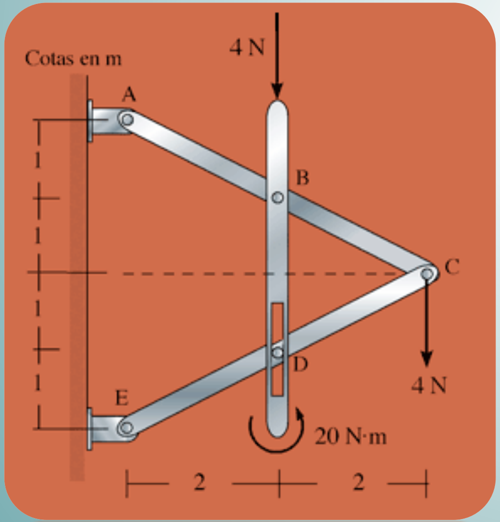
# Mecánica

## Tema 05. Rozamiento. Apoyos entre sólidos. Límites del equilibrio.





**Cecilia Pardo Sanjurjo**

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

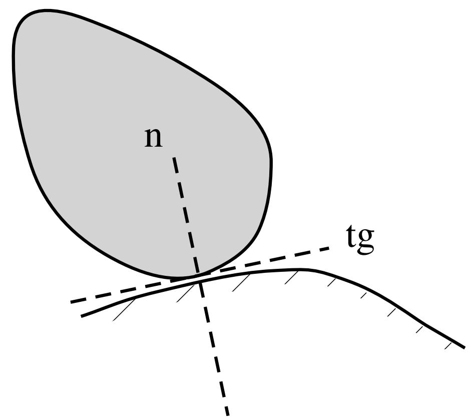
# ROZAMIENTO

- Características del rozamiento de Coulomb
- Contactos entre sólidos puntuales y extensos
- Límites del equilibrio
- Rozamiento a la rodadura

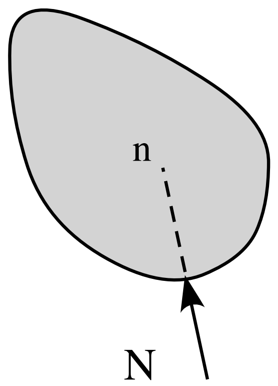
# Contactos entre sólidos

**Apoyos puntuales**

Sean tg y n las direcciones tangente y normal en el punto de contacto




• **Contacto sin rozamiento** (a veces se le llama liso)



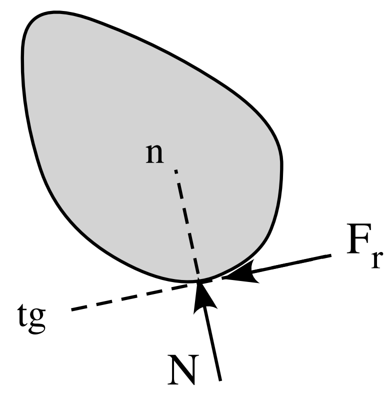

El apoyo impide que un cuerpo penetre en el otro.
No impide que resbalen o deslicen uno sobre otro.
Tampoco impide que se separen

Reacción: fuerza en la dirección normal, cuyo sentido es entrando en el cuerpo en el punto de contacto

$$N \quad \text{con } N \geq 0$$

• **Contacto con rozamiento**

El contacto impide la penetración de un sólido en el otro (dirección normal) y el deslizamiento relativo de un sólido sobre el otro (dirección tangente)




A esa **fuerza en dirección tangente se le llama fuerza de rozamiento**.

# Rozamiento

**La fuerza de rozamiento se opone a que dos cuerpos deslicen uno sobre otro (deslizamiento relativo).**

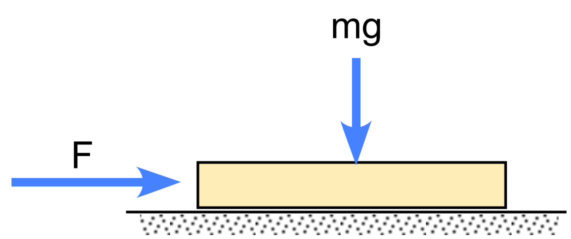
El rozamiento a veces es deseable: es necesario para andar o equilibrar objetos

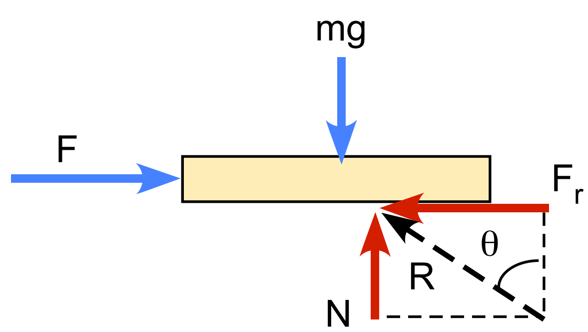
Otras veces es indeseable y se intenta minimizar, ya que consume energía y desgasta las superficies

Dos tipos de rozamiento: → **Rozamiento seco o de Coulomb**

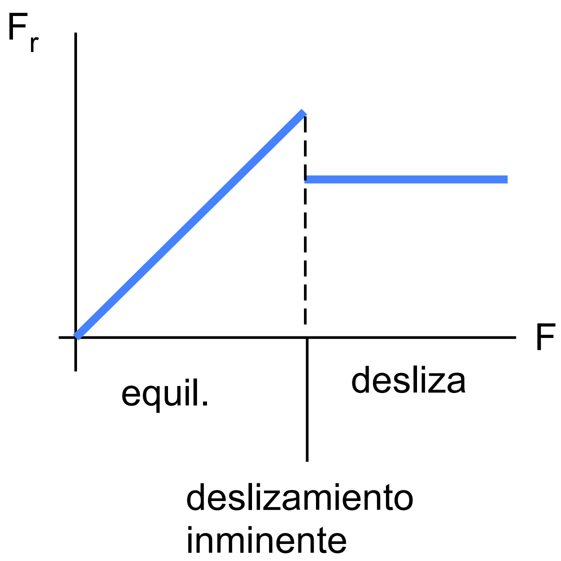
**Rozamiento fluido**: hay una película de fluido entre las superficies de contacto y la fuerza de rozamiento depende de la velocidad relativa de las capas de fluido. Se estudia en mecánica de fluidos

## Características del rozamiento de Coulomb




Equilibrio: $N = mg$ $F_r = F$




Cuando se aumenta F, la fuerza de rozamiento aumenta hasta que alcanza un valor límite, a partir de ese momento no es capaz de equilibrar a F y desliza. Cuando alcanza ese valor límite se dice que el **deslizamiento es inminente.** A partir de ese momento la fuerza de rozamiento disminuye (20-25%) y su valor es constante

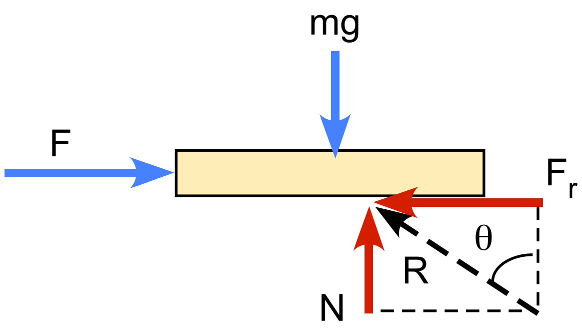
Repitiendo el experimento, variando la masa, se encuentra que el **valor límite** del módulo de la fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza normal en el contacto:

$$F_{r\,máx} = \mu_e N \qquad \mu_e: \text{ coeficiente de rozamiento estático}$$

**El coeficiente de rozamiento estático depende de los materiales de los sólidos en contacto.**
**Es independiente de la fuerza normal y del área de contacto**

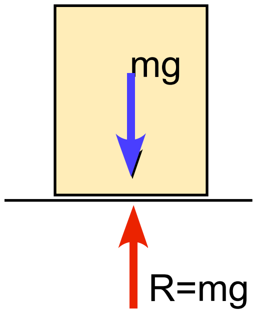
**Cuando el cuerpo desliza, la fuerza de rozamiento es constante y ligeramente menor:**

$$F_r = \mu_d N \qquad \mu_d: \text{ coeficiente de rozamiento dinámico } (\mu_d < \mu_e)$$



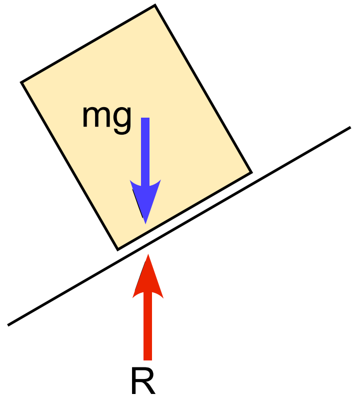

La reacción total , R, en un contacto con rozamiento es la suma vectorial de N y $F_r$. Esta última produce una inclinación de la reacción respecto a la normal

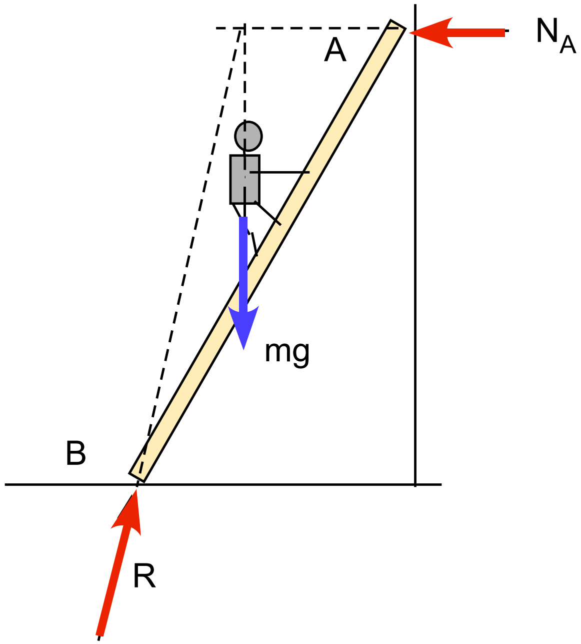
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_r}{N} \qquad \theta_{máx}: \ \operatorname{tg}\theta_{máx} = \frac{F_r}{N} = \mu_e$$



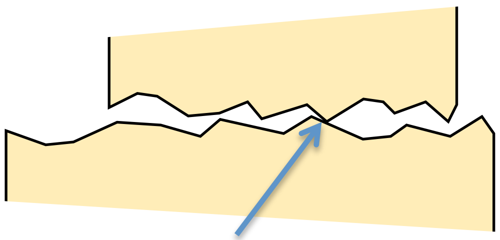
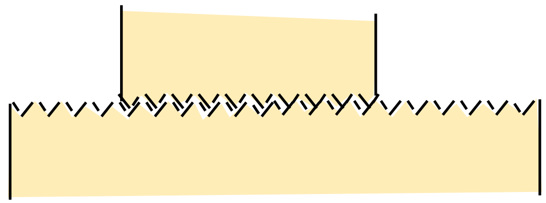

Para mantener el equilibrio del bloque la reacción es normal

En un plano inclinado ese mismo bloque, si está en equilibrio, la reacción no puede ser sólo normal, tiene que haber componente tangencial: la fuerza de rozamiento




En A podría haber sólo reacción normal, pero en B hace falta componente tangencial

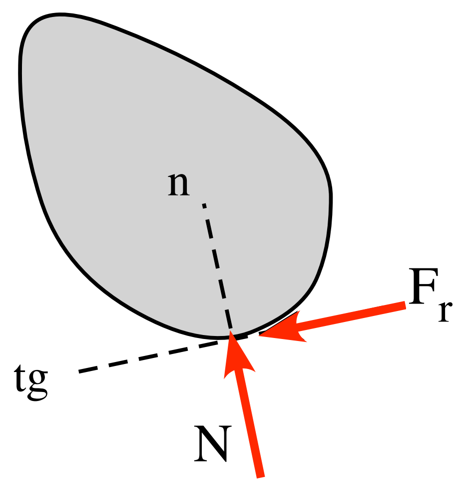
El contacto entre dos superficies rugosas, debido a las irregularidades tiene lugar en algunos puntos: la componente tangencial de la fuerza en el contacto es la $F_r$

Aunque al contacto en que no hay fuerza de rozamiento se le llama a veces liso y cuando hay fuerza de rozamiento se le llama contacto rugoso, los mayores coeficientes de rozamiento se dan entre superficies lisas, debido a que las superficies contactan en muchos puntos (se acoplan mejor)

La mayoría de los coeficientes de rozamiento están entre 0.2 y 1, pero no hay nada que impida que sean más grandes, por ejemplo cobre-cobre bien pulido alcanza el 5

• **Contacto puntual con rozamiento**

El contacto impide la penetración de un sólido en el otro (dirección normal) y el deslizamiento relativo de un sólido sobre el otro (dirección tangente)




Reacciones : normal **N** , y fuerza de rozamiento $\mathbf{F_r}$

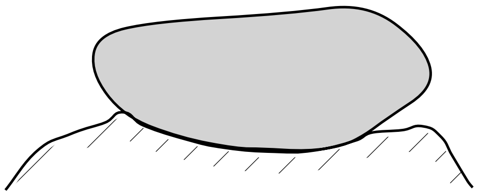
Límites: $N \geq 0$ $F_r \leq \mu_e N$

Si N=0 los sólidos están a punto de perder el contacto

Si $F_r = \mu_e N$ un sólido está a punto de deslizar sobre el otro

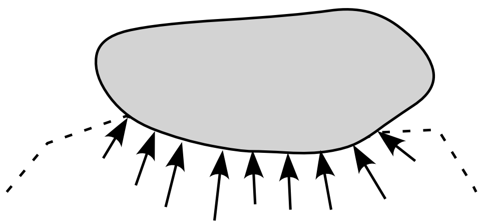
(deslizamiento inminente)

# Apoyos extensos

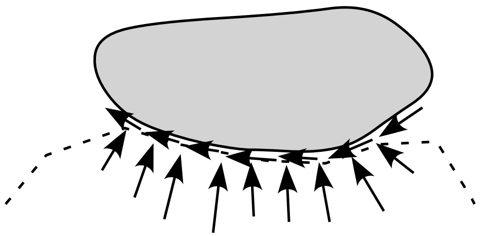


El apoyo tiene lugar en una superficie extensa

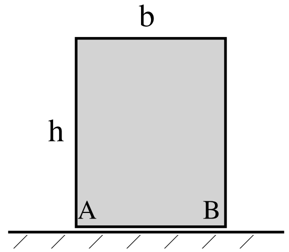
Sin rozamiento: fuerza normal en cada punto del contacto



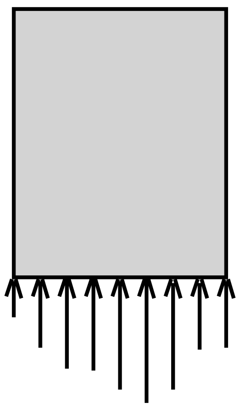
Con rozamiento: Normal y fuerza de rozamiento en cada punto



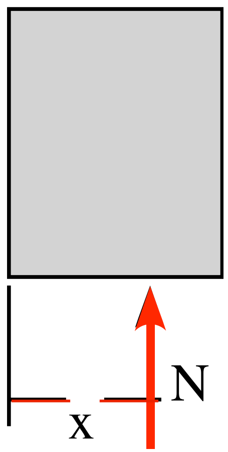
# Contacto extenso plano




• **Sin rozamiento**:
Las normales son todas paralelas y se pueden sustituir por su resultante N en algún punto de la superficie de contacto que hay que determinar (incógnita x)



=



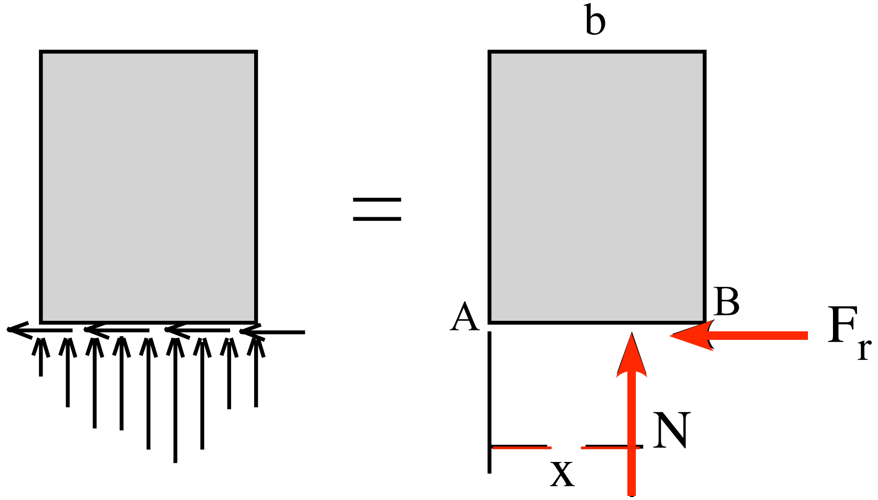

N no puede salir de la zona de contacto

**Limitaciones:**

$N \geq 0 \qquad 0 \leq x \leq b$

• **Con rozamiento:**

Lo mismo ocurre con las fuerzas de rozamiento en cada punto, son colineales y se pueden sustituir por la $F_r$ resultante




**Incógnitas de las reacciones**:

N , $F_r$ y x (la posición de N)

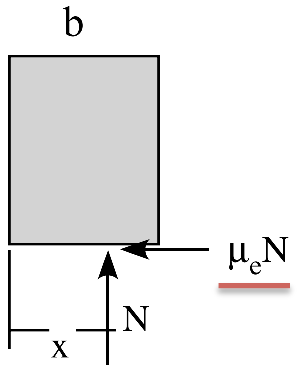
**Limitaciones:**

$N \geq 0$ $\quad F_r \leq \mu_e N$ $\quad 0 \leq x \leq b$

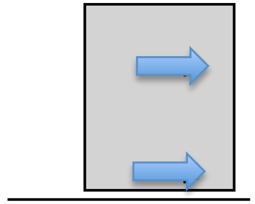
N no se puede salir de la zona del contacto:

- Si x= 0 está a punto de **volcar en A**
- Si x=b está a punto de **volcar en B**

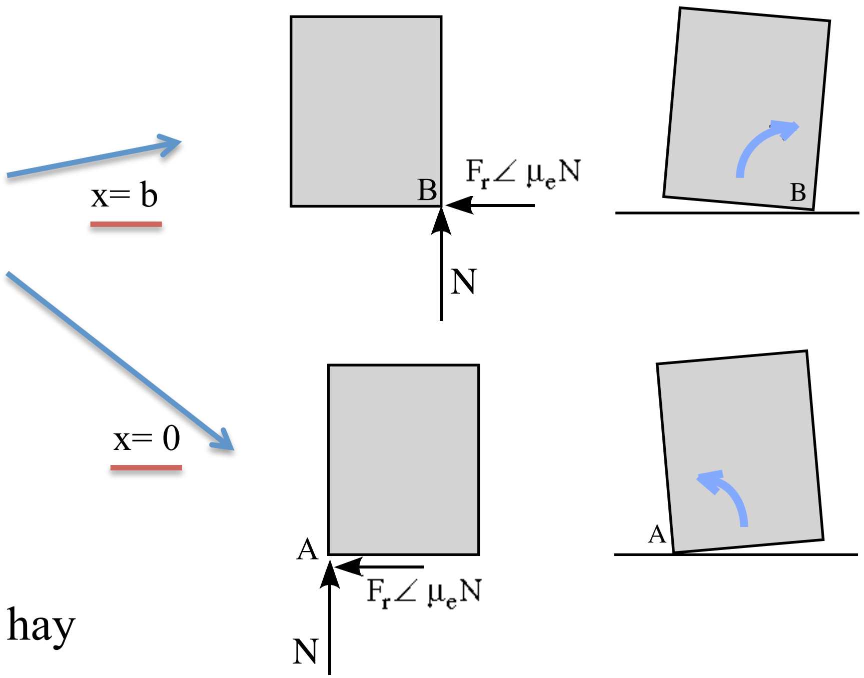
# Límites del equilibrio




$F_r$ alcanza el valor máximo:
Deslizamiento inminente



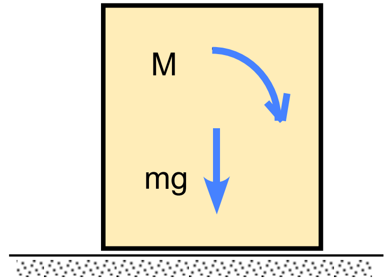
Vuelcos, sin deslizamiento:
x alcanza su límites x=0 o x=b
La $F_r$ es menor que su valor límite

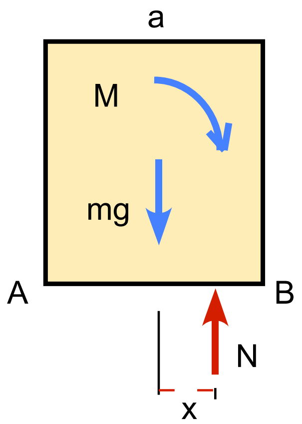



Si se alcanzan simultáneamente hay vuelco con deslizamiento

Ejemplo 1

**Límite de situación de la normal**: Consideramos un bloque sobre el que actúa un par de fuerzas M y el peso. Vamos a ver como se rompe el equilibrio al aumentar M



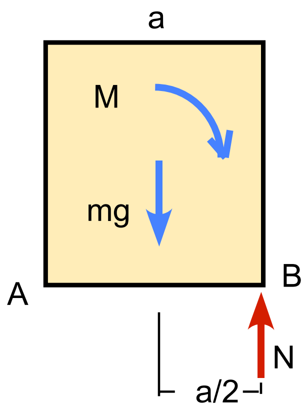




$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_r = 0$$

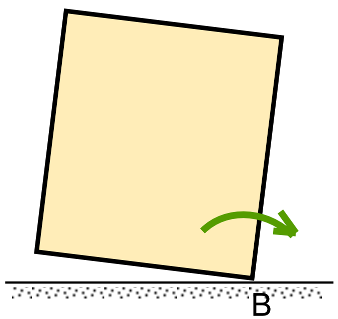
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$M_G = 0 \Rightarrow M = N \cdot x = mgx$$

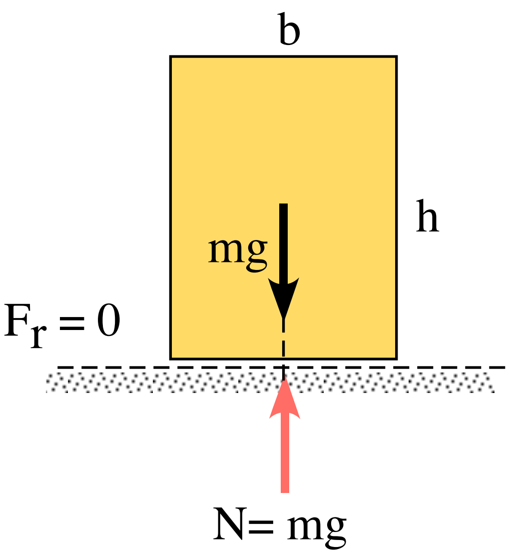
Si aumento M, aumenta la x, es decir, N se desplaza lo necesario para cancelar el momento hasta que no puede más porque se sale de la pieza.




El **vuelco es inminente** en B

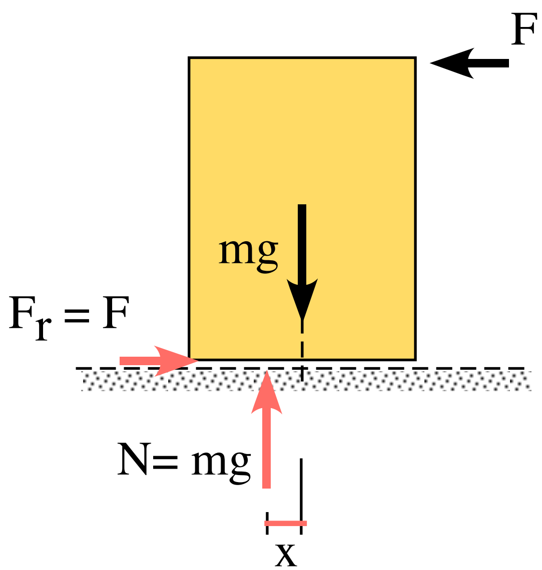


Ejemplo 2: Bloque apoyado en el suelo con rozamiento al que se le aplica una **fuerza F que va en aumento**



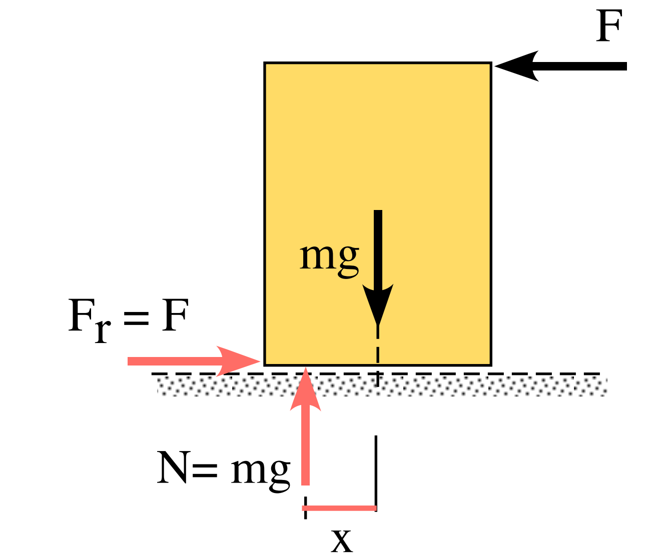

Reacciones del suelo si no hay otra carga que mg.

Está en equilibrio




Se aplica F pequeña:
N se desplaza y $F_r$ aumenta

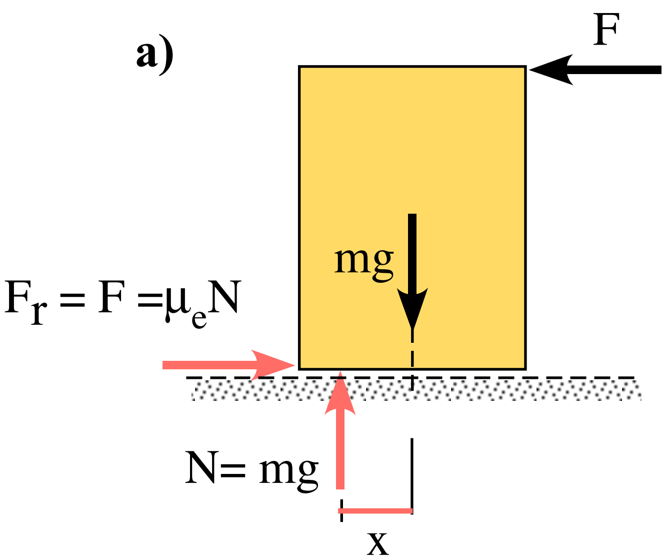
Sigue en equilibrio

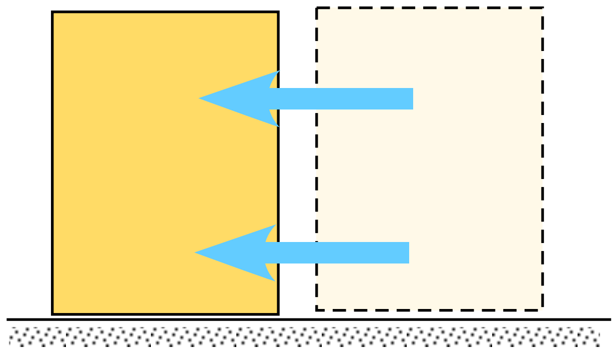



Aumenta F:
N se desplaza más
$F_r$ iguala a F

Sigue habiendo equilibrio hasta que…

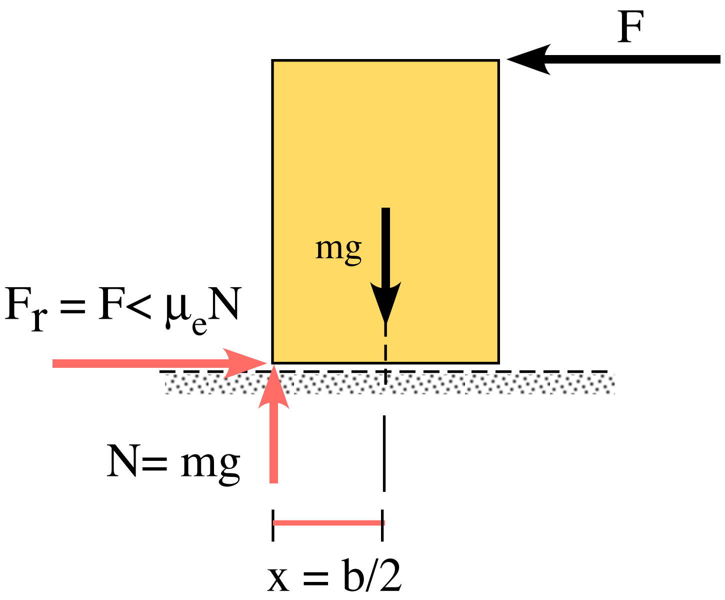
**a)**

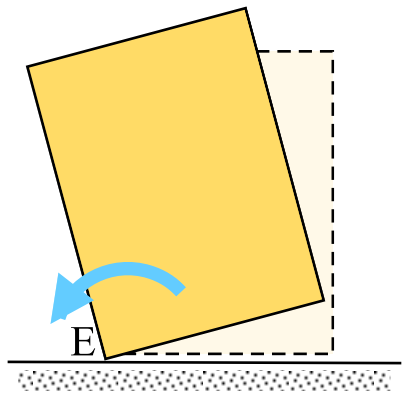


$F_r$ no puede aumentar más → Deslizamiento inminente

b) O puede ocurrir que, antes, la normal alcance el extremo de la superficie de apoyo

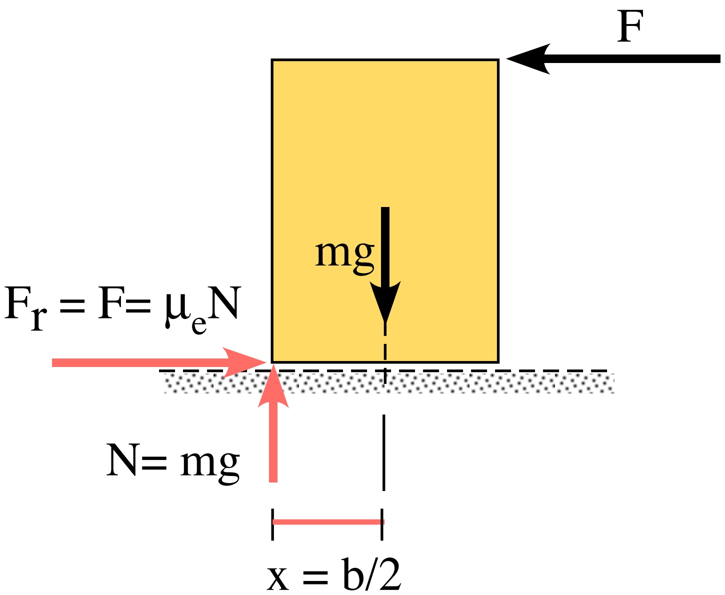


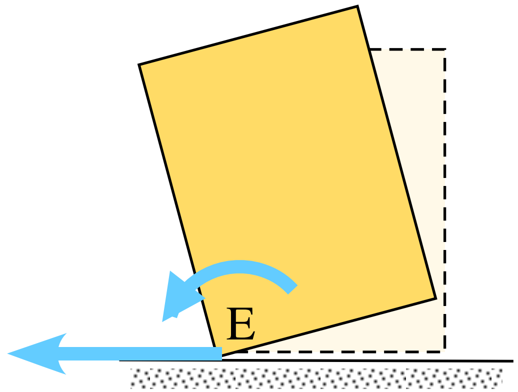




N alcanza la posición extrema x=b/2
Fuerza de rozamiento se mantiene menor que su valor máximo

Vuelco en torno a dicho punto
Sin deslizamiento ($v_E = 0$)

**c)** O bien que se alcancen los dos límites simultáneamente:



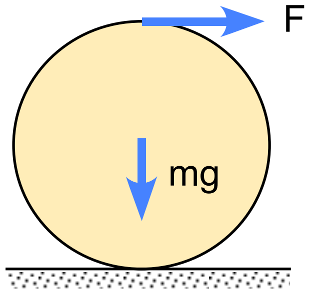




Ocurren al tiempo el límite de la fuerza de rozamiento y de posición de la normal

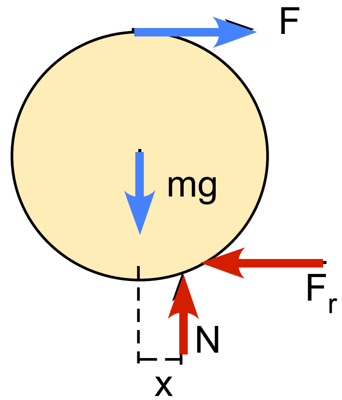
Vuelco en E y deslizamiento de E ($v_E \neq 0$)

$v_E$ opuesta a la $F_r$

# Resistencia a la rodadura




Algunos contactos tienen la capacidad de oponerse a que los cuerpos rueden, su reacción presenta un momento que se resiste a que el cuerpo gire.




Ese momento de reacción se encuentra que es proporcional a la normal, la reacción en ese tipo de contactos consiste en fuerza de rozamiento y **normal desplazada una distancia x respecto al punto de contacto** ($Nx= M_{reacción}$) .

Ese desplazamiento es limitado (experimentalmente):

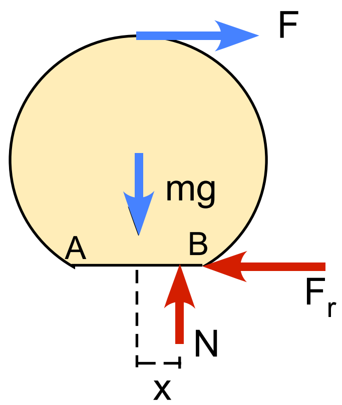
$-\delta \leq x \leq \delta$ $\delta$ : **coeficiente de resistencia a la rodadura**

$\delta$ tiene unidades de longitud

Se puede entender como que **ocurre un achatamiento** del punto de contacto y la normal admite desplazamientos entre A y B de límites:

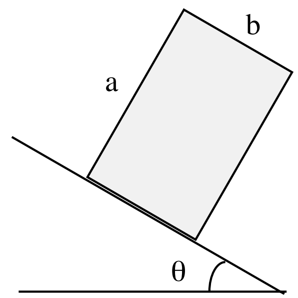
$x=\delta$ a punto de volcar en B

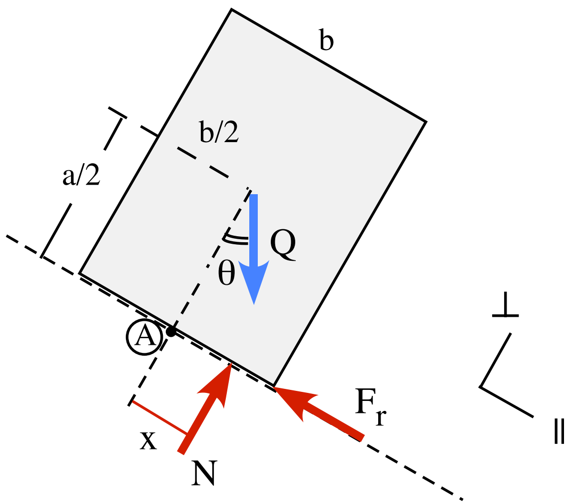
$x=-\delta$ a punto de volcar en A




$2\delta = AB$

34) Una caja de peso Q se apoya sobre un plano inclinado según se indica en la figura. Si el coeficiente de rozamiento entre caja y plano es 0.8, hallar el máximo valor del ángulo admisible para que la caja se encuentre en equilibrio:
a) si a=40 cm, b=30 cm,
b) si a=30 cm, b=40 cm




**Ecuaciones de equilibrio:**

$$\sum F_{||} = 0) \; F_r = Q \operatorname{sen}\theta \qquad [1]$$

$$\sum F_{\perp} = 0) \; N = Q \cos\theta \qquad [2]$$

$$M_A = 0) \; Q \operatorname{sen}\theta \, \frac{a}{2} = x \, N \qquad [3]$$

3 ecuaciones con 4 incógnitas

**Inecuaciones:** restricciones que han de cumplir las incógnitas

$$N \geq 0 \qquad F_r \leq \mu N \qquad -b/2 \leq x \leq b/2$$

de $[2]$ $\quad N \geq 0 \;\rightarrow\; 0 \leq \theta \leq 90^{\circ}$

Dividiendo $[1]$ y $[2]$ $\rightarrow$ $\operatorname{tg}\theta = \frac{F_r}{N}$ $[1']$

de $[2]$ y $[3]$ $\rightarrow$ $x = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\theta$ $[2']$

El ángulo que se busca es el de la **posición límite del equilibrio**. Para encontrarlo hay que suponer una forma de rotura de equilibrio, un movimiento que se va a iniciar. Cada movimiento inminente supone que una inecuación se satura, pasa a ser ecuación (la 4 en nuestro caso) con lo cual se completa el sistema y se puede resolver.

1) El equilibrio se rompe porque **el bloque va a deslizar**: $F_r = \mu N$ $[4]$

de $[1']$ $\rightarrow$ $\mu = \operatorname{tg}\theta$ de $[2']$ $\rightarrow$ $x = \frac{a}{2}\mu$

$$\theta = \operatorname{arctg}\mu$$

Se tienen que cumplir el resto de las inecuaciones: $-b/2 \le x \le b/2$ $N \ge 0$

$-b/2 \le \frac{a}{2}\mu \le b/2$ $\rightarrow$ $\mu \le \frac{b}{a}$ $N \ge 0$ $\rightarrow$ $0 \le \theta \le 90^{\circ}$

2) **El bloque va a volcar en la esquina inferior**: $x = \frac{b}{2} \quad [4]$

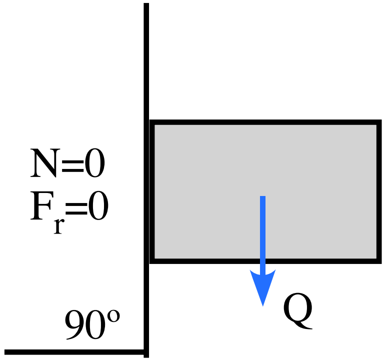
de $[2'] \rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$ de $[1'] \rightarrow F_r = \frac{b}{a} N$ $\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$

Se han de cumplir las restantes inecs:

$F_r \leq \mu N \rightarrow \underline{\frac{b}{a} \leq \mu}$ $N \geq 0 \rightarrow 0 \leq \theta \leq 90^o$

3) El bloque **se despega del suelo**: N=0

$N = 0 \rightarrow \theta = 90^o$ no hay equilibrio si $Q \neq 0$

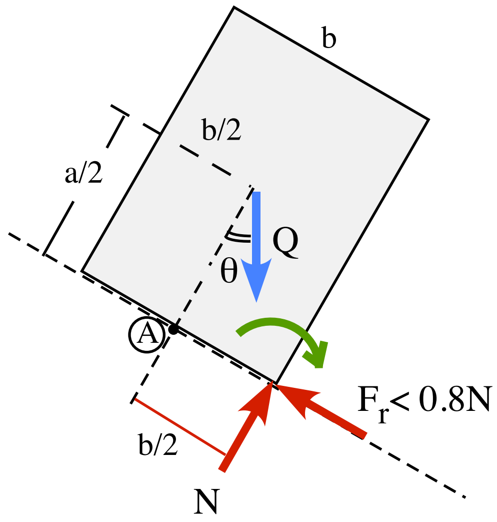



Resumen: $\begin{cases} \mu \leq \frac{b}{a} & \textbf{desliza} \\ \mu \geq \frac{b}{a} & \textbf{vuelca} \end{cases}$ $\left( \text{si } \mu = \frac{b}{a} \quad \textbf{vuelca con deslizamiento} \right)$

a) a=40 cm, b=30 cm

$$\mu = 0.8 > \frac{b}{a} = 0.75 \qquad \textbf{vuelca}$$

$$\theta_{máx} = \text{arc tg } 0.75 = 36.87^{o}$$




b) a=30 cm, b=40 cm

$$\mu = 0.8 < \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \qquad \textbf{desliza}$$

$$\theta_{máx} = \text{arc tg } 0.8 = 38.65^{o}$$