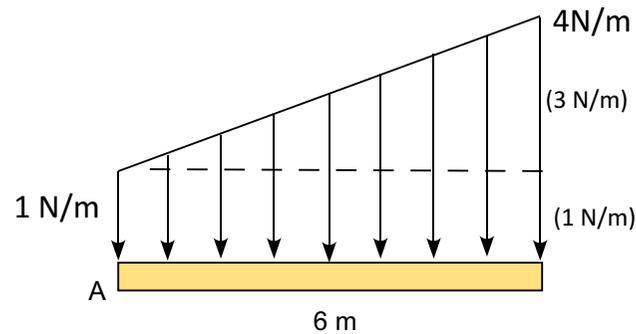
$$x_R = \frac{\int_0^L x f(x) dx}{R} = \frac{\int x dA}{A} = x_G \text{ (del cdg del área)}$$



La resultante de una carga distribuida es el área definida por la ley de carga y está aplicada en el c.d.g. de la misma.

Para componer distribuciones a partir de varias conocidas , se siguen las reglas de composición de c.d.g.'s

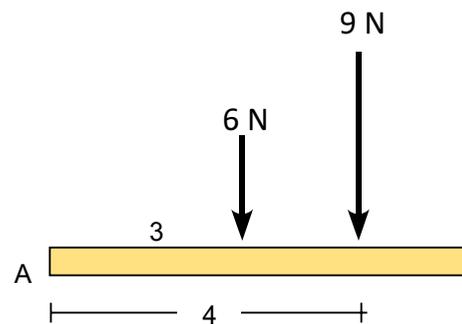
Ejemplo:



Carga rectangular:

$$R_1 = 1 \cdot 6 = 6 \text{ N}$$

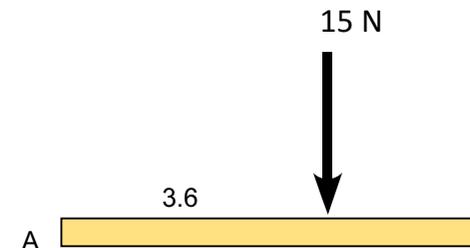
$$x_1 = 3 \text{ m}$$



Carga triangular:

$$R_2 = (1/2) \cdot 6 \cdot 3 = 9 \text{ N}$$

$$x_2 = (2/3) \cdot 6 = 4 \text{ m}$$



Resultante

$$R = 6 + 9 = 15 \text{ N}$$

$$x_R = \frac{3 \cdot 6 + 4 \cdot 9}{15} = 3.6 \text{ m}$$