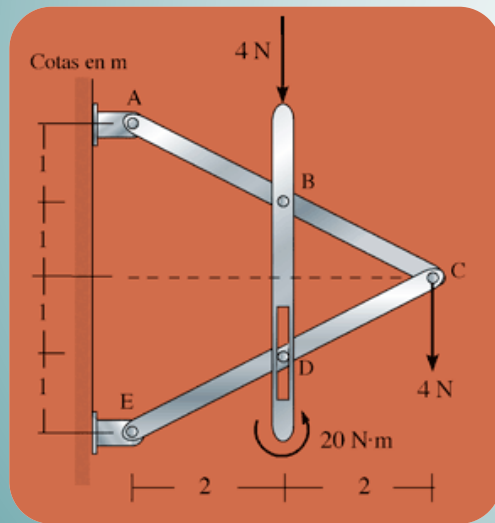


Mecánica

Tema 02. Estática del punto. Estática del sólido rígido. Enlaces. Sistemas de sólidos.



Cecilia Pardo Sanjurjo

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

Estática

Es la parte de la Mecánica dedicada al estudio del equilibrio de los cuerpos

Por equilibrio se entiende el estado de reposo permanente de los cuerpos, es decir, ausencia de movimiento mantenida en el tiempo o la situación equivalente según la ley de la inercia de movimiento rectilíneo uniforme

No confundir reposo en un instante con equilibrio: reposo en un instante sólo significa que en ese momento particular la velocidad es cero. El equilibrio exige que esa situación se mantenga a lo largo del tiempo: aceleración cero

Es un caso particular de la dinámica, las leyes son las mismas

Objetivo de los ingenieros civiles: diseñar estructuras que aguanten cargas de forma segura

Que no se muevan

Que todos sus elementos aguanten las cargas

Que sean sistemas seguros y duraderos

Para evitar que una estructura se mueva bajo la acción de cargas, habrá que anclarla mediante suficientes enlaces que lo garanticen

Saber calcular las fuerzas que actúan sobre cualquier elemento

Determinar los límites de equilibrio

Leyes de Newton

1ª ley o de la inercia

En ausencia de fuerzas, un punto se mantiene en estado de reposo o de movimiento uniforme

2ª ley o fundamental

Si sobre un punto material actúa una fuerza, dicho punto adquiere una aceleración en la dirección y sentido de la fuerza y de módulo directamente proporcional a la misma e inversamente proporcional a la masa del punto.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \xrightarrow{\text{Estática}} \vec{F} = \vec{0}$$

3ª ley o de acción- reacción

Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, éste ejerce sobre el primero una fuerza igual y opuesta

Las fuerzas tienen carácter vectorial pudiéndose componer y descomponer siguiendo sus reglas

Equilibrio de un punto

Por la segunda ley de Newton con $a=0$, la resultante de las fuerzas que actúan sobre el punto ha de ser cero.

$$\text{Un punto está en equilibrio} \Leftrightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$$

Para aplicar la condición de equilibrio hay que considerar todas las fuerzas que actúan sobre el punto, por tanto el primer paso ha de ser **aislar el punto y hacer un esquema de todas las fuerzas** que actúen sobre él, algunas de las cuales serán desconocidas e incógnitas a calcular y escribir las ecuaciones para cada componente de la resultante.

- Si el problema tiene tres dimensiones tendremos 3 ecuaciones escalares:

$$\boxed{\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0}$$

(Como máximo podremos tener 3 incógnitas para resolver completamente)

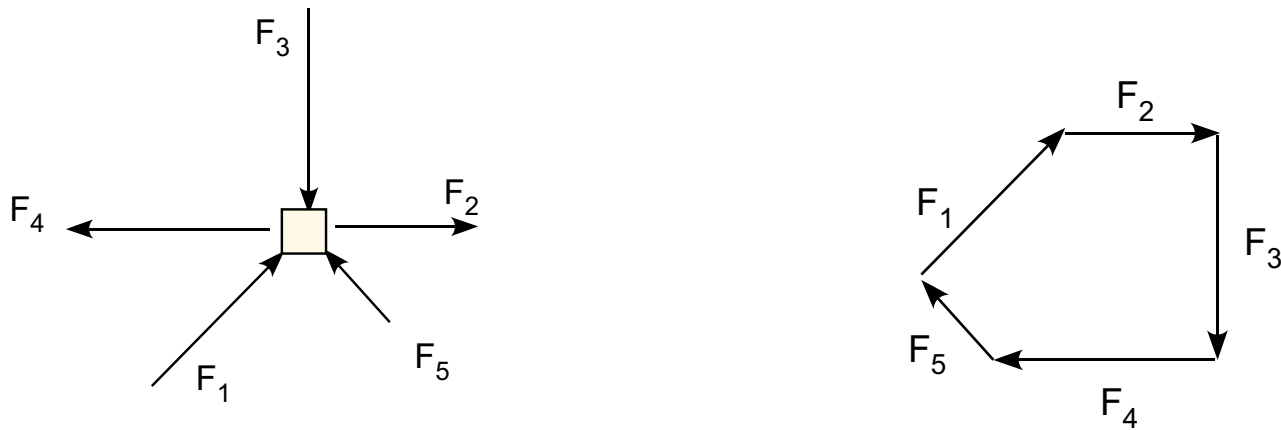
- Si el problema es bidimensional y todas las fuerzas están en el plano xy , tendremos 2 ecuaciones :

$$\boxed{\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0}$$

Como máximo podremos tener 2 incógnitas para poder obtenerlas

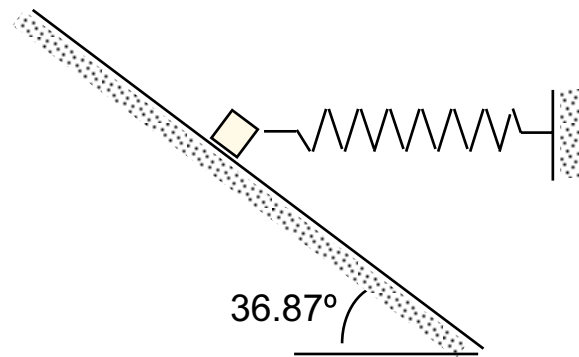
Equilibrio gráfico: polígono de fuerzas cerrado

Como en el caso de que haya equilibrio la resultante ha de ser 0, al dibujar una fuerza a continuación de otra (a escala), el extremo de la última fuerza tiene que coincidir con el origen de la primera. Si nos limitamos al plano se obtiene un polígono de fuerzas cerrado.

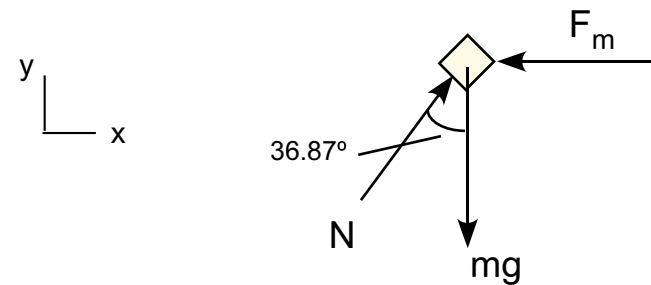


Como en el caso de escribir las ecs. de equilibrio, admite un máximo de dos fuerzas incógnita

Ejemplo: Una pequeño bloque de masa m se encuentra en equilibrio sobre un suelo inclinado 36.87° . No hay rozamiento entre suelo y bloque. Lo único que sabemos es el peso del cuerpo, mg . Queremos hallar todas las fuerzas que actúan sobre él.



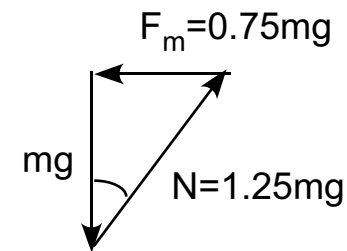
Se aísla el cuerpo y se hace el esquema de fuerzas que actúan sobre él



Se escriben las ecuaciones de equilibrio:

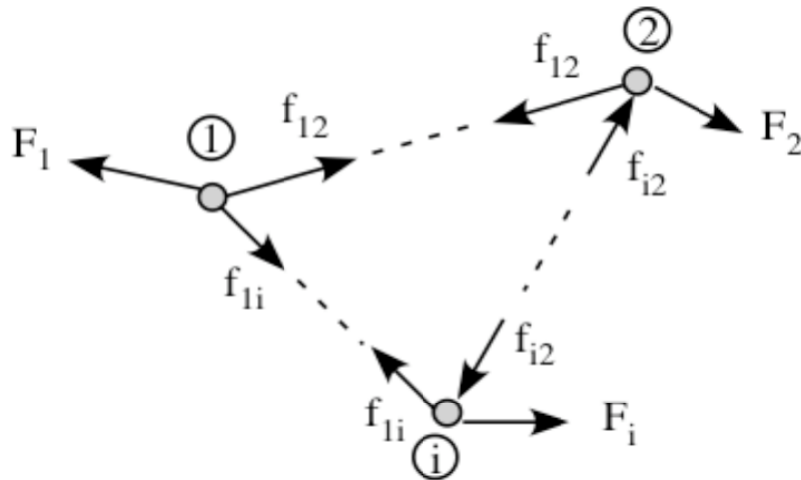
$$\left. \begin{aligned} \Sigma F_x = 0) N \sin 36.87 - F_m &= 0 \\ \Sigma F_y = 0) N \cos 36.87 - mg &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} N &= 1.25mg \\ F_m &= 0.75mg \end{aligned}$$

O bien se plantea equilibrio gráfico: polígono de fuerzas cerrado



Equilibrio de un sistema de masas puntuales

Sea un sistema de masas puntuales $1, 2, \dots, i, \dots, N$. Sobre él actúan fuerzas interiores y exteriores al sistema:



Fuerzas interiores f_{ij} ejercidas entre puntos del mismo sistema. Acción y reacción están dentro del sistema. Si sobre el punto 1 actúa una fuerza f_{12} ejercida por el punto 2, sobre el punto 2 actúa una fuerza igual y opuesta a la f_{12}

Fuerzas exteriores ejercidas por puntos ajenos al sistema; su reacción estaría fuera del mismo. A la resultante de estas fuerzas sobre el punto i le llamaremos F_i

Un sistema de puntos está en equilibrio si todos y cada uno de los puntos lo están :

$$\text{Punto 1 en equilibrio} \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \sum \vec{f}_{1j} = \vec{0}$$

⋮

⋮

$$\text{Punto } i \text{ en equilibrio} \Leftrightarrow \vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij} = \vec{0}$$

⋮

⋮

$$\text{Punto } N \text{ en equilibrio} \Leftrightarrow \vec{F}_N + \sum \vec{f}_{Nj} = \vec{0}$$

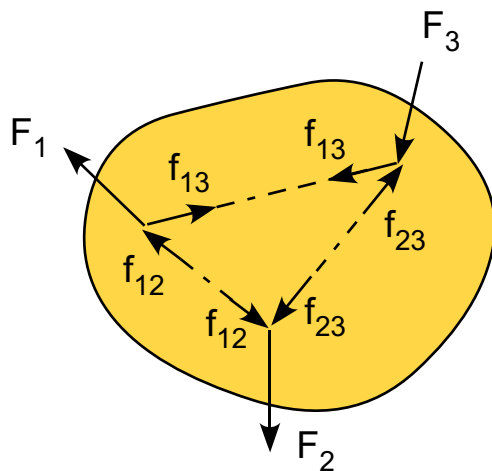
En 3 dimensiones tendríamos 3N ecuaciones

En 2 dimensiones 2N ecuaciones.

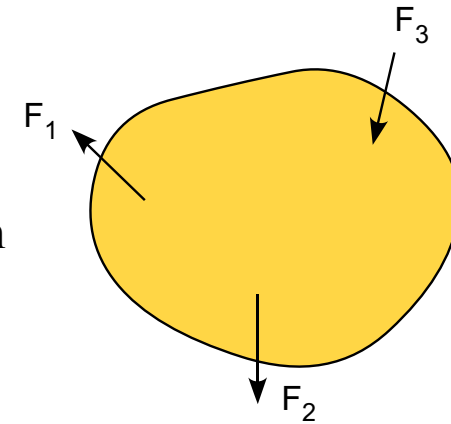
Equilibrio del sólido rígido

Sólido rígido : sistema de puntos materiales en que **las distancias se mantienen constantes**

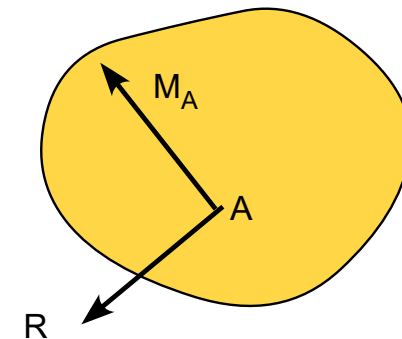
El efecto de una fuerza sobre un sólido rígido es el mismo para todos los puntos de aplicación de la fuerza dentro de su línea de acción (**principio de transmisibilidad**): **Las fuerzas se comportan como vectores deslizantes**



Las fuerzas interiores pueden deslizarse en su línea de acción y se cancelan dos a dos



Las fuerzas restantes (exteriores) se reducen en un punto a la resultante y al momento respecto a dicho punto siguiendo las reglas de los vectores deslizantes .



Sistemas de fuerzas equivalentes producen efectos equivalentes en el movimiento observado de los sólidos rígidos

Un sólido sobre el que no actúa ninguna fuerza (sistema nulo, $R=0$, $M=0$) es obvio que está en equilibrio: Todos los equivalentes a él lo estarán.

Un sólido rígido está en equilibrio si el sistema de fuerzas exteriores es un sistema nulo:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{0} \quad \vec{M}_A = \sum \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0} \quad \forall A$$

(En un sistema nulo, el momento respecto a cualquier punto es cero)

En lo que sigue, por fuerzas me referiré a fuerzas exteriores, a menos que especifique lo contrario

$$\text{Condición de equilibrio del sólido rígido:} \quad \sum \vec{F} = \vec{0} \quad \vec{M}_A = \vec{0} \quad \forall A$$

* En el espacio, las ecs de equilibrio suponen 6 ecuaciones escalares:

$$\begin{array}{ccc} \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ M_{A_x} = 0 & M_{A_y} = 0 & M_{A_z} = 0 \end{array}$$

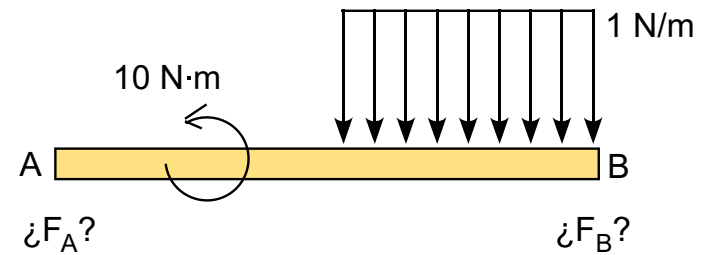
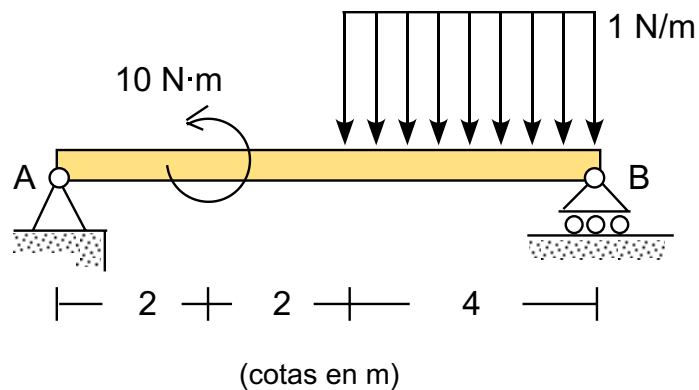
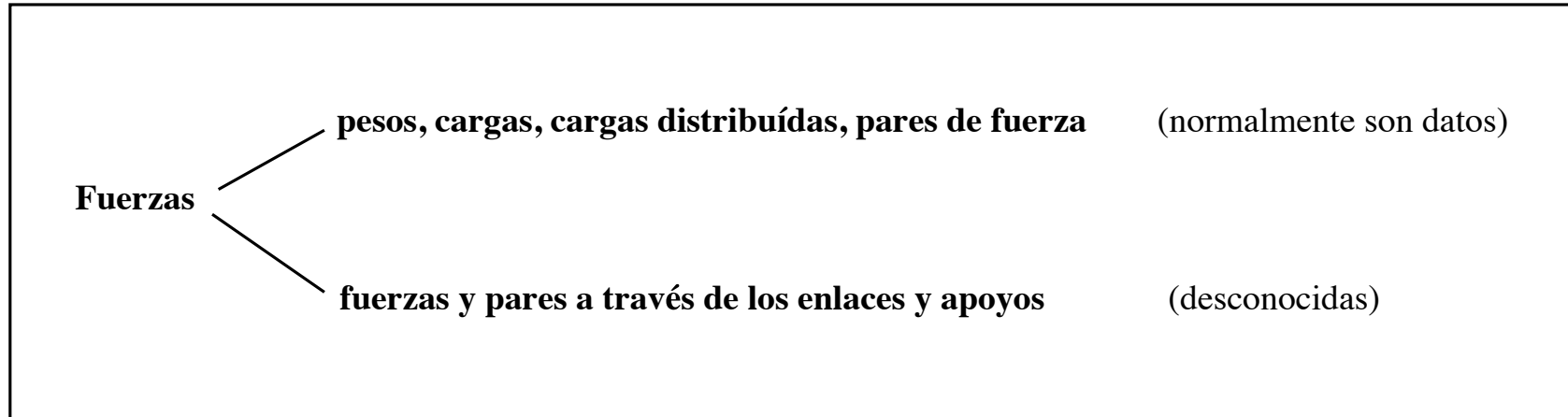
* En **problemas planos** (supongamos en el XY), hay **3 ecuaciones escalares** (M_A es sólo dirección z):

$$\boxed{\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad M_A = 0}$$

Los pasos a seguir son: hacer el **diagrama de fuerzas** que actúan sobre el sólido rígido, para lo cual hay que **aislarlo**, soltarlo de todos los apoyos y enlaces y sustituirlos por las fuerzas a que equivalen que siempre son desconocidas, las incógnitas del problema.

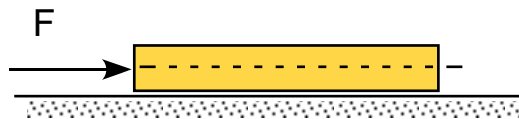
Las ecuaciones de equilibrio son nuestras herramientas

Diagrama del sólido rígido: Fuerzas



Los enlaces y contactos con otros sólidos suponen limitaciones al movimiento de los sólidos y suministran las fuerzas (y pares) que garantizan esas restricciones. A esas fuerzas se les suele llamar **reacciones**.

Efecto de fuerzas y momentos en el movimiento de un sólido



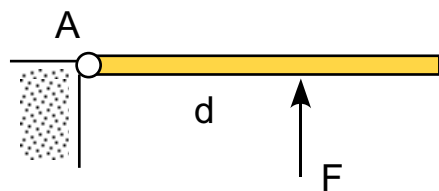
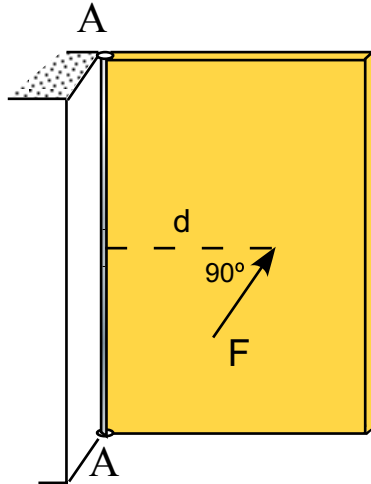
Fuerza neta



Traslación

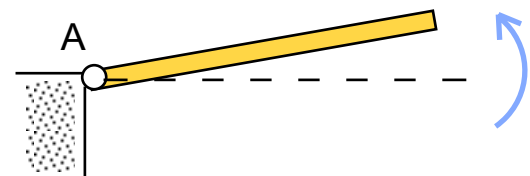
Todos los puntos se mueven igual

Para evitarlo: enlace que suministre $-F$



Momento neto

$$M_A = d F$$



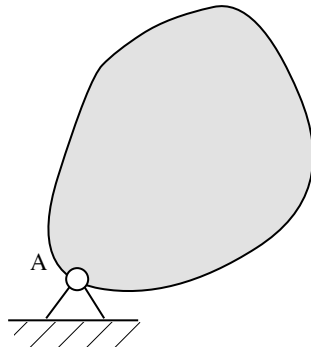
giro

Cambio de orientación (de ángulo)

Para evitarlo enlace que suministre $-M_A$

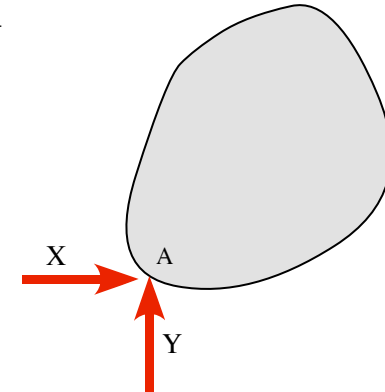
Reacciones de enlaces en el plano

• Articulación a punto fijo

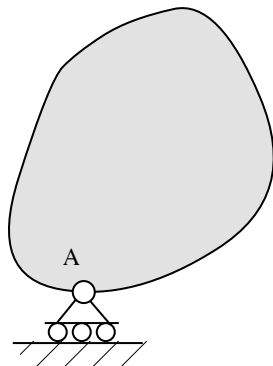
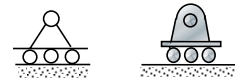


Impide que A se mueva en cualquier dirección del plano (es decir en x y en y)
Permite giros

Reacciones: fuerza en cualquier dirección, de componentes **X**, **Y** que pueden tomar cualquier valor (2 incógnitas)



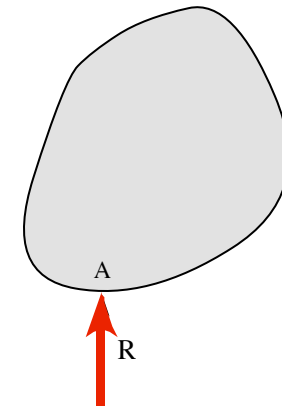
• Apoyo simple

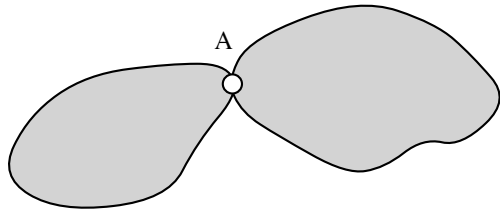


Impide desplazamiento de A en la dirección perpendicular al suelo, en este caso verticalmente (y)

Permite el desplazamiento del punto en la dirección del suelo (x) y el giro del sólido

Reacciones:
fuerza, **R**, perpendicular al suelo (1 incógnita)

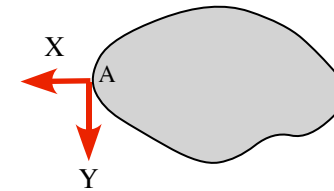
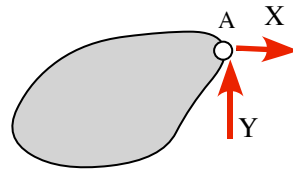




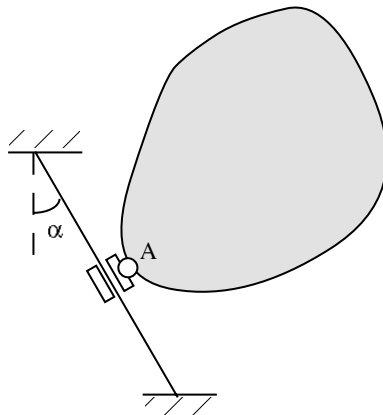
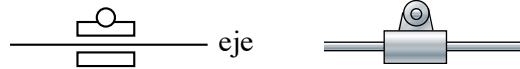
• **Articulación**

Impide desplazamientos relativos del punto A, tanto en x como en y
Permite giros relativos

Reacciones: fuerzas **X, Y**
(2 incógnitas)

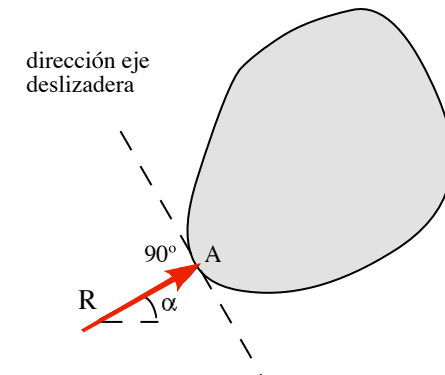


• **Deslizadera articulada**

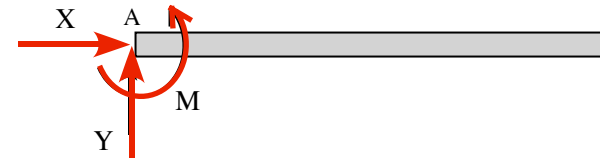
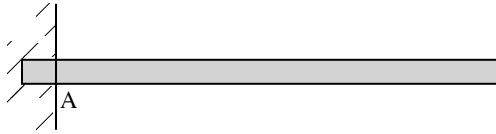


Permite desplazamiento de A a lo largo del eje de la deslizadera y giros del sólido
Impide desplazamiento perpendicular a dicho eje

Reacción: Fuerza **R perpendicular al eje de la deslizadera** (1 incógnita)

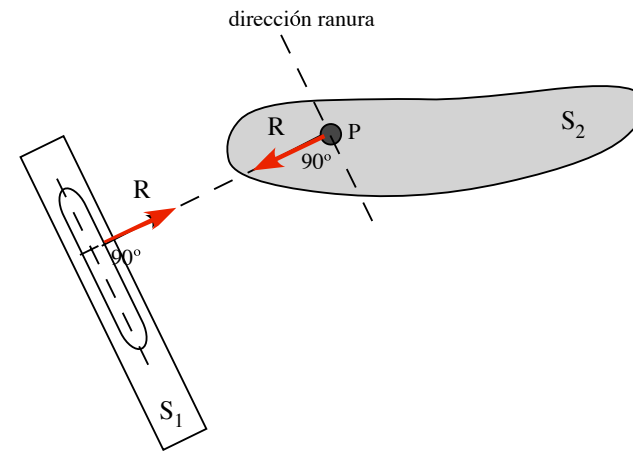
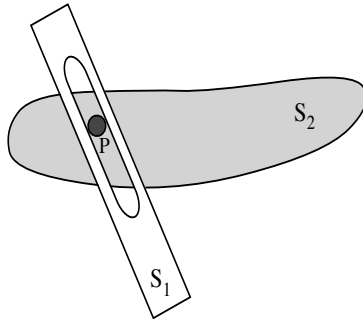


- **Empotramiento** No permite ningún desplazamiento de A ni tampoco giros del sólido



Reacción: fuerzas **X, Y** y un par de fuerzas de reacción **M** (3 incógnitas)

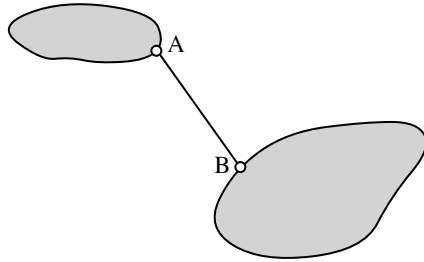
- **Sólido con ranura**



El punto P del sólido S_2 se puede desplazar a lo largo de la ranura del otro sólido. No puede hacerlo en la dirección perpendicular a la ranura

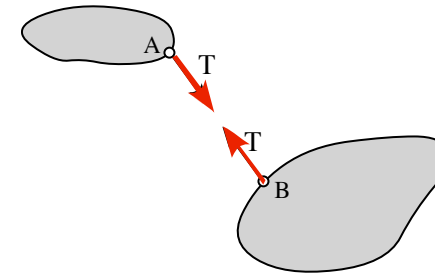
El giro está permitido. Reacción: fuerza **perpendicular a la ranura, R** (1 incógnita)

- **Hilo ideal (sin peso propio, inextensible)**

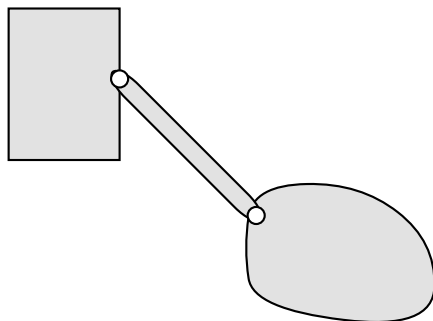


La distancia AB coincide con la longitud del hilo no puede hacerse mayor

Reacción: fuerza **tirando** de los sólidos en la dirección del hilo **T** (tensión hilo, 1 incógnita)

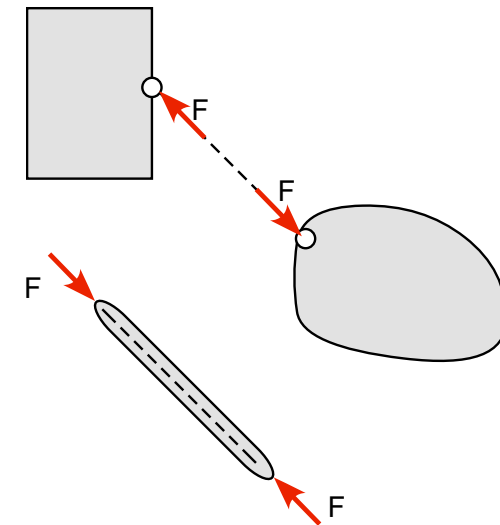


- **Conexión mediante una barra de masa despreciable y sin cargas interiores articulada a dos sólidos (biela):**

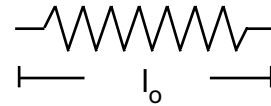


Se sustituye por fuerzas en la dirección de la barra, que pueden actuar comprimiendo (como en el dibujo) o tirando (tracción) de los puntos de los sólidos a que va unida

1 incógnita, **F**.

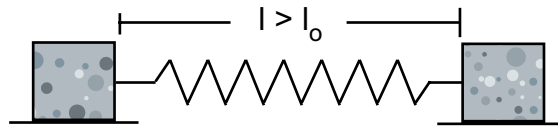


• **Resorte o muelle elástico ideal**

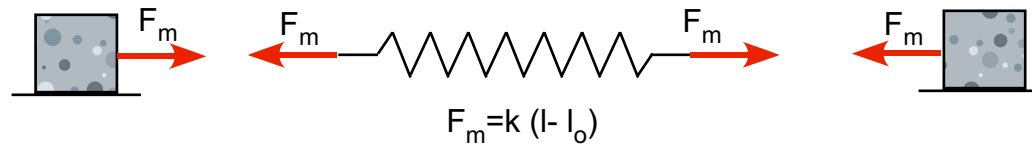


De constante elástica k (N/m) y longitud natural l_0

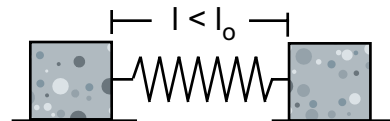
* Estirado



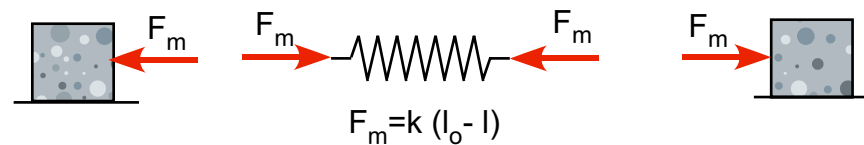
Se sustituye por fuerzas en su dirección que **tiran** de ambos sólidos



* Comprimido



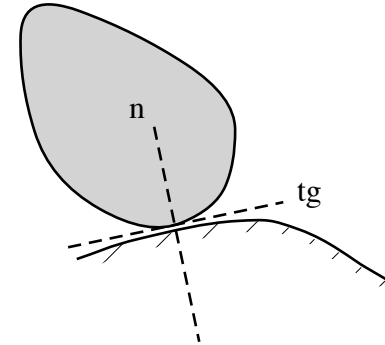
Se sustituye por fuerzas en su dirección que **comprimen o empujan** a los sólidos



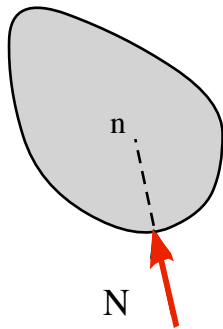
Contactos entre sólidos

Apoyos puntuales

Sean tg y n las **direcciones tangente y normal** en el punto de contacto



Contacto puntual sin rozamiento (a veces se le llama liso)



El apoyo impide que un cuerpo penetre en el otro.
No impide que resbalen o deslicen uno sobre otro.
Tampoco impide que se separen

Reacción: **fuerza en la dirección normal**, cuyo sentido es entrando en el cuerpo en el punto de contacto

$$N \quad \text{con } N \geq 0$$

**De los contactos entre sólidos (con y sin rozamiento, puntuales y extensos), nos ocuparemos más adelante

Volviendo a la viga anterior:

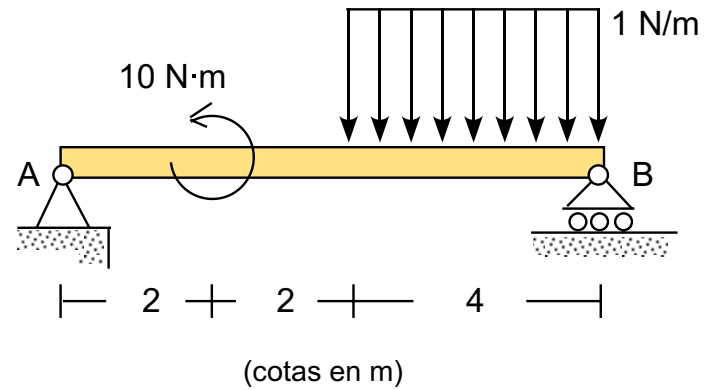
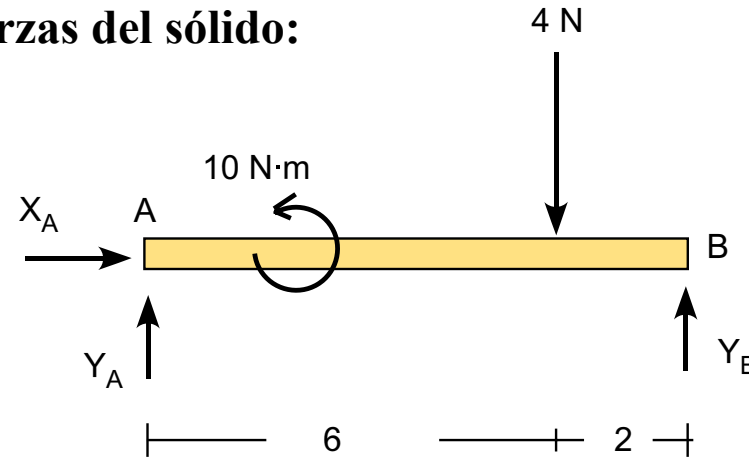


Diagrama de fuerzas del sólido:



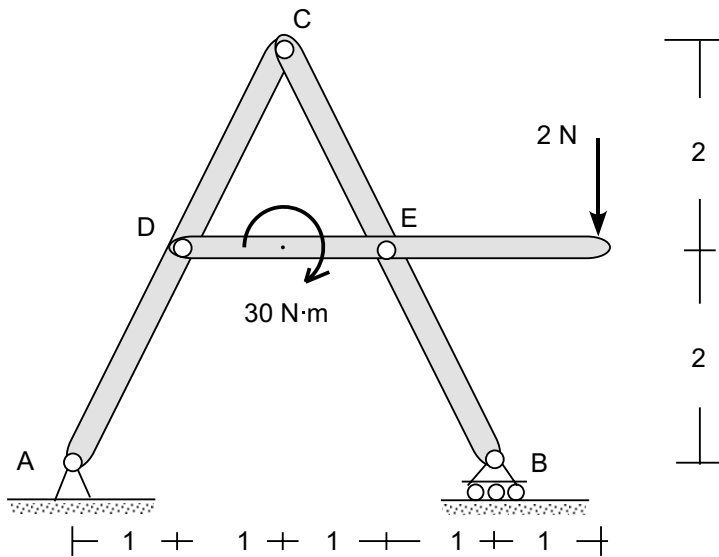
Y se pueden escribir las **ecuaciones de equilibrio del sólido:**

$$\Sigma F_x = 0) \quad \underline{X_A = 0}$$

$$\Sigma F_y = 0) \quad Y_A + Y_B - 4 = 0$$

$$M_A = 0) \quad 10 - 4 \cdot 6 + Y_B \cdot 8 = 0 \rightarrow \underline{Y_B = 1.75 \text{ N}}$$

$$\underline{Y_A = 2.25 \text{ N}}$$

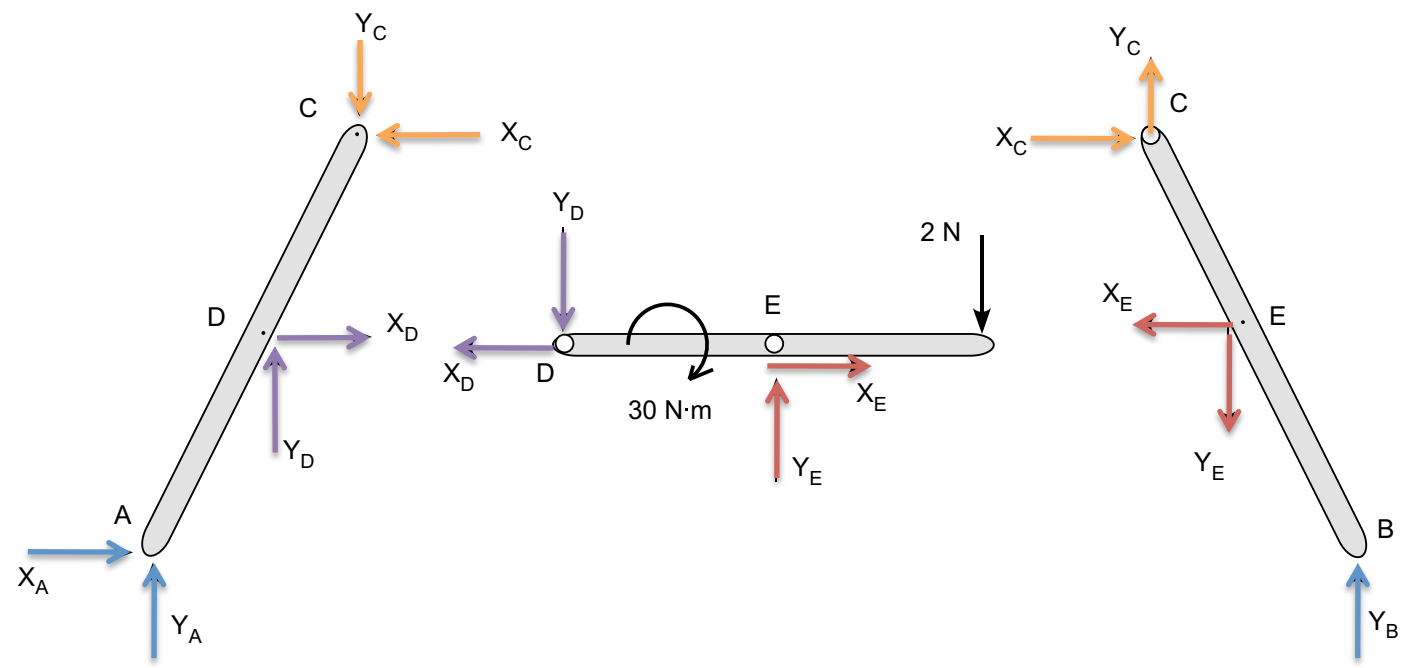


Ejemplo: Hallar las fuerzas que actúan sobre las tres barras que forman el siguiente sistema

- Se aísla cada sólido y se hacen sus diagramas de fuerzas

Si planteo las ecuaciones de equilibrio de cada sólido, obtengo 9 ecuaciones de equilibrio con 9 incógnitas (reacciones).

Se puede resolver, pero no es cómodo

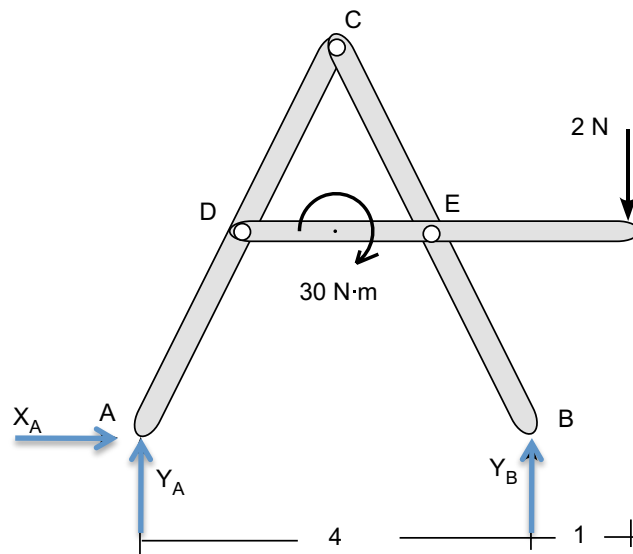


Principio de solidificación:

Si un sistema de sólidos está en equilibrio cada una de sus partes lo está (el sistema completo, un subconjunto de sólidos, un punto particular,...)

Se puede plantear el equilibrio de **cualquier parte** del sistema. Las ecuaciones de equilibrio que se obtienen así son combinación de las de los sólidos individuales, no se generan ecuaciones nuevas, pero muchas veces hacen más fácil la resolución.

Por ejemplo, **siempre conviene considerar el equilibrio del sistema completo** por si se obtiene directamente alguna incógnita

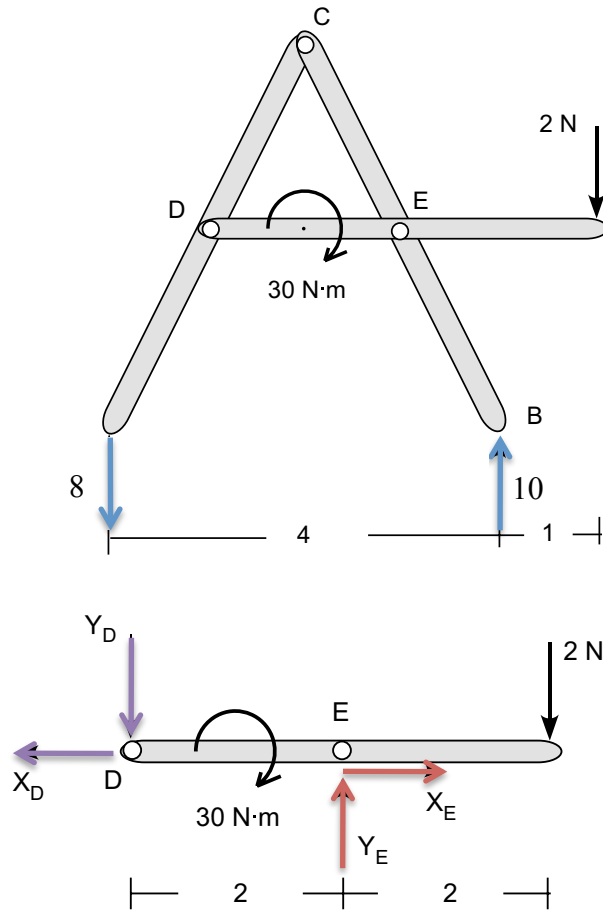


En el ejemplo anterior, si consideramos el sistema completo y planteamos su equilibrio:

$$\sum F_x = 0) \underline{X_A = 0}$$

$$M_A = 0) Y_B \cdot 4 - 30 - 2 \cdot 5 = 0 \rightarrow \underline{Y_B = 10 \text{ N}}$$

$$\sum F_y = 0) Y_A + Y_B = 2 \rightarrow Y_A = -8 \quad \underline{Y_A = 8 \text{ N} \downarrow}$$



Hemos obtenido las reacciones en los apoyos que podemos incorporar al esquema

Elegimos a continuación alguna de las barras en la que al aplicar las ecuaciones de equilibrio podamos obtener alguna incógnita.

Barra horizontal:

$$\sum F_x = 0) X_D = X_E$$

$$M_D = 0) Y_E \cdot 2 - 30 - 2 \cdot 4 = 0 \rightarrow \underline{Y_E = 19 \text{ N}}$$

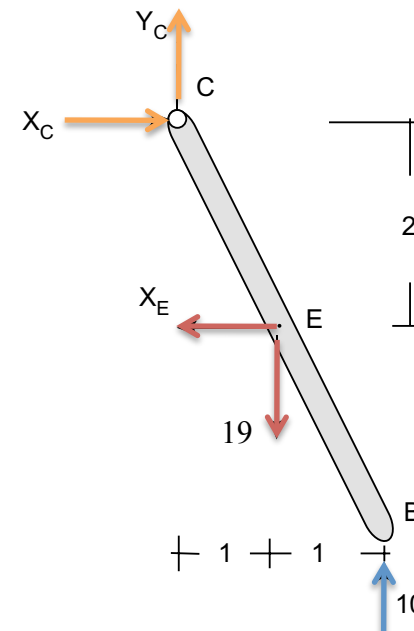
$$\sum F_y = 0) Y_D + 2 = 19 \rightarrow \underline{Y_D = 17 \text{ N}}$$

Barra BC:

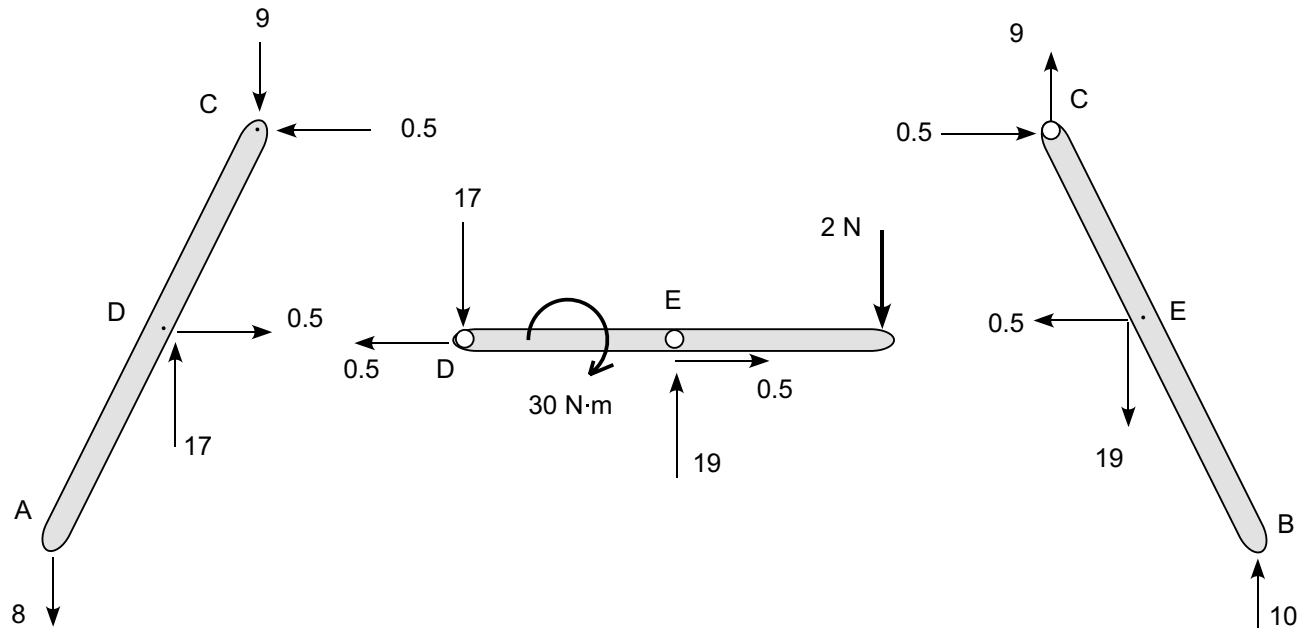
$$\sum F_y = 0) Y_C + 10 = 19 \rightarrow \underline{Y_C = 9 \text{ N}}$$

$$M_C = 0) 10 \cdot 2 - X_E \cdot 2 - 19 \cdot 1 = 0 \rightarrow \underline{X_E = 0.5 \text{ N}}$$

$$\sum F_x = 0) X_C = X_E \rightarrow \underline{X_C = 0.5 \text{ N}}$$



La barra AC estaría ya resuelta y se puede usar para comprobar

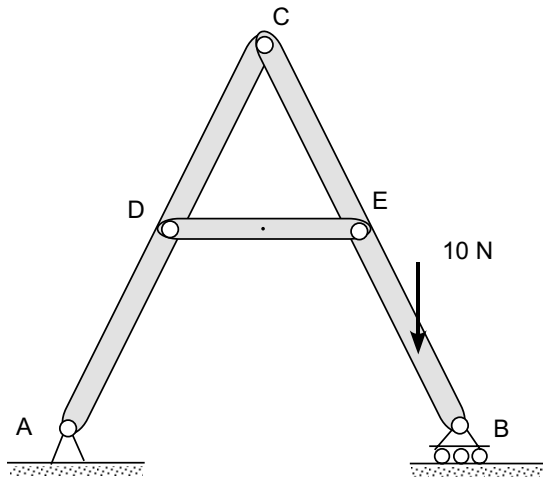
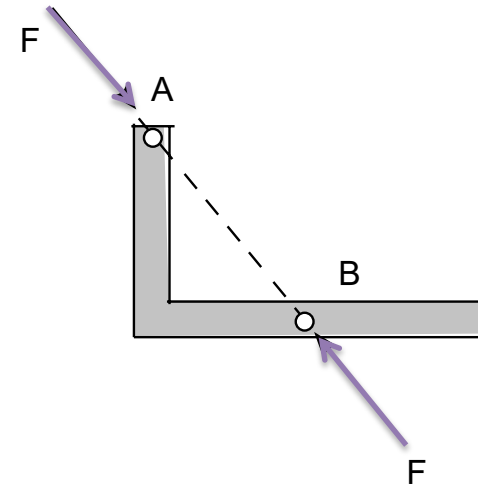


En resumen: en un sistema de varios sólidos la estrategia es buscar sólidos o grupos de sólidos (siempre mirar el completo) con sólo 3 incógnitas, ya que se pueden resolver con sus 3 ecuaciones de equilibrio.

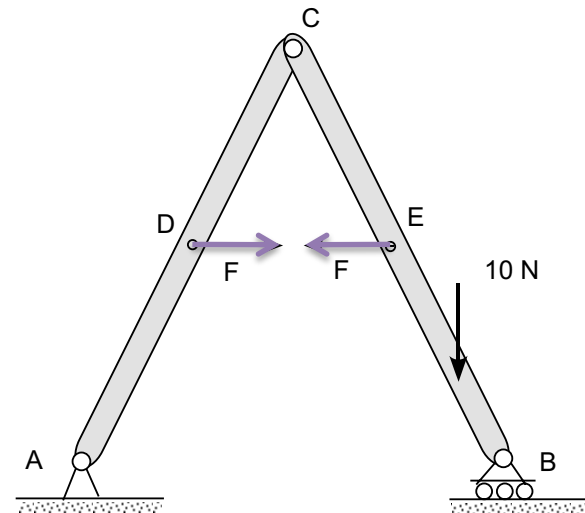
Si no hay ninguno con tres incógnitas hay que buscar alguno que permita la resolución parcial (mirar barras verticales y horizontales).

A tener en cuenta al separar sólidos:

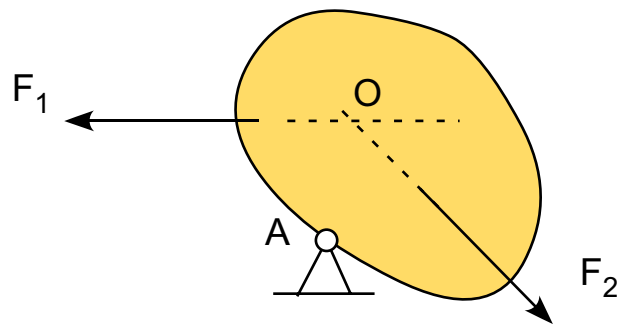
*Si hay un **sólido sometido exclusivamente a dos fuerzas** en los puntos A y B, y está en equilibrio, éstas han de ser iguales y opuestas y dirigidas según AB



En esta estructura, la barra DE no tiene cargas (ni pares), salvo las fuerzas que le llegan a través de D y E: es un sólido a 2 fuerzas iguales y opuestas según DE, F y $-F$ en D y E.

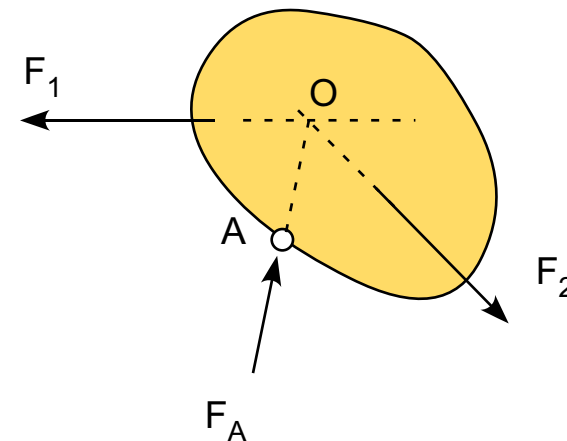


Si un cuerpo está en equilibrio bajo la acción de 3 fuerzas, siendo dos de ellas concurrentes, la tercera también ha de serlo.

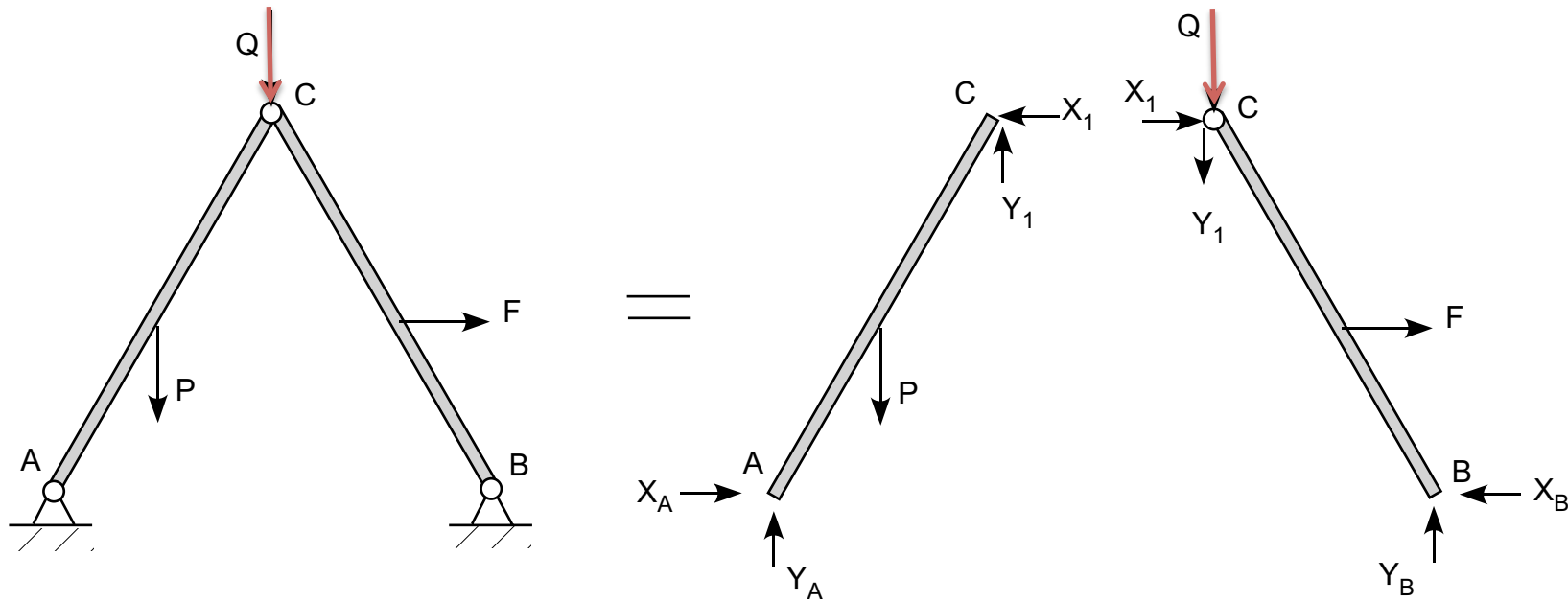


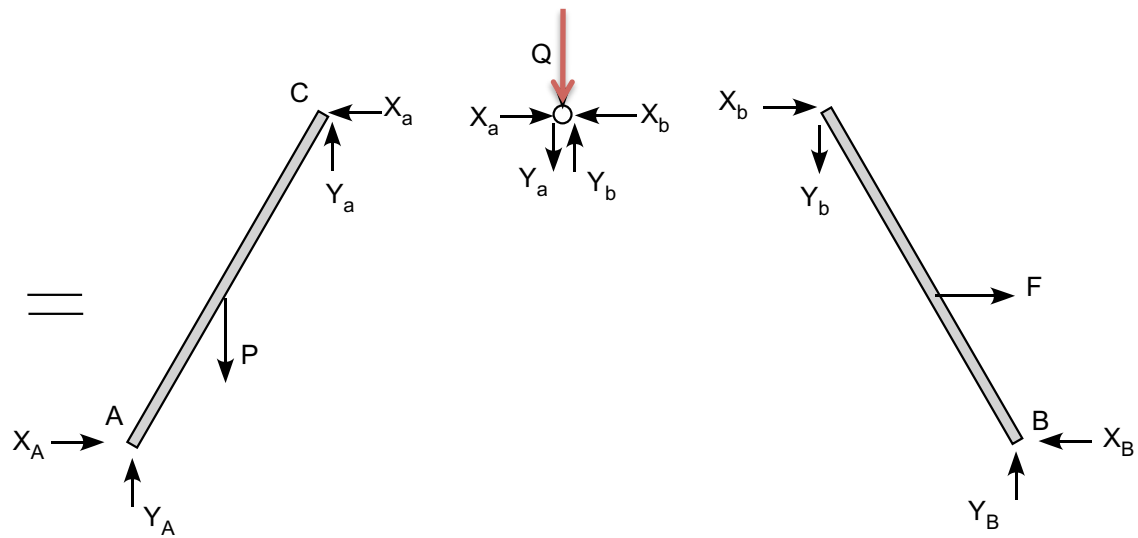
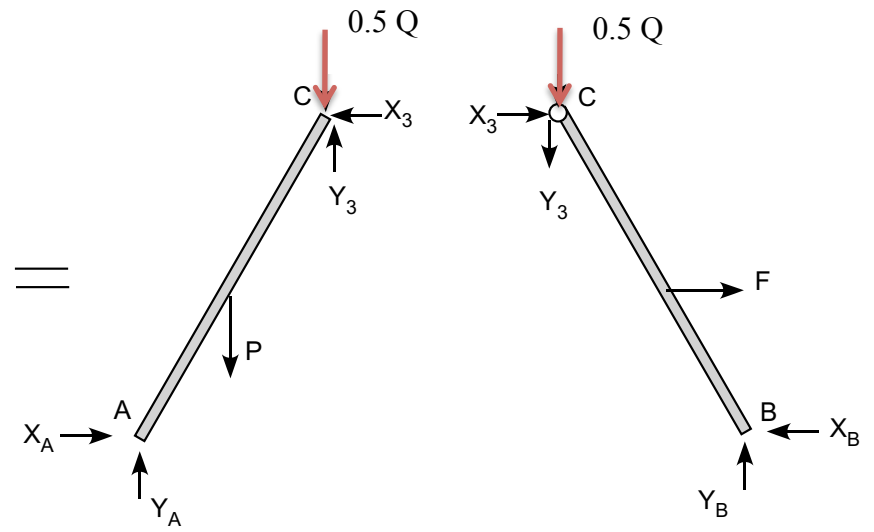
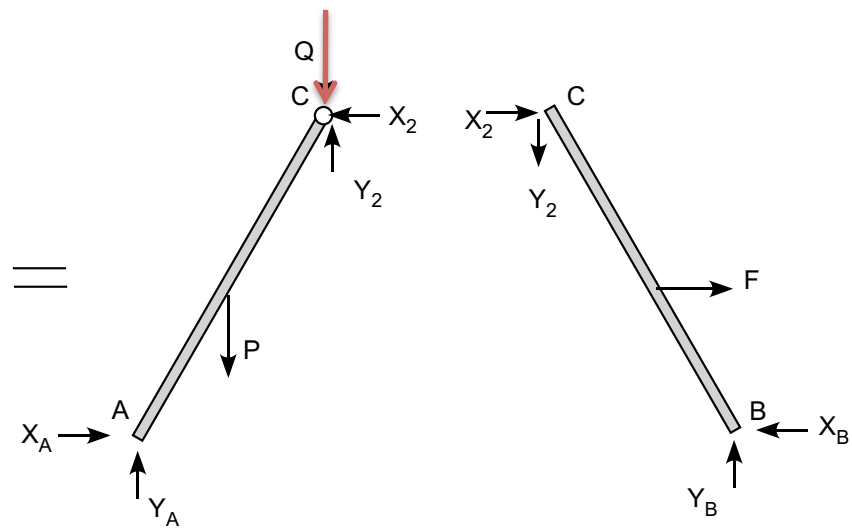
F_1 y F_2 concurren en O

La línea de acción de la fuerza que llega a través del enlace en A tiene que pasar también por O

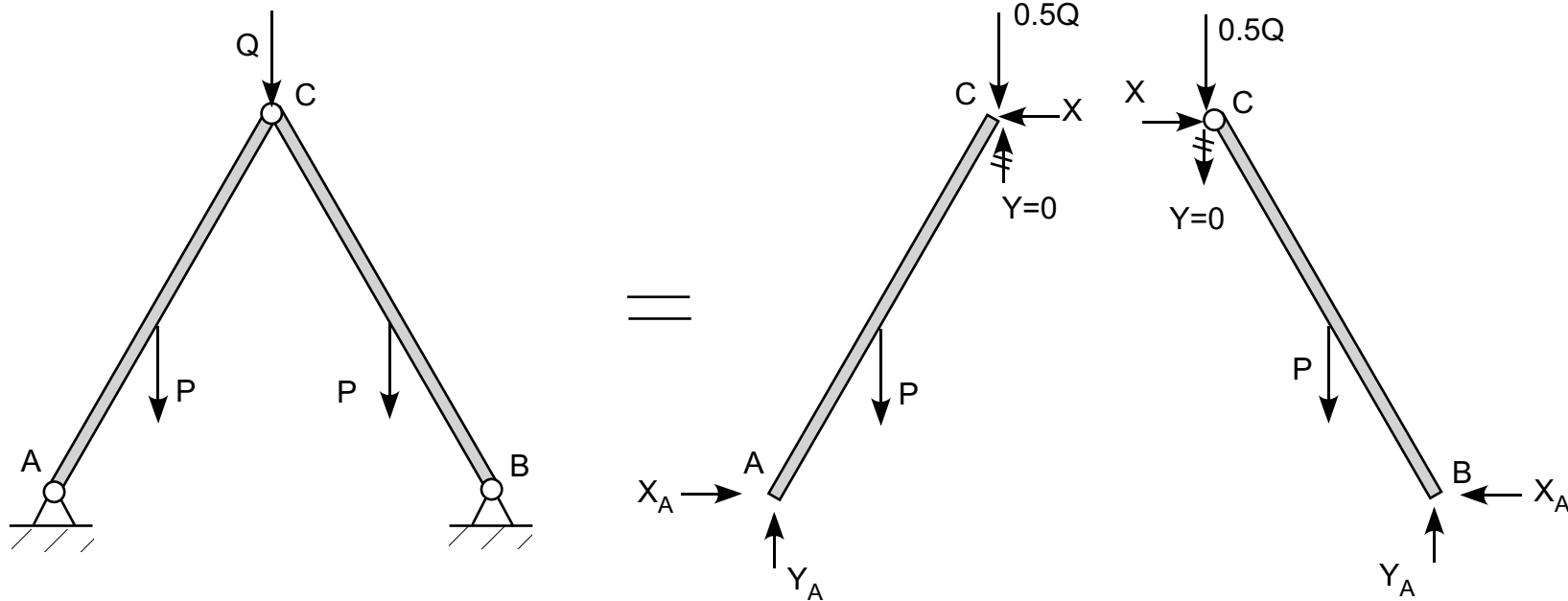


Cargas aplicadas en un punto de enlace entre sólidos: Al separar los sólidos se puede dejar en uno de ellos o una fracción en cada uno, o incluso separar la articulación de los dos sólidos y dejar la carga aplicada en ella

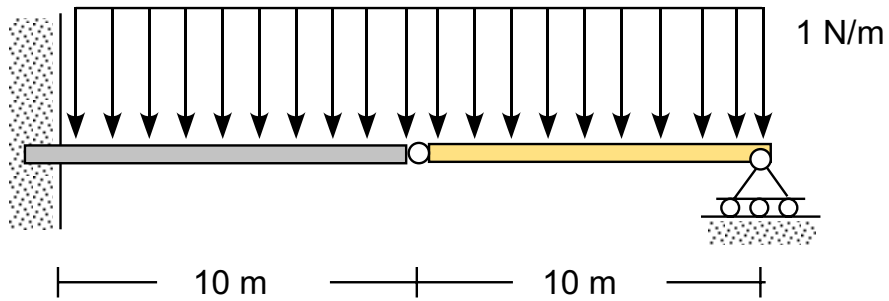




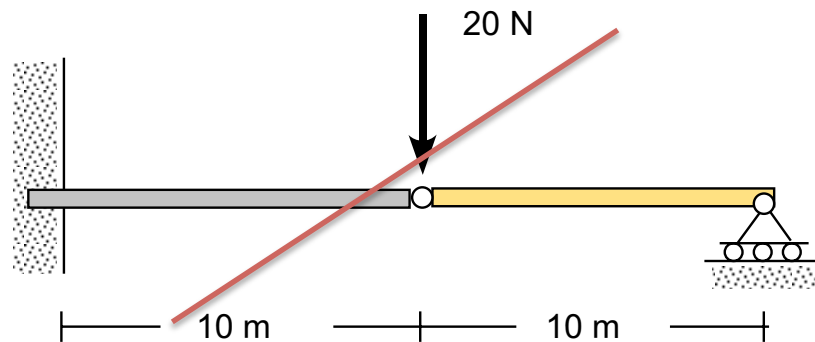
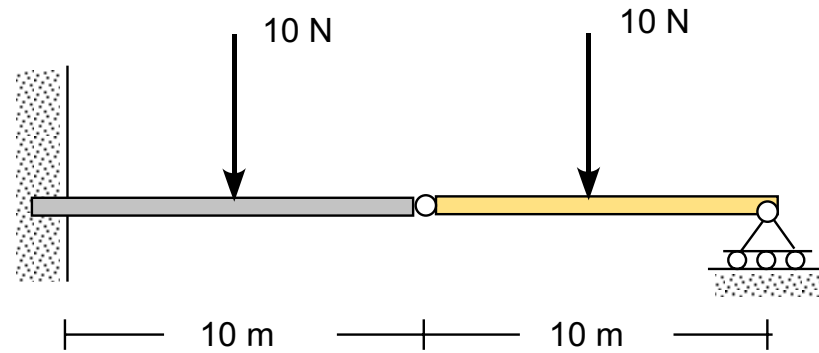
Si el **sistema es simétrico** respecto a un eje, tanto en cargas como en apoyos, al separarlo en dos por dicho eje repartiendo simétricamente las cargas, las componentes de las reacciones que rompan dicha simetría son 0



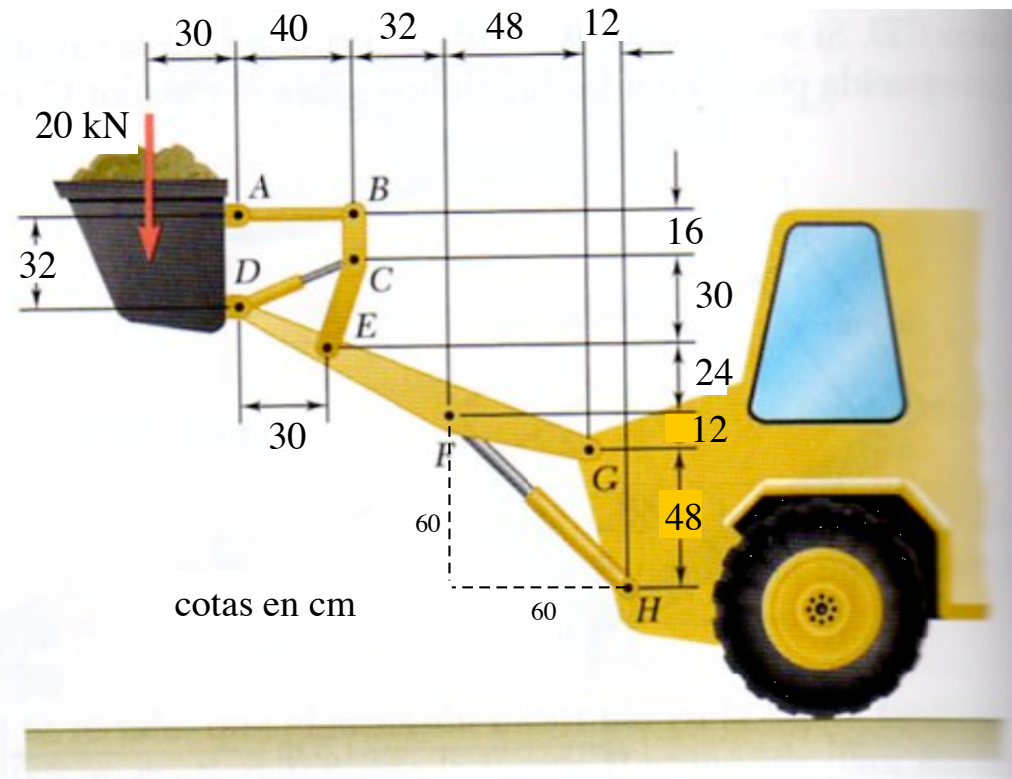
Si una **carga distribuida** actúa sobre varios sólidos, se compone la parte correspondiente a cada sólido



Correcto



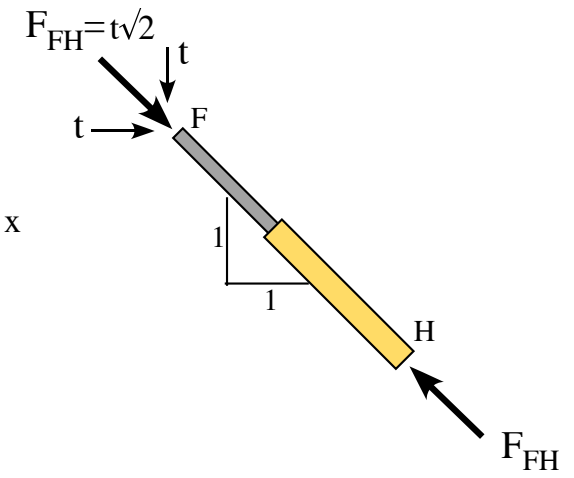
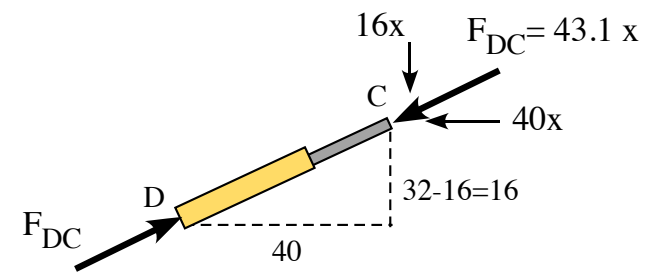
Incorrecto

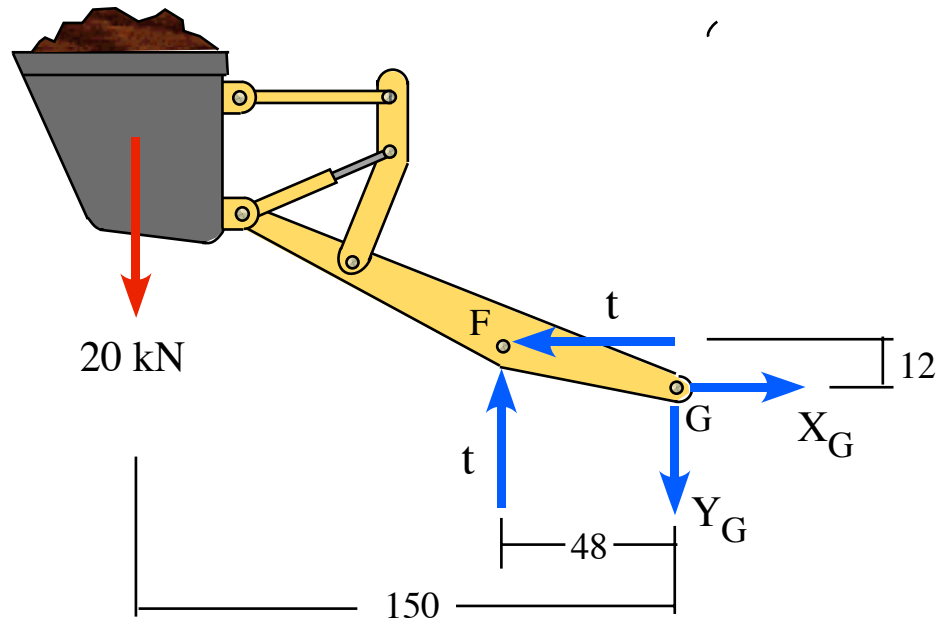


En la excavadora de la figura, un mecanismo permite levantar cargas mediante los elementos DC y FH de longitud controlable. Calcular, para la carga y situación de la figura:

- a) Fuerzas ejercidas por los cilindros neumáticos FH y DC
- b) Fuerzas sobre el sólido GFED

Sólidos a dos fuerzas:





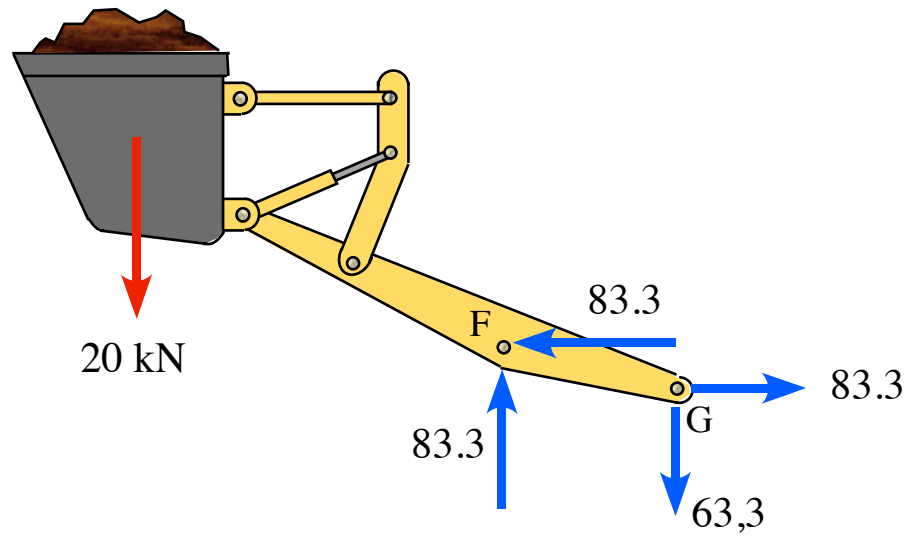
Equilibrio sistema

$$M_G = 0) \quad 12t + 20 \cdot 150 - 48t = 0 \rightarrow t = 83,3 \text{ kN}$$

$$F_{FG} = t\sqrt{2} \approx 117.9 \text{ kN (c)}$$

$$\sum F_x = 0) \quad X_G = 83,3 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0) \quad Y_G = 63,3 \text{ kN}$$



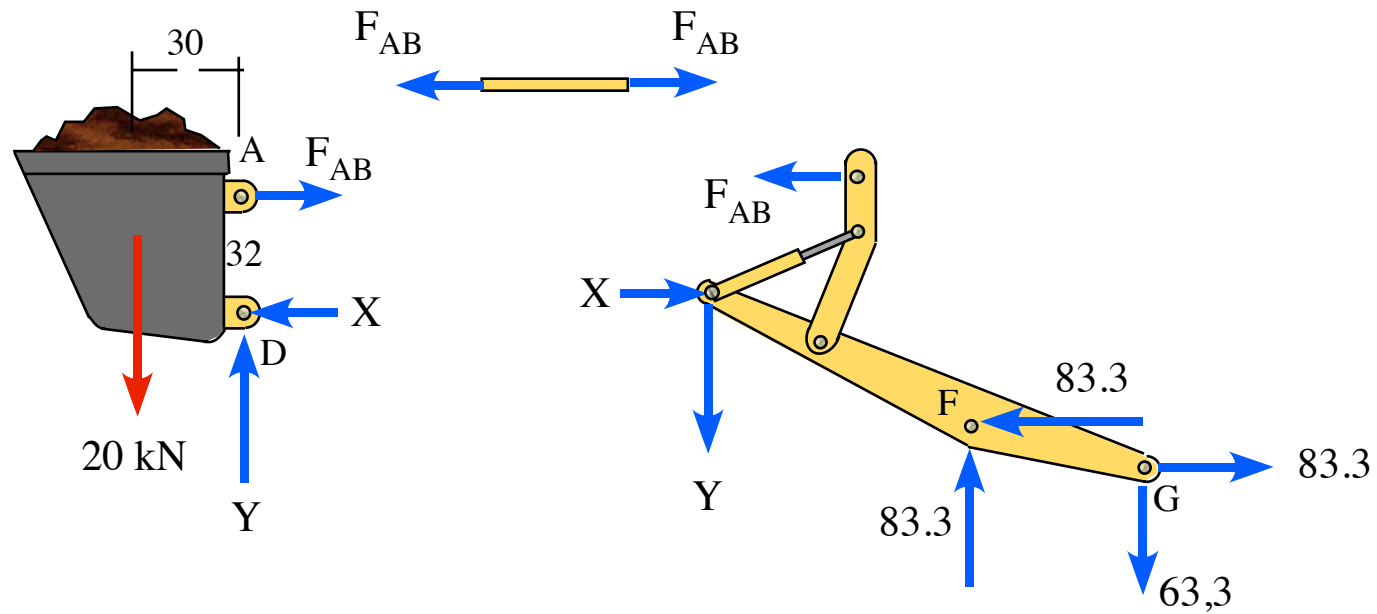
Equilibrio sistema

$$M_G = 0) \quad 12t + 20 \cdot 150 - 48t = 0 \rightarrow t = 83,3 \text{ kN}$$

$$F_{FG} = t\sqrt{2} \approx 117.9 \text{ kN (c)}$$

$$\Sigma F_x = 0) \quad X_G = 83,3 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0) \quad Y_G = 63,3 \text{ kN}$$

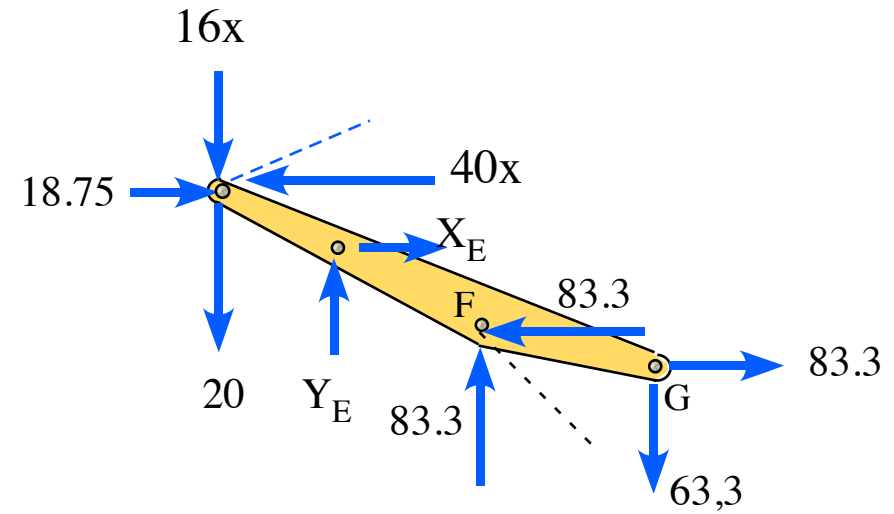
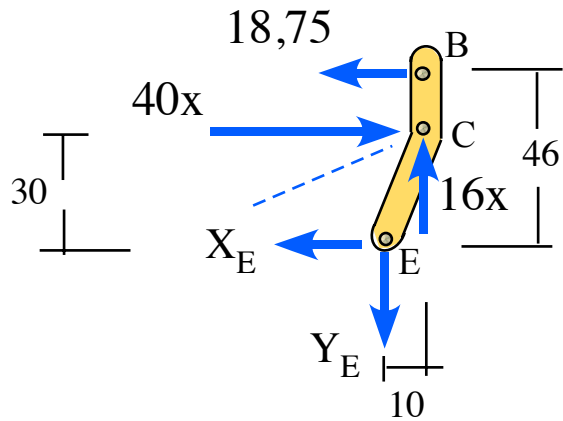


Equilibrio cuchara:

$$\sum F_y = 0) Y = 20 \text{ kN}$$

$$M_D = 0) 32F_{AB} = 20 \cdot 30 \rightarrow F_{AB} = 18.75 \text{ kN (t)}$$

$$\sum F_x = 0) X = 18.75 \text{ kN}$$



Pieza BCE:

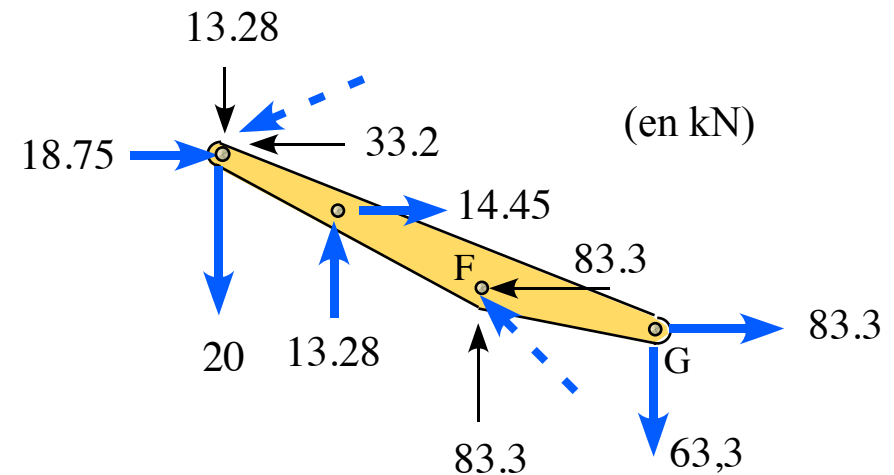
$$M_E = 0) \quad 10 \cdot 16x + 18,75 \cdot 46 - 30 \cdot 40x = 0 \rightarrow x = 0,83$$

$$F_{DC} = 43,08x \approx 35,76 \text{ kN (c)}$$

$$\sum F_x = 0) \quad X_E = 14,45 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0) \quad Y_E = 13,28 \text{ kN}$$

El brazo largo queda ya resuelto sin más que sustituir las fuerzas que acabamos de calcular.



Límites del equilibrio

¿Cómo puede perder el equilibrio un sólido ?

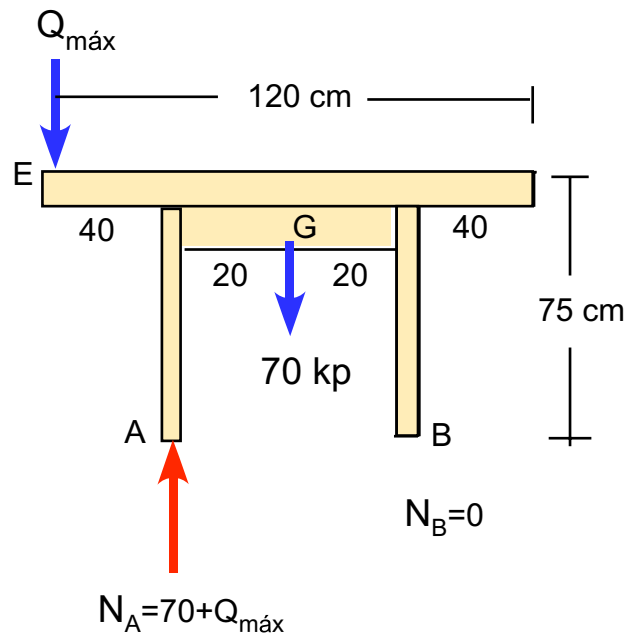
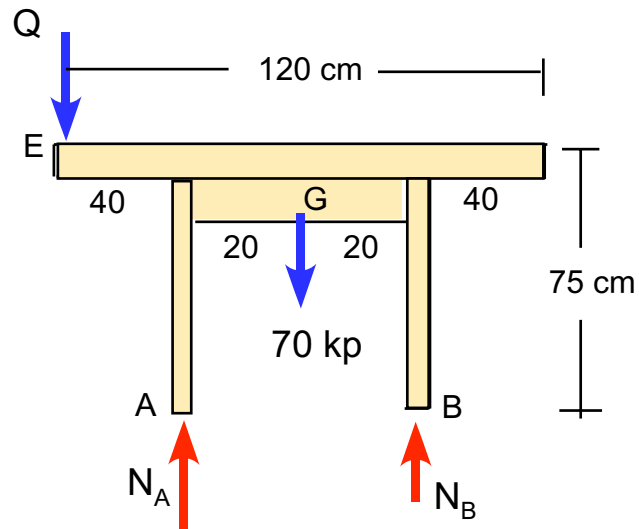
Falla la fuerza: alguna componente de la resultante deja de ser 0  Se inicia traslación en esa dirección

Falla el momento de las fuerzas  El sólido inicia un giro (vuelco)

Matemáticamente, **las posibilidades de movimiento se corresponden con los valores límite de las reacciones.**

Por ejemplo, el límite de la fuerza normal es $N=0$; cuando se alcanza supone una pérdida de apoyo y una pérdida de equilibrio como veremos en el ejemplo siguiente.

Hallar la máxima fuerza Q que se puede hacer en el extremo E de la mesa de la figura sin que se rompa el equilibrio.



$$\sum F_y = 0) N_A + N_B = 70 + Q$$

$$M_A = 0) N_B \cdot 40 - 70 \cdot 20 + Q \cdot 40 = 0$$

De donde se obtiene:

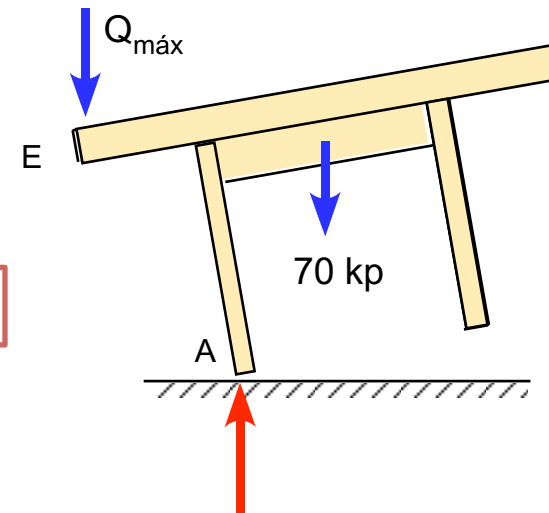
$$N_B = 35 - Q \geq 0 \quad N_A = 35 + 2Q \geq 0$$

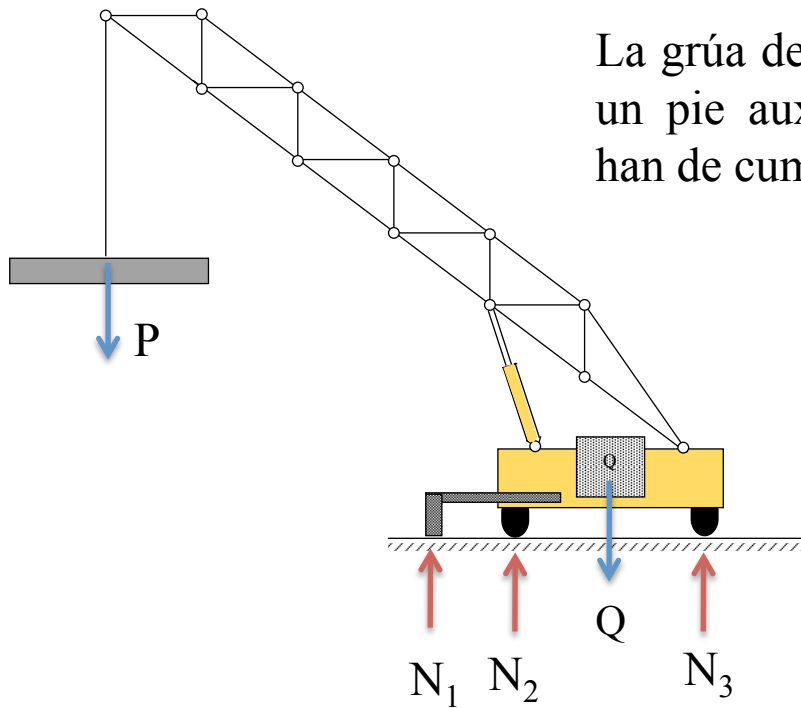
A medida que Q aumenta, N_B disminuye hasta que se hace 0, y está a punto de perder el apoyo en B:

$$N_B = 0 \rightarrow Q = 35 \text{ kp} = Q_{\text{máx}}$$

$$N_A = 105 \text{ kp}$$

Vuelco en A





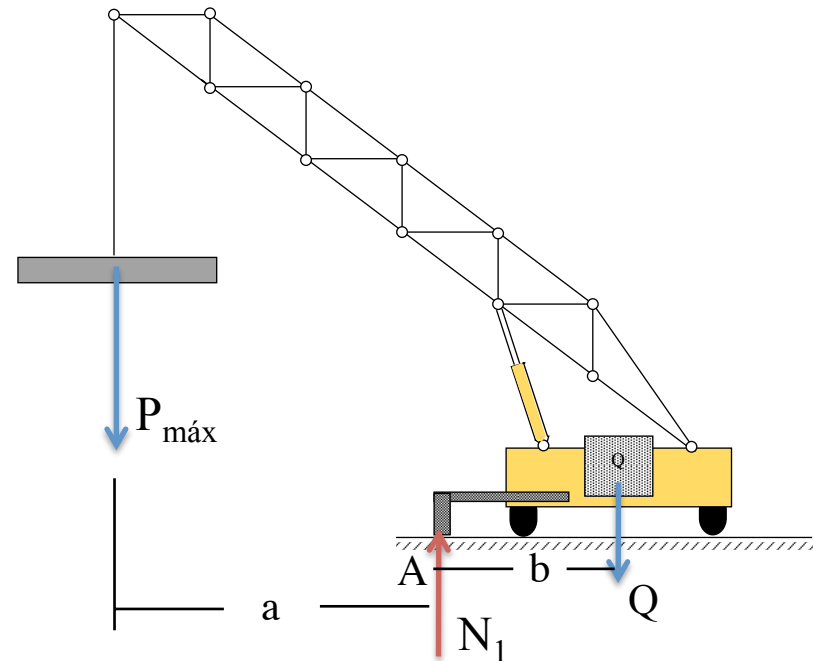
La grúa del dibujo está apoyada en sus ruedas y en un pie auxiliar retráctil. Las reacciones normales han de cumplir:

$$N_1 \geq 0 \quad N_2 \geq 0 \quad N_3 \geq 0$$

Cuando el peso P que está levantando es pequeño, todas las normales > 0

El peso máximo que puede levantar lo da la situación límite en que alguna o varias de las normales alcanzan su límite ; en este caso:

$$N_2 = 0 \quad N_3 = 0$$

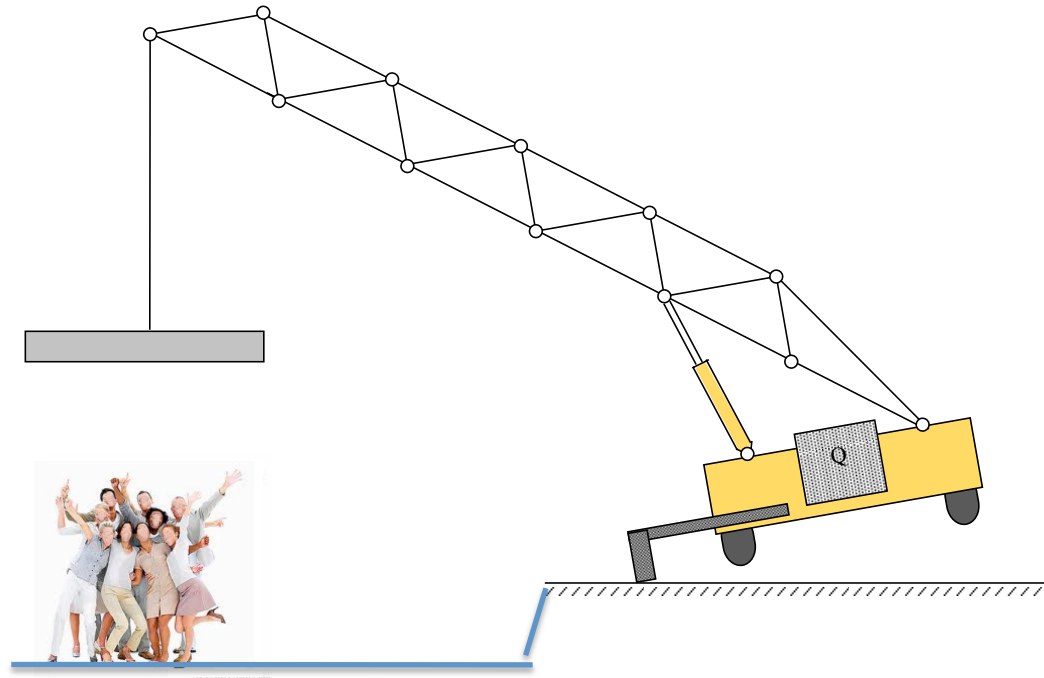


Las ecuaciones de equilibrio en esta situación límite permiten determinar el $P_{\text{máx}}$:

$$M_A = 0) P_{\text{máx}} a = Q b \rightarrow \boxed{P_{\text{máx}} = Q \frac{b}{a}}$$

$$\Sigma F_y = 0) N_1 = P_{\text{máx}} + Q = Q \left(\frac{a+b}{a} \right) > 0$$

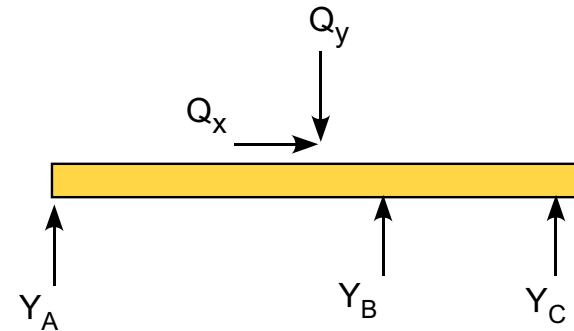
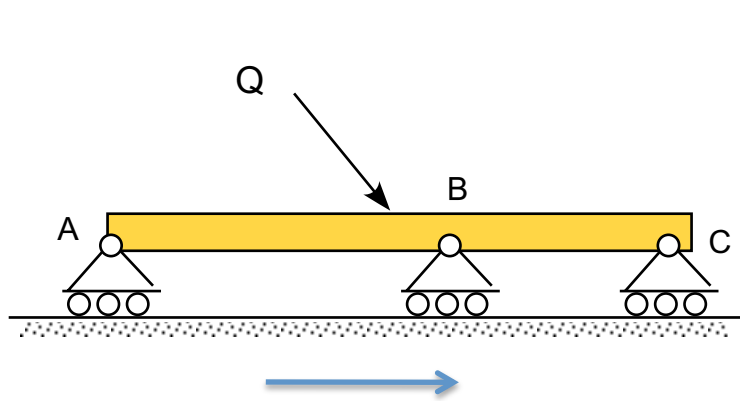
Y evitar accidentes con
pérdidas materiales y
humanas



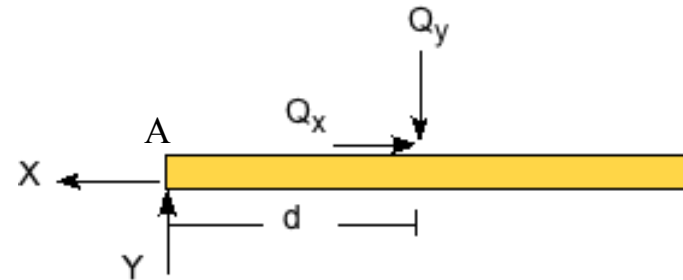
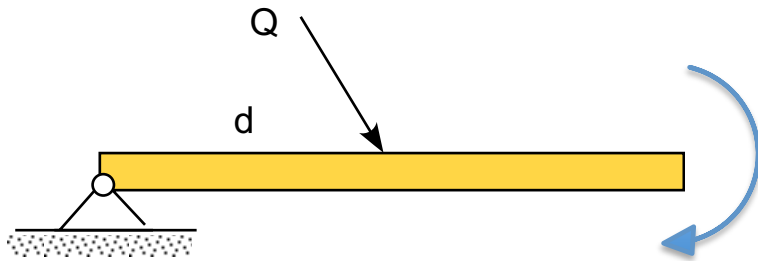
Clasificación de los sólidos en función de las ligaduras

Mecanismos

Apoyos insuficientes o mal colocados: se pueden mover.
No hay equilibrio. Falla alguna ecuación.

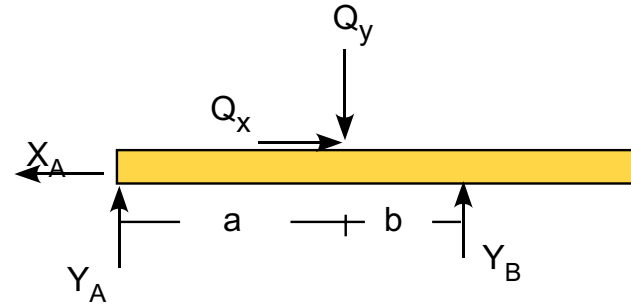
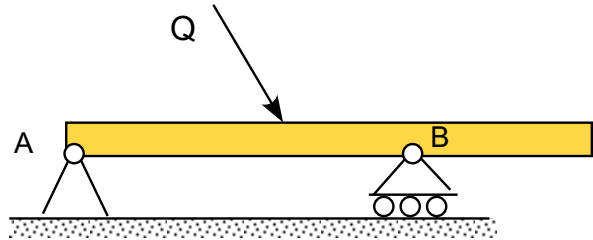


$$\sum F_x = Q_x \neq 0 \quad \text{traslación en x}$$



$$M_A = Q_y d \neq 0 \quad \text{giro}$$

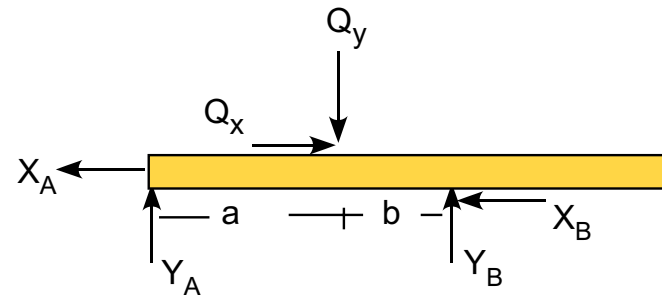
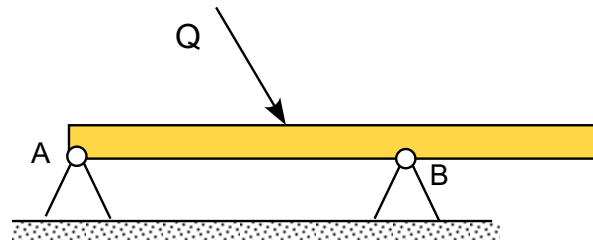
Sistemas isostáticos: Apoyos justos y bien colocados para que haya equilibrio



Las ecuaciones de la equilibrio permiten obtener todas las fuerzas desconocidas.

Son los sistemas de los que nos ocuparemos en esta asignatura

Sistemas hiperestáticos: equilibrados con apoyos de más. Sistemas válidos y utilizados para soportar cargas pero que no podremos resolver sólo con las ecuaciones de equilibrio (demasiadas incógnitas).



(Se resolverán en Resistencia)

$$\sum F_x = 0) Q_x = X_A + X_B$$

$$\sum F_y = 0) Q_y = Y_A + Y_B$$

$$M_A = 0) Y_B (a + b) = Q_y a$$

En este caso se pueden obtener Y_A e Y_B , nada más.