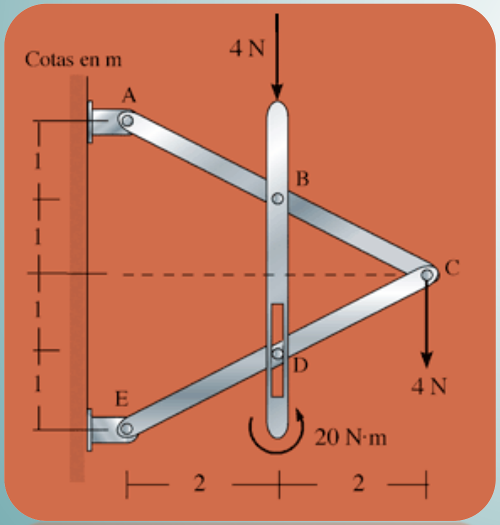
Mecánica

Tema 04. Cables.



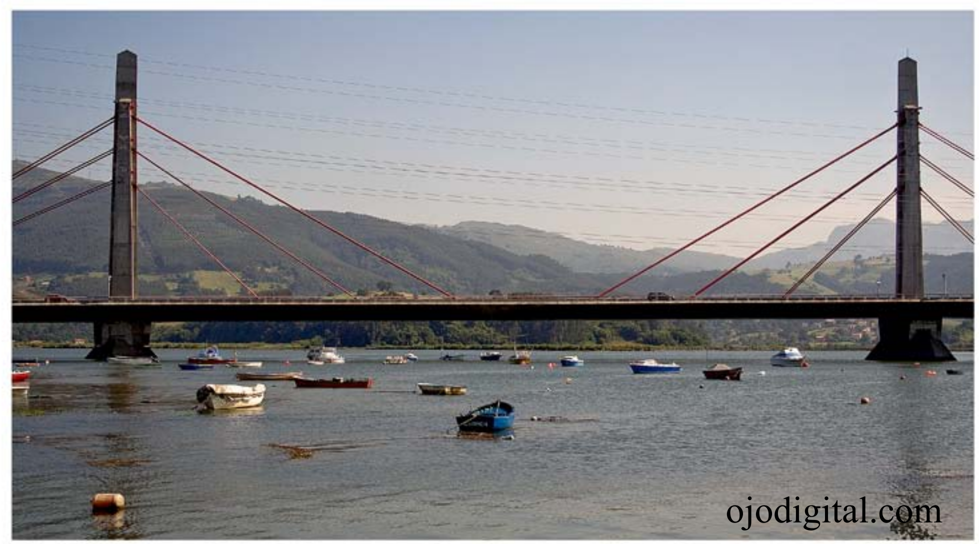
Cecilia Pardo Sanjurjo

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Cables

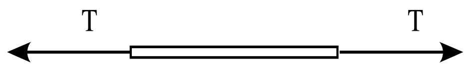
Los hilos o cables son elementos ampliamente utilizados en ingeniería, unas veces como elemento de sujeción (puente colgante, catenaria de un tren, teleférico…) y otras como elemento que hay que sustentar (líneas de alta tensión)

Vamos a considerar **hilos ideales**: sólidos deformables de sección despreciable y longitud constante (inextensibles) pero que no presentan resistencia alguna a flexión



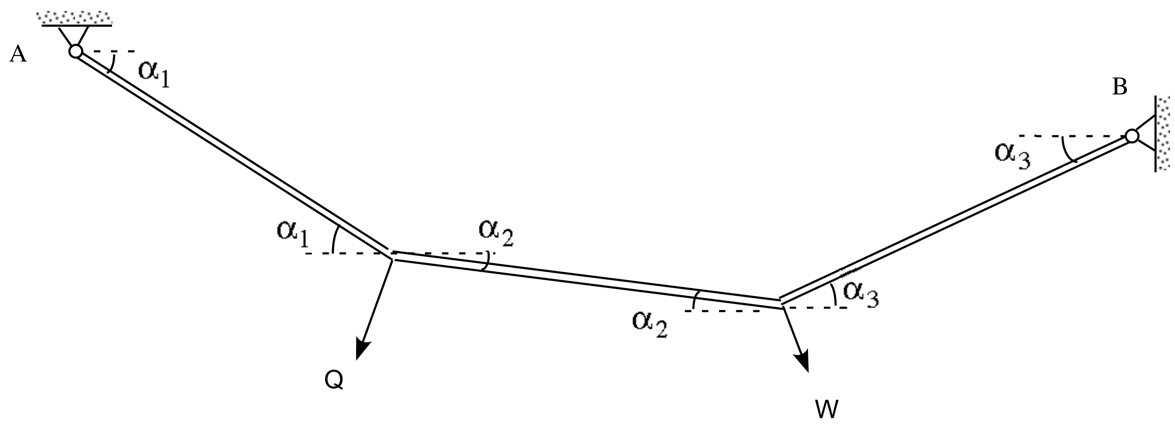
Catenaria de tren

Hilos sin carga: Los tramos sin carga (ni peso) son elementos a dos fuerzas, siempre a tracción (tensión). No admiten compresiones (se aflojan, no mantienen nada)

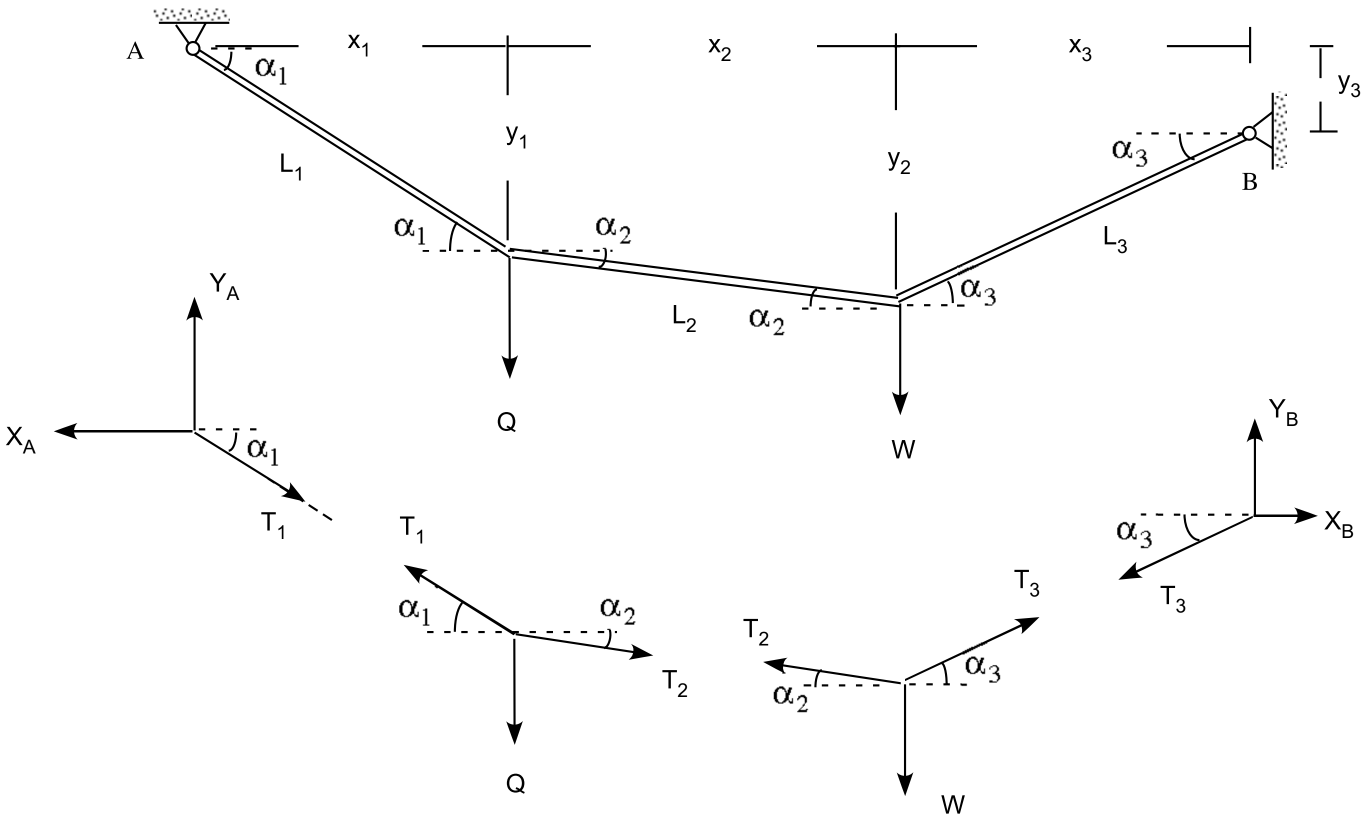


Hilos con cargas en algunos de sus puntos: Los puntos donde están aplicadas las cargas han de estar en equilibrio. Cada tramo de hilo por la tensión correspondiente y se plantea el equilibrio de esos puntos.

La curva de equilibrio es una línea quebrada.



Vamos a suponer un ejemplo algo más sencillo, con cargas sólo verticales.



Ecs. equilibrio nudos:

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0) \; T_{1x} = X_A \\ \sum F_y = 0) \; T_{1y} = Y_A \end{aligned}\right\} \text{nudo A}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0) \; T_{1x} = T_{2x} \\ \sum F_y = 0) \; T_{1y} = T_{2y} + Q \end{aligned}\right\} \text{nudo Q}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0) \; T_{2x} = T_{3x} \\ \sum F_y = 0) \; T_{2y} + T_{3y} = W \end{aligned}\right\} \text{nudo W}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0) \; T_{3x} = X_B \\ \sum F_y = 0) \; T_{3y} = Y_B \end{aligned}\right\} \text{nudo B}$$

Cuando las cargas son verticales, la componente horizontal de la tensión es la misma en cualquier punto del hilo

Componentes de las tensiones:

$$T_x = T_1 \cos\alpha_1 \quad T_{1y} = T_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \quad T_1 = \sqrt{T_x^2 + T_{1y}^2} \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{T_{1y}}{T_x}$$

Y análogamente para T_2 y T_3

Relaciones ángulos y distancias: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{y_1}{x_1}$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2}$; $\operatorname{tg}\alpha_3 = \dfrac{y_2 - y_3}{x_3}$

La longitud del hilo: $L = L_1 + L_2 + L_3$

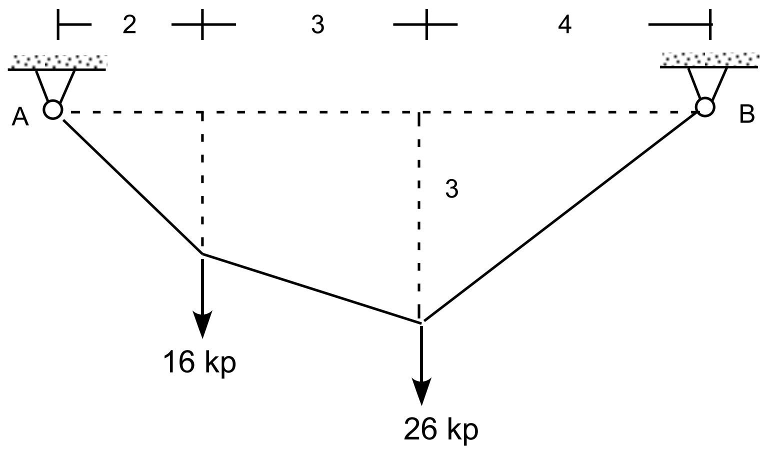
$$L_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \qquad L_2 = \sqrt{x_2^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad L_3 = \sqrt{x_3^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

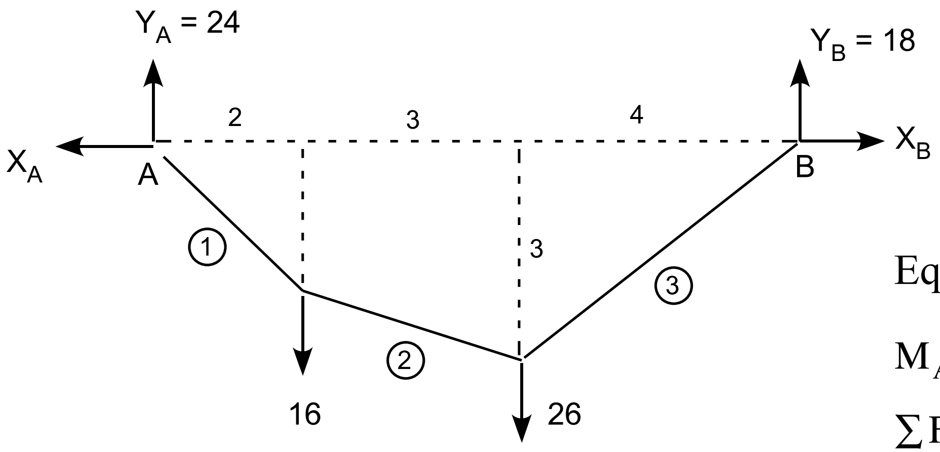
Relaciones distancias y tensiones:

$$\frac{T_{1y}}{T_{1x}} = \frac{y_1}{x_1} \ ; \quad \frac{T_{2y}}{T_{2x}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2} \ ; \quad \frac{T_{3y}}{T_{3x}} = \frac{y_2 - y_3}{x_3}$$

La tensión máxima es la del tramo con mayor inclinación (en uno de los apoyos)

Ejemplo: Hallar la tensión del hilo en cada tramo, así como su longitud





Equilibrio del sistema completo

$$M_A = 0)\, 9 \cdot Y_B = 16 \cdot 2 + 26 \cdot 5 \rightarrow Y_B = 18 \text{ kp}$$

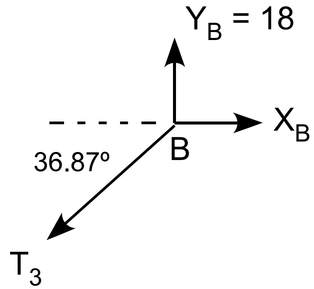
$$\sum F_y = 0)\, Y_A = 24 \text{ kp}$$

$$\sum F_x = 0)\, X_A = X_B$$

Equilibrio de nudos:

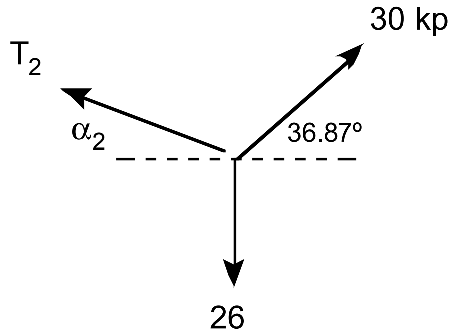
$$\Sigma F_y = 0)\ T_3 \operatorname{sen} 36.87 = 18 \rightarrow T_3 = 30 \text{ kp}$$

$$\Sigma F_x = 0)\ T_3 \cos 36.87 = X_B \rightarrow X_B = 24 \text{ kp}$$

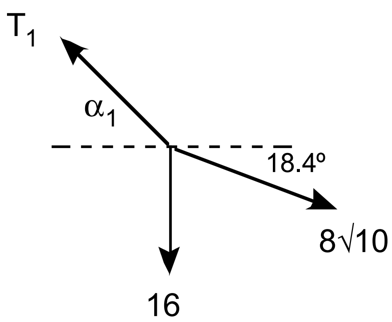


$$\Sigma F_y = 0)\ T_2 \operatorname{sen}\alpha_2 + 18 = 26$$

$$\Sigma F_x = 0)\ T_2 \cos\alpha_2 = 24$$



$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{26-18}{24} = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha_2 = 18.4º \qquad T_2 = 8\sqrt{10} \text{ kp}$$

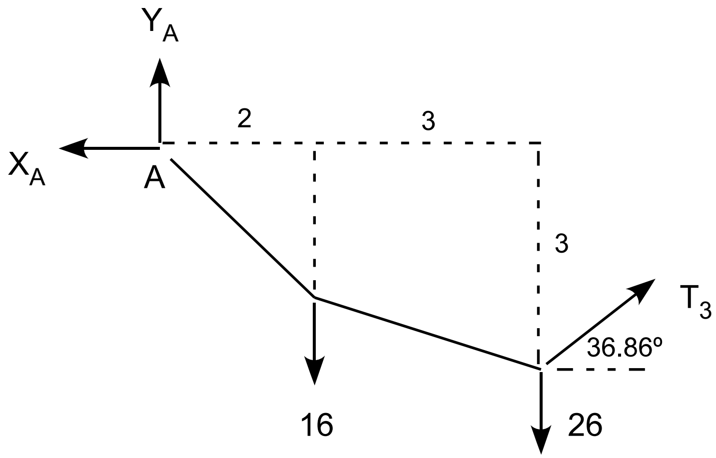


$$\Sigma F_y = 0)\ 16 + 8 = T_1 \operatorname{sen}\alpha_1$$

$$\Sigma F_x = 0)\ 24 = T_1 \cos\alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 1 \rightarrow \alpha_1 = 45º \qquad T_1 = 24\sqrt{2} \text{ kp}$$

Una alternativa es plantear el equilibrio de un trozo mayor de la estructura, cortando el hilo por donde interese (3 incógnitas) y aplicando las ecs del sólido rígido:



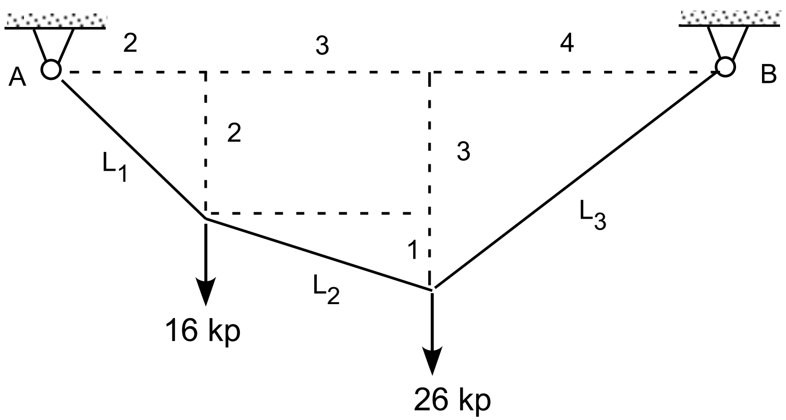
$$M_A = 0\big)\, 0.8T_3 \cdot 3 + 0.6T_3 \cdot 5 = 16 \cdot 2 + 26 \cdot 5$$

$$T_3 = 30 \text{ kp}$$

$$\Sigma F_x = 0\big)\, X_A = 24$$

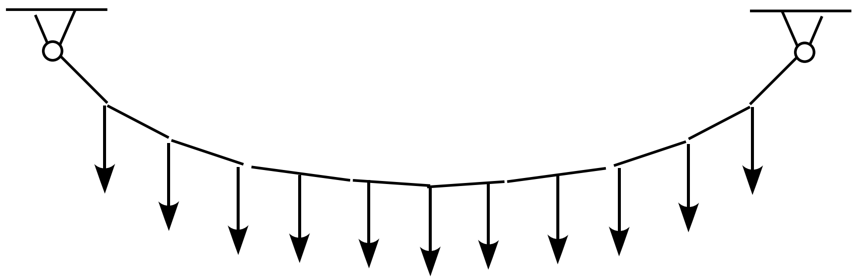
$$\Sigma F_y = 0\big)\, Y_A + 30 \cdot 0.6 = 16 + 26 \rightarrow Y_A = 24$$

Resueltas las tensiones y ángulos se completa la geometría y se puede calcular la longitud del hilo:



$$L_1 = 2\sqrt{2} \text{ m} \;;\; L_2 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \text{ m} \;;\; L_3 = 5 \text{ m}$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \simeq 11 \text{ m}$$



Si el número de cargas aumenta, los tramos rectos cada vez son más cortos hasta que dejan de apreciarse y el hilo adquiere una curvatura continua cuando la carga lo es.

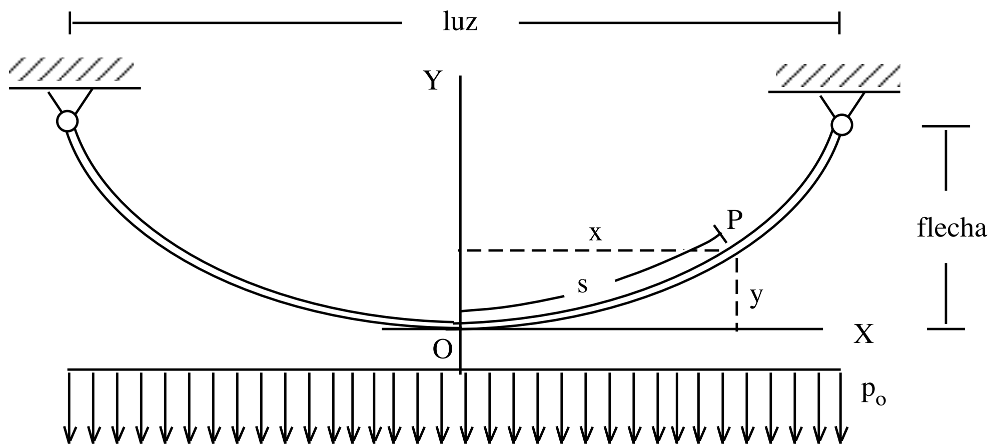
En cualquier caso, **la tensión en un punto del hilo es tangente a la curva** del hilo en dicho punto

Sólo vamos a estudiar los casos más importantes en ingeniería:

- Cable que mantiene **carga constante por unidad de longitud horizontal**

- Cable pesado (**carga constante por unidad de longitud de cable**)

Cable parabólico: carga constante por unidad de longitud horizontal



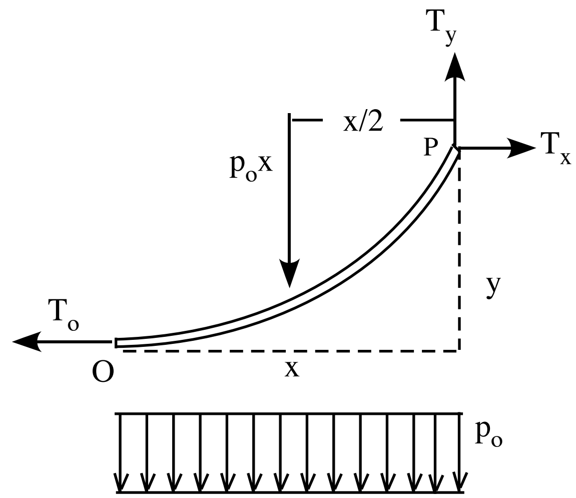
Supongamos que tenemos un hilo colgado de dos puntos situados a la misma altura y que está sometido a una ley rectangular de carga en la dirección horizontal p_o N/m. Se trata de un sistema simétrico con un mínimo central.

Luz: distancia entre los puntos de apoyo del cable
Flecha: distancia vertical desde un apoyo al punto más bajo del cable

Aislamos un trozo comprendido entre el mínimo y un punto P de coordenadas (x, y).

La ley de carga rectangular se sustituye por su resultante en el centro de gravedad: $p_o x$ en x/2

Esa fracción de hilo está en equilibrio:



$$\sum F_x = 0) \quad \boxed{T_x = T_o}$$

$$\sum F_y = 0) \quad \boxed{T_y = p_o x}$$

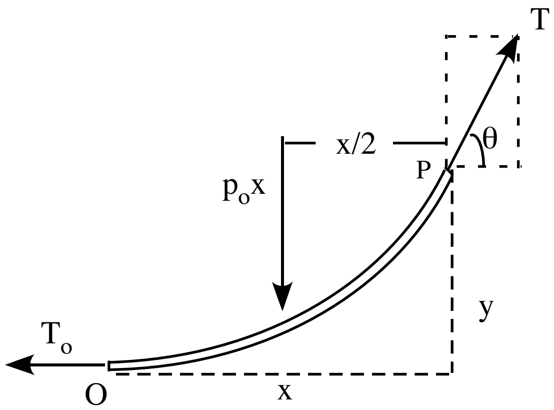
$$M_P = 0) \; p_o x \frac{x}{2} = T_o \; y \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}\frac{p_o}{T_o} x^2}$$

Hemos obtenido así **las componentes de la tensión en cualquier punto y la curva de equilibrio del hilo: una parábola respecto a ejes XY con origen en el mínimo de la misma**

La componente horizontal de la tensión es la misma en todos los puntos

La tensión en el punto P: $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \sqrt{T_o^2 + p_o^2 x^2}$

Nótese que el punto del cable en dónde la <u>tensión es máxima</u> corresponde al más alejado del mínimo o de <u>máxima altura</u>



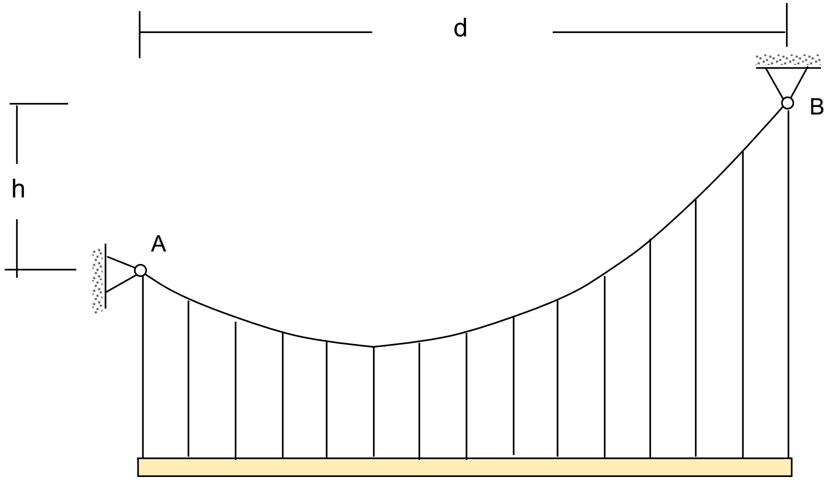
$$T_x = T\cos\theta = T_o$$
$$T_y = T\mathrm{sen}\theta$$
$$\mathrm{tg}\theta = \frac{T_y}{T_o}$$

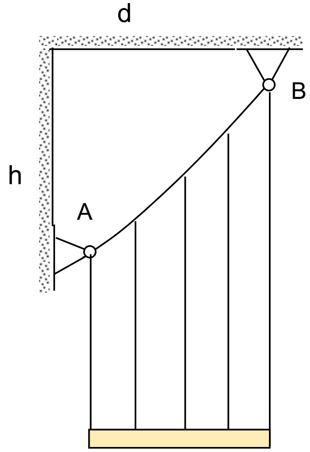
Si queremos saber que longitud de hilo hay de O a P:

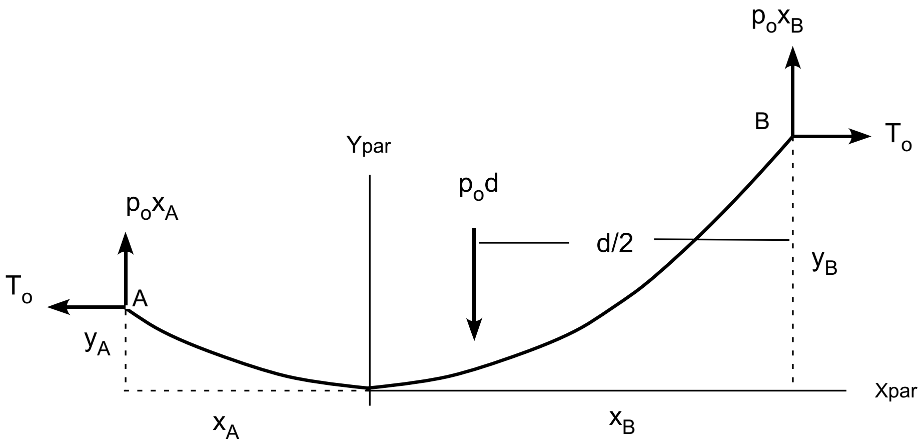
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1+\frac{p_o^2 x^2}{T_o^2}}$$

$$L_{OP} \equiv s = \int_O^P ds = \int_0^x dx\sqrt{1+\frac{p_o^2x^2}{T_o^2}} = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+\frac{p_o^2x^2}{T_o^2}} + \frac{T_o}{p_o}\ln\left(\frac{p_o x}{T_o} + \sqrt{1+\frac{p_o^2x^2}{T_o^2}}\right)\right]$$

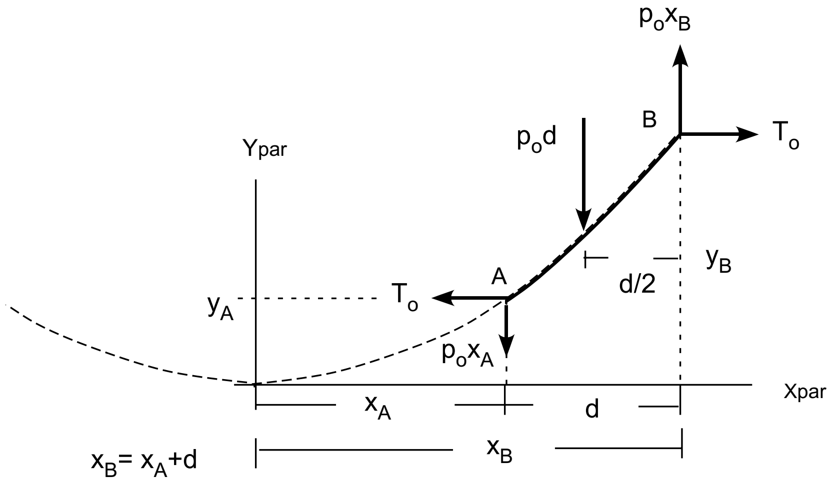
A veces los apoyos no están a la misma altura: la ecuación de la curva es la misma refiriendo las coordenadas al sistema de ejes en el mínimo







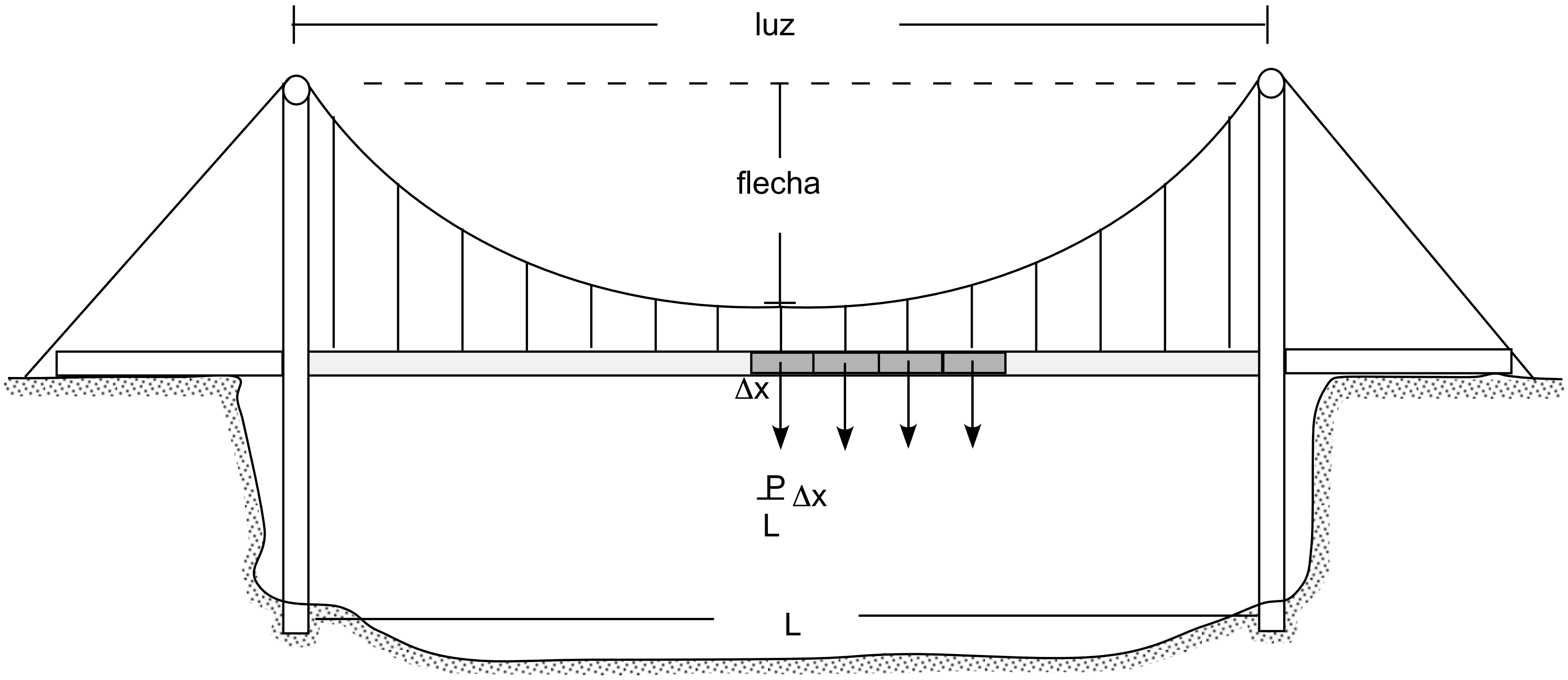
$d = x_A + x_B$ $h = y_B - y_A$



$x_B = x_A + d$

$h = y_B - y_A$

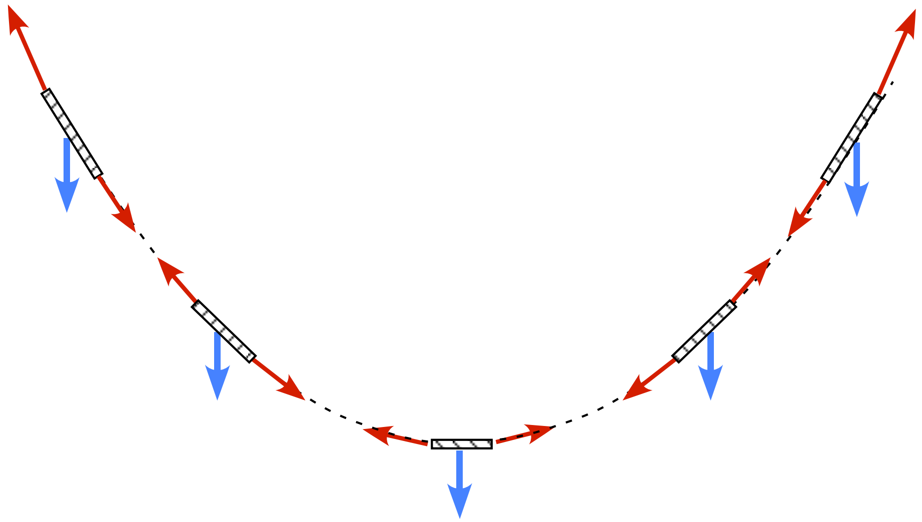
Puente colgante: el tablero de peso P y longitud L, cuelga mediante muchos hilos equiespaciados en la dirección horizontal, de forma que cada uno transfiere la misma carga a cada punto del cable colgado entre los pilares del puente y que, por tanto, tiene forma parabólica.



$$p_o = \frac{P}{L}$$ carga por unidad de abscisa que llega a cada punto del cable colgado

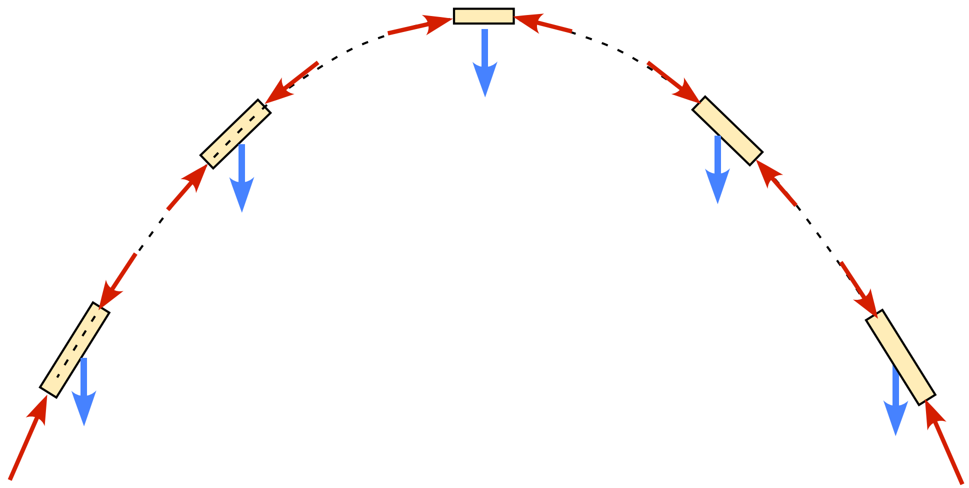

Kim Rötzel

Dos formas de mantener una carga uniforme



Mediante elementos a **tensión** pura (cables)

Curva de equilibrio parabólica

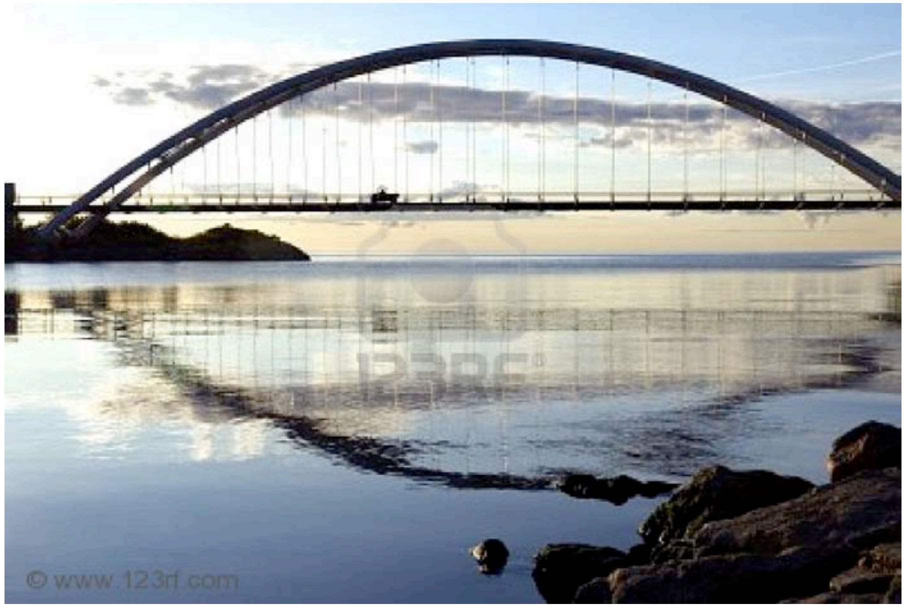


Mediante elementos a **compresión**

Misma curva de equilibrio, invertida:

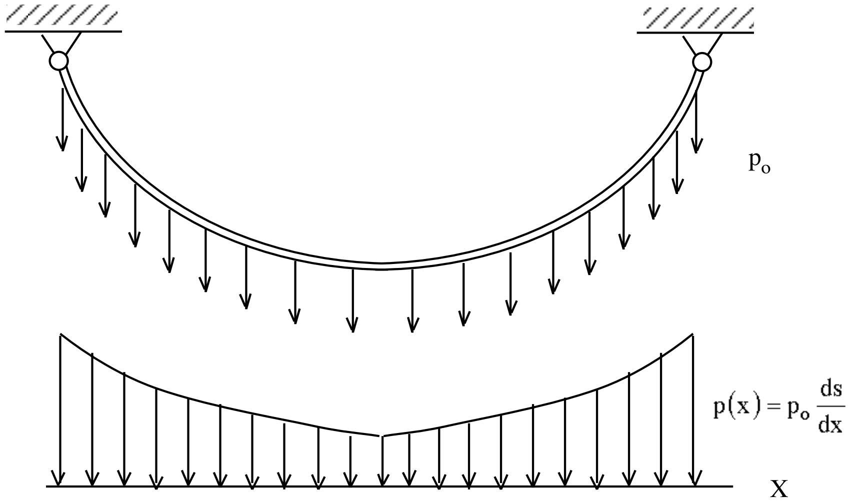
Arco parabólico

Arcos parabólicos

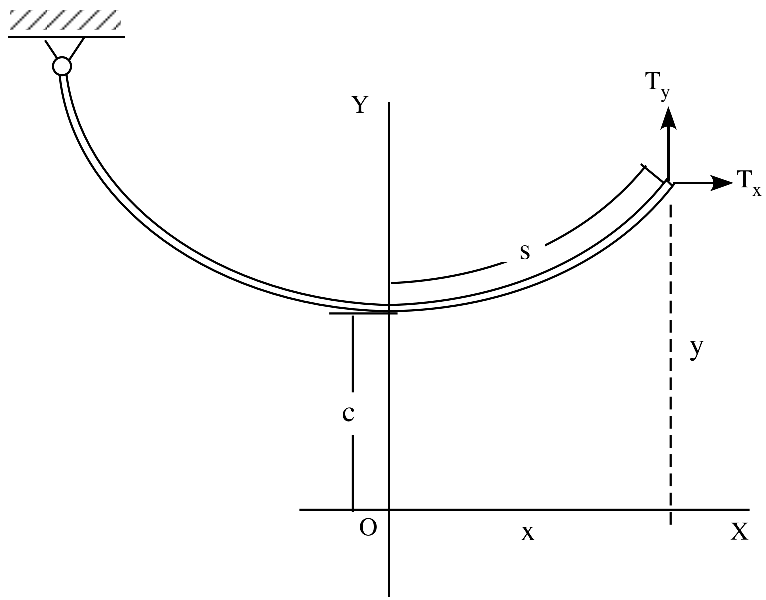


Carga constante por unidad de longitud de cable (catenaria)

Otro caso de hilo sometido a carga continua que tiene interés es el **cable** sometido a **una carga constante por unidad de longitud (de cable)** que puede ser propio peso del cable



Ejemplos:



La ecuación de equilibrio del hilo se puede integrar, obteniéndose:

1) **Ec. de equilibrio del hilo**

$$y = c\ \mathrm{Ch}\left(\frac{x}{c}\right) \qquad \textbf{catenaria}$$

c = parámetro de la catenaria

2) **Tensión** en un punto:

$$\left.\begin{aligned} T_x &= T_o = p_o c = cte \\ T_y &= T_o\ \mathrm{Sh}\left(\frac{x}{c}\right) \end{aligned}\right\} T = T_o\ \mathrm{Ch}\left(\frac{x}{c}\right)$$

3) **Longitud desde el mínimo a un punto**:

$$s = c\ \mathrm{Sh}\left(\frac{x}{c}\right)$$

Coseno hiperbólico:

$$\mathrm{Ch}\ x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{Ch}\ 0 = 1$$

Seno hiperbólico:

$$\mathrm{Sh}\ x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{Sh}\ 0 = 0$$

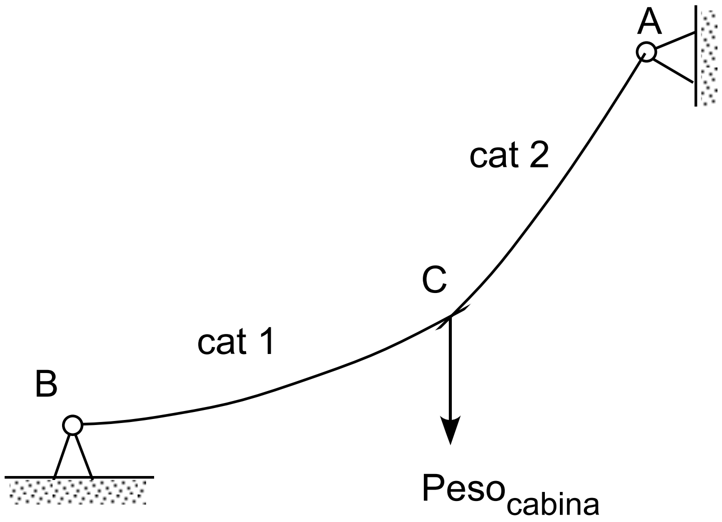
Cuando los ángulos de inclinación de los tramos de hilo respecto a la dirección horizontal son pequeños, los ds y dx son muy parecidos: en ese caso la luz entre los apoyos es muy grande comparada con la flecha y la parábola y la catenaria son también muy parecidas, pudiéndose aproximar una por la otra .

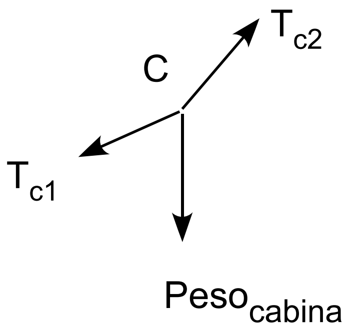
Cuando se da esa situación se suele utilizar la expresión de la longitud de la catenaria para calcular la longitud de la parábola:

$$L_{OP} \equiv s_{par} \cong s_{cat} = c\ \mathrm{Sh}\left(\frac{x}{c}\right) \qquad \text{con c tal que } c = \frac{T_o}{p_o}$$

$$\text{cuando } \frac{\text{flecha}}{\text{luz}} \ll 1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x}{c} \ll 1$$

Teleférico: catenaria + cargas discretas (cabina)





Equilibrio de nudo + tramo BC (catenaria 1)+ tramo AC (catenaria 2)

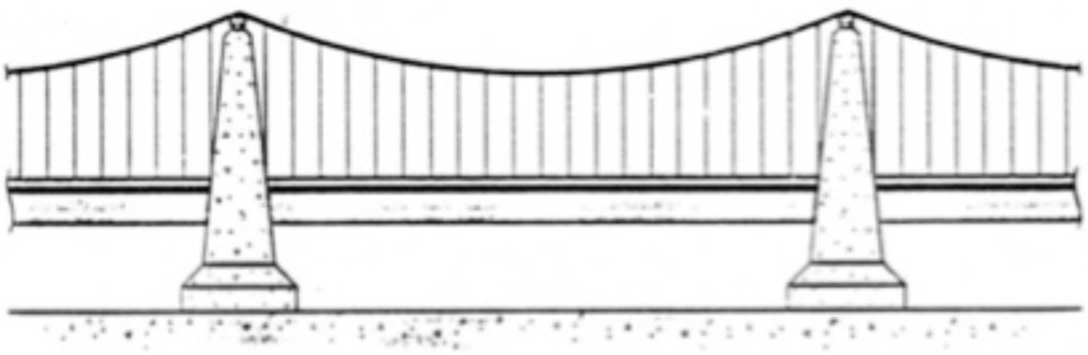
Catenarias a tensión y a compresión

Hectorscerbo.com.ar (Puente Kinta- Kyo)

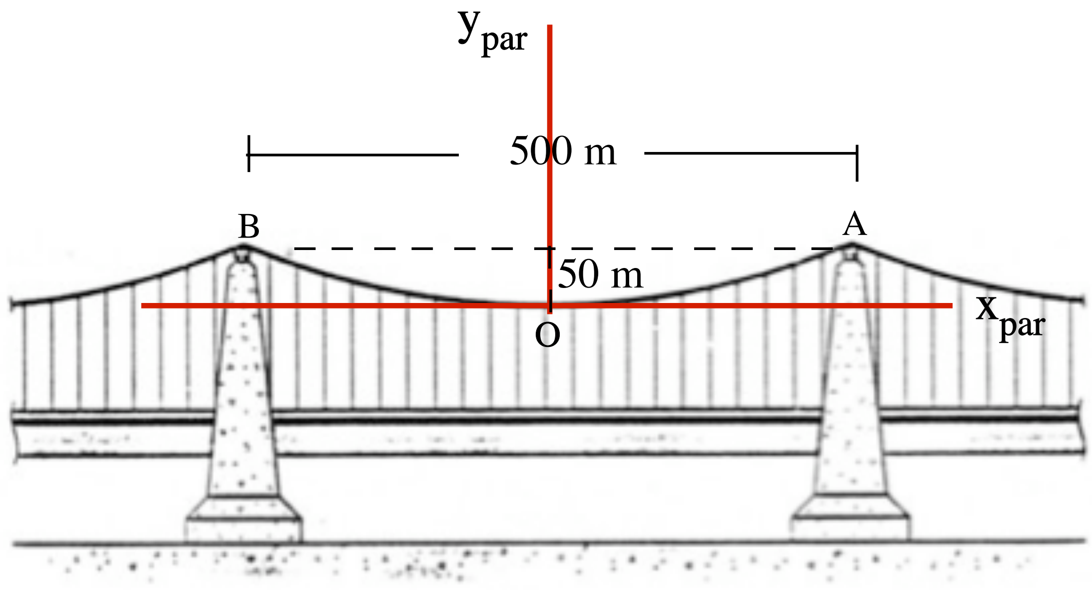
31) La luz del arco central del puente colgante representado en la figura es de 500 m. La flecha en su centro es de 50 m. Los cables pueden resistir una tensión máxima de 5000 kN. Determinar:

a) La carga por metro horizontal de calzada que puede resistir.

b) La longitud del cable en la cuerda central

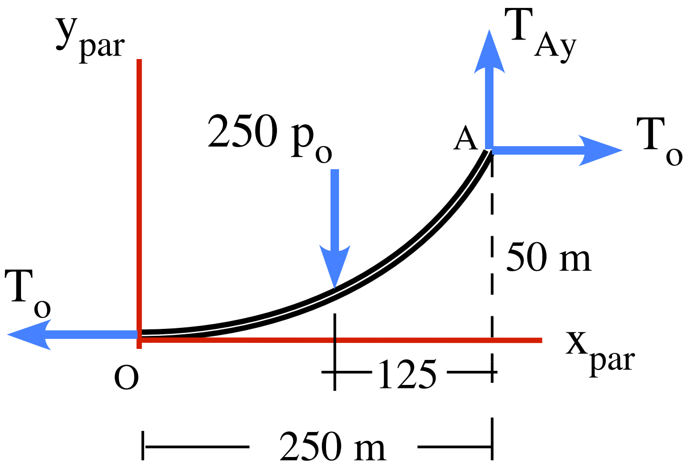


31) La luz del arco central del puente colgante representado en la figura es de 500 m. La flecha en su centro es de 50 m. Los cables pueden resistir una tensión máxima de 5000 kN. Determinar:
a) La carga por metro horizontal de calzada que puede resistir.
b) La longitud del cable en la cuerda central



Apoyos misma altura: simétrica, mínimo central

$T_{máx}$ en el punto más alto → **$T_{máx}=T_A=T_B=5000$ kN**



Equilibrio de media cuerda:

$$M_A = 0) \ 50\ T_o = (250 p_o)125 \qquad \underline{T_o = 625\ p_o}$$

$$\Sigma F_y = 0) \underline{T_{Ay} = 250\ p_o}$$

$$T_{máx} = T_A = \sqrt{T_o^2 + T_{Ay}^2} = 5000$$

Sustituyendo T_o y T_{ay} y elevando al cuadrado:

$$5000^2 = 250^2\ p_o^2 + 625^2 p_o^2 \qquad \underline{p_o \cong 7.43 \text{ kN/m}}$$

- Se podrían haber empleado las fórmulas de la parábola:

$$y_A = \frac{p_o x_A^2}{2T_o} \quad \rightarrow \quad 50 = \frac{p_o 250^2}{2T_o} \qquad T_o = 625\ p_o$$

$$T_{Ay} = \ p_o x_A = 250\ p_o$$

Longitud del hilo entre A y B:

$$L = 2\,s_A = 2\cdot\frac{1}{2}\left[x_A\sqrt{1+\left(\frac{x_A}{c}\right)^2}+\frac{1}{c}\ln\left(\frac{x_A}{c}+\sqrt{1+\left(\frac{x_A}{c}\right)^2}\right)\right] = \underline{513.01\ \mathrm{m}} \qquad \text{(exacta)}$$

En donde se ha sustituido $\quad c = \dfrac{T_o}{p_o} = 625\ \mathrm{m} \qquad x_A = 250\ \mathrm{m}$

Aproximada mediante una catenaria:

$$\frac{\text{flecha}}{\text{luz}} = \frac{50}{500} = 0.1 \ll 1$$

$$L_{aprox} = 2\,s_A = 2{\cdot}c\ \mathrm{Sh}\,\frac{x_A}{c} = 2\cdot 625\ \mathrm{Sh}\,\frac{250}{625} = \underline{513.44\ \mathrm{m}}$$

Quedan muchos puentes por hacer