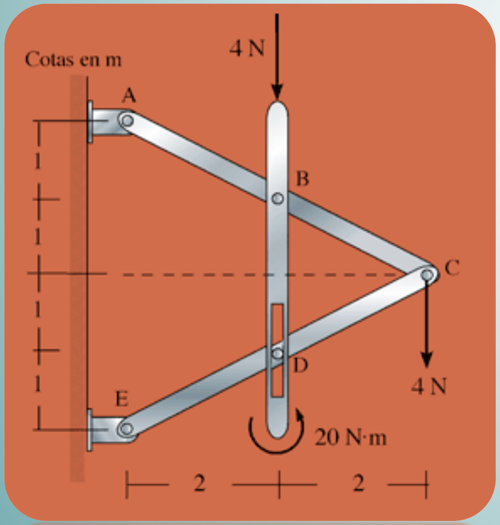
Mecánica

Tema 06. Estática analítica. Método de los trabajos virtuales. Método del potencial.



Cecilia Pardo Sanjurjo

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Estática analítica

Métodos basados en el cálculo del trabajo de las fuerzas y de las energías potenciales para estudiar el equilibrio de un sistema de sólidos.

- método de los trabajos virtuales $\longrightarrow$ posiciones de equilibrio

- método del potencial $\longrightarrow$ posiciones de equilibrio y estabilidad

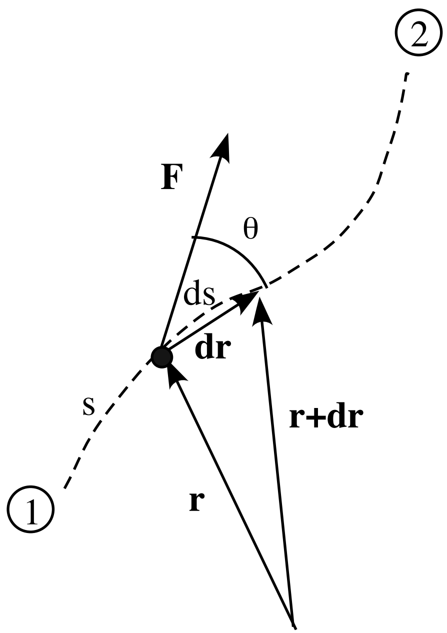
Puntos de equilibrio: configuración del sistema en que hay equilibrio

Estabilidad: comportamiento del sistema cuando se separa de una posición de equilibrio

En este tema le llamaremos V a la energía potencial por ser la notación habitual en mecánica analítica. En Dinámica hemos preferido llamarle E_p, notación empleada en el bachillerato.

Trabajo de una fuerza

Consideremos una masa puntual que, bajo la acción de una fuerza F, recorre el trayecto que va de la posición 1 a la 2 por el camino de puntos.



Se llama **trabajo elemental** realizado por la fuerza al producto de la componente de la fuerza en la dirección del movimiento del punto por el desplazamiento elemental que ha realizado:

$$dW = \vec{F} \bullet \overrightarrow{dr}$$

La unidad del trabajo en el SI es el **julio (J)**

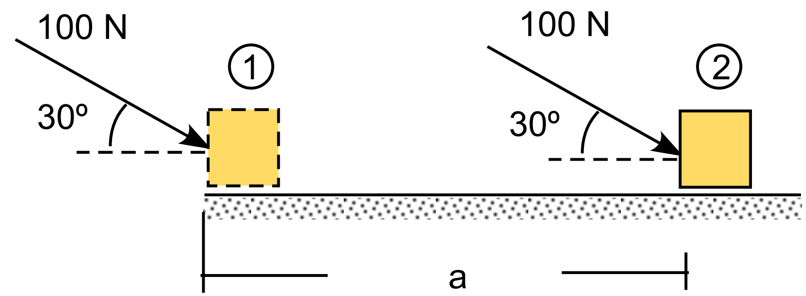
El producto escalar entre los vectores fuerza y desplazamiento se puede calcular de dos formas:

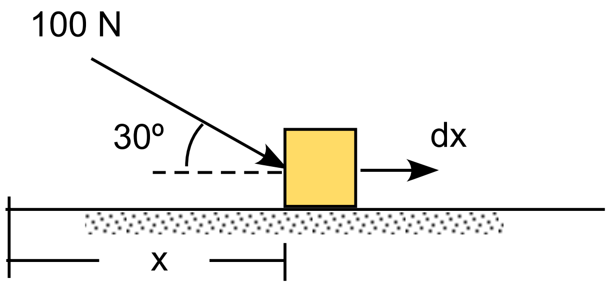
$$dW = F \cdot ds \cdot \cos\theta \quad \text{o} \quad dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Trabajo total en el recorrido de 1 a 2: $$W_{12} = \int_{1 \to 2} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dr}$$

Ejemplo:

Bloque deslizando de 1 a 2 con rozamiento



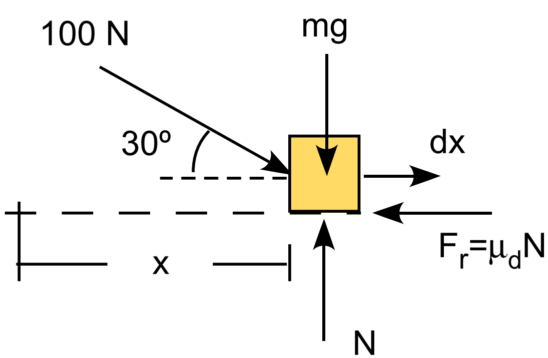


El trabajo de una fuerza es el **desplazamiento por la componente de la fuerza paralela** al mismo.

$$dW = 100\cos 30 \cdot dx$$

El trabajo de todas las fuerzas en un dx:

$$dW = 100\cos 30 \cdot dx - \mu_d N \cdot dx$$



$$\sum F_y = 0 \Big) N = mg + 100 \operatorname{sen} 30$$

$$dW = 50\sqrt{3} \cdot dx - \mu_d \left(mg + 50\right) \cdot dx$$

El trabajo total en ir de 1 a 2:

$$W_{12} = \int_{1\to 2} dW = \int_0^a \left[50\sqrt{3} - \mu_d \left(mg + 50\right)\right] \cdot dx = \left[50\sqrt{3} - \mu_d \left(mg + 50\right)\right] a$$

Trabajo en un sólido rígido

El trabajo de las fuerzas interiores en un sólido rígido es cero, ya que las fuerzas interiores se cancelan dos a dos. Sólo hay que considerar el **trabajo debido a las fuerzas exteriores**.

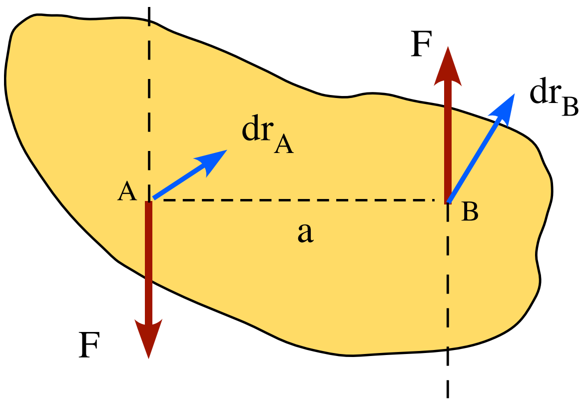
$$dW = \sum \vec{F}_{ext_i} \bullet \overrightarrow{dr}_i$$

Siendo i el punto donde está aplicada la $F_{ext\ i}$ y dr_i el desplazamiento de ese punto.

A partir de ahora elimino el subíndice exteriores: siempre me estaré refiriendo a ellas cuando consideremos sólidos rígidos

Trabajo de un par de fuerzas

Sean fuerzas F y – F con líneas de acción separadas una distancia a. Equivalen a un momento de módulo M=aF y sentido antihorario en este caso.

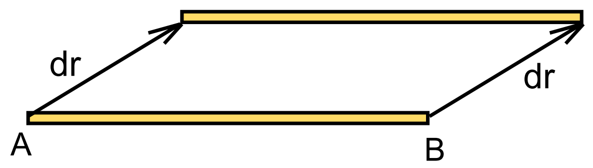


El trabajo elemental de ese par de fuerzas:

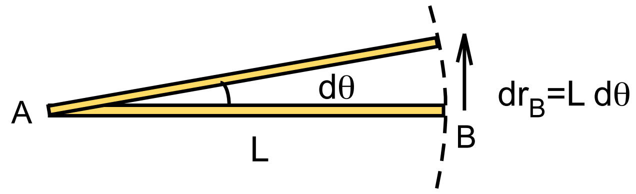
$$dW_M = -\vec{F}\bullet\overrightarrow{dr}_A + \vec{F}\bullet\overrightarrow{dr}_B$$

Esos desplazamientos en un sólido rígido han de ser tales que conserven las distancias. Hay dos posibilidades básicas:

Que todos los puntos se muevan igual (traslación)



Que uno permanezca fijo y los demás giren en torno a él describiendo arcos de circunferencia con centro en dicho punto (rotación)

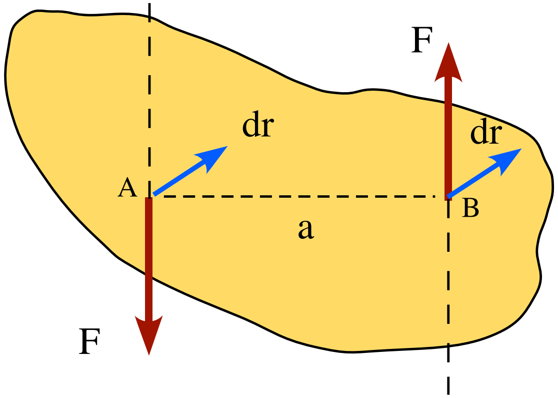


Cualquier otro movimiento es combinación de ambos

- **Trabajo del par de fuerzas en una traslación:**

$$\overrightarrow{dr}_A = \overrightarrow{dr}_B = \overrightarrow{dr}$$

$$dW_M = -\vec{F}\bullet\overrightarrow{dr} + \vec{F}\bullet\overrightarrow{dr} = 0$$

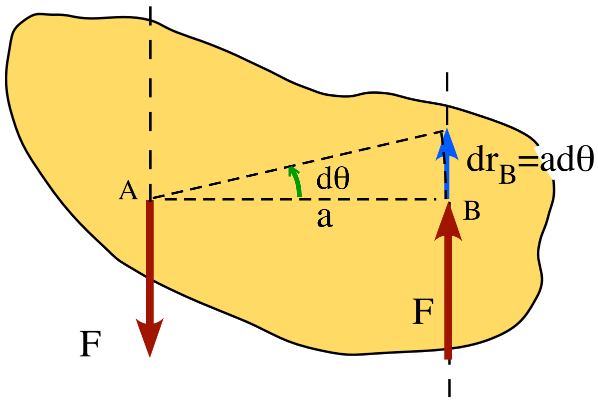


- **Trabajo del par de fuerzas en una rotación** con centro en A:

$$dr_A = 0$$

$$dr_B = a \cdot d\theta \quad \text{tangente a la trayectoria}$$

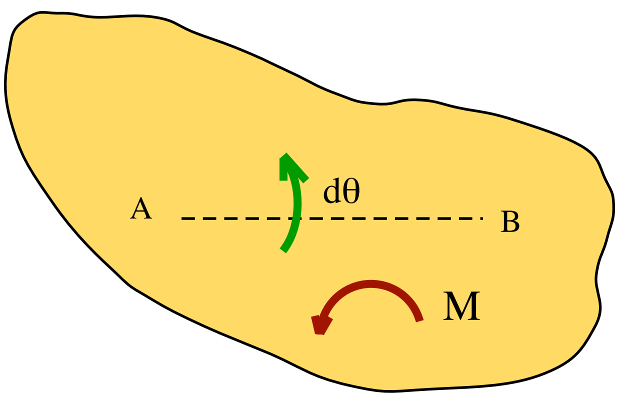
$$dW_M = \vec{F}\bullet\overrightarrow{dr}_B = F{\cdot}a{\cdot}d\theta = M\ d\theta$$



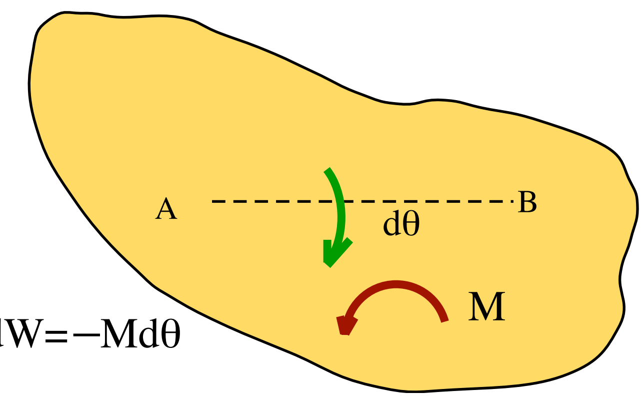
Si la rotación y el momento tienen el **mismo sentido**, como en este caso, el trabajo es **positivo**. Si son **opuestos**, el trabajo es **negativo**.

Trabajo de un par de fuerzas: $dW_M = \vec{M} \bullet \overrightarrow{d\theta}$

Esta expresión es general para problemas espaciales, en los cuales los pares y los desplazamientos angulares puede ser tres componentes. **En el caso plano** se reduce al simple producto de los módulos con signo + o – según sean del mismo sentido u opuestos:

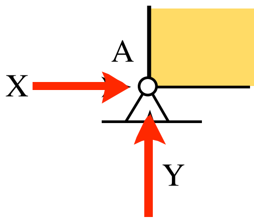


$dW = +Md\theta$

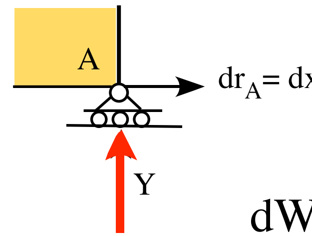


$dW = -Md\theta$

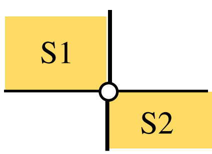
Trabajo en los enlaces y contactos entre sólidos

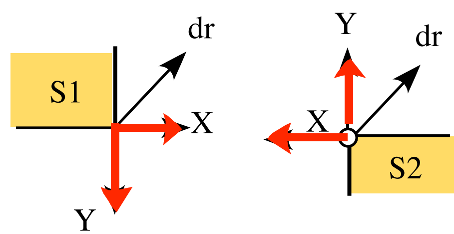


$$dW_{enlace} = \vec{R}_A \bullet \vec{0} = 0$$



$$dW_{enlace} = \vec{Y} \bullet \overrightarrow{dx} = 0$$





$$dW_{enlace} = \vec{R} \bullet \overrightarrow{dr} - \vec{R} \bullet \overrightarrow{dr} = 0$$

(del conjunto S1 y S2)

(Los dibujos sólo muestran los trozos de los sólidos en que hay un enlace)

Las reacciones en los enlaces ideales no hacen trabajo en un movimiento del sistema compatible con ellos

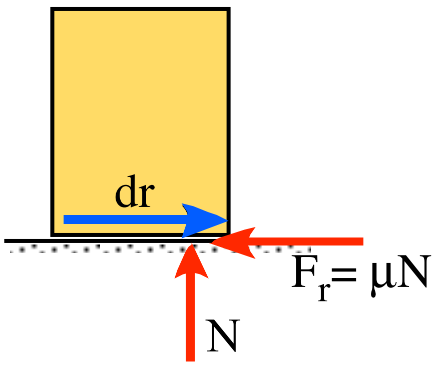
• **En los apoyos entre sólidos:**

En todos los casos:

$dW_N = 0 \qquad N \perp dr$

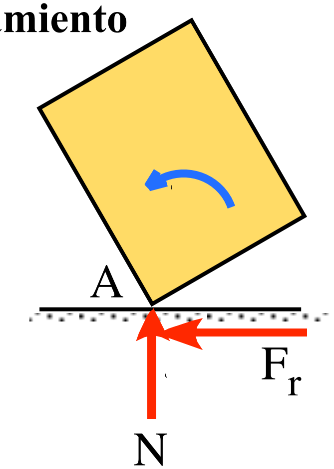
a) Deslizamiento (traslación):

$$dW_{F_r} = \vec{F}_r \bullet \overrightarrow{dr} = -F_r dr$$



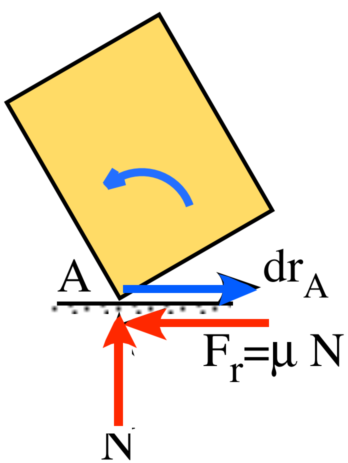
b) Giro sin deslizamiento en A:

$dr_A = 0$: $dW_{Fr} = 0$



c) Giro y deslizamiento en A:

$$dW_{F_r} = \vec{F}_r \bullet \overrightarrow{dr} = -F_r dr_A$$



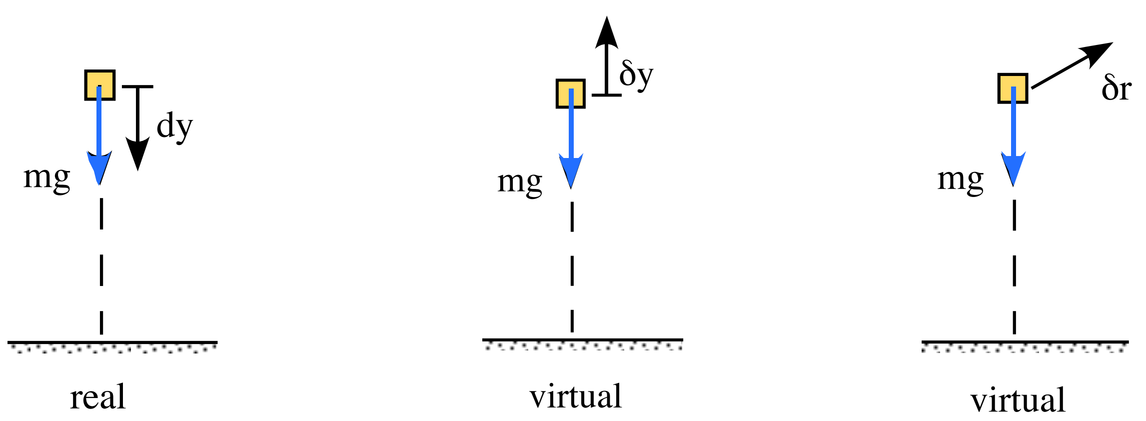
La fuerza de rozamiento trabaja únicamente si hay deslizamiento relativo

Trabajo virtual

Los trabajos que hemos definido eran realizados en desplazamientos reales, en movimientos que ocurren. Pero también podemos imaginarnos unos desplazamientos hipotéticos, que no tienen por qué ocurrir: a esos desplazamientos se les llama **desplazamientos virtuales**, y al trabajo realizado por las fuerzas en esos desplazamientos ficticios, recibe el nombre de **trabajo virtual.**

Para distinguir desplazamientos reales y virtuales, utilizaremos el símbolo delta (δ) para designar los desplazamientos virtuales y los trabajos virtuales correspondientes

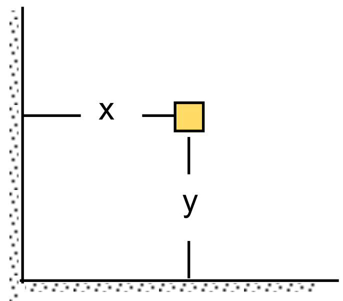
$\boxed{\text{Trabajo virtual: } \quad \delta W = \vec{F} \cdot \vec{\delta r} \quad\quad \vec{\delta r} \text{ desplazamiento virtual}}$



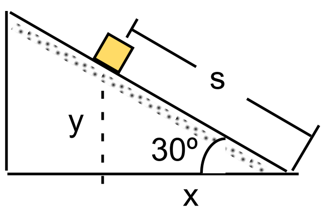
Coordenadas independientes de un sistema

Es el **conjunto mínimo de coordenadas** necesarias para dar la situación de un sistema material.

Por ejemplo: situar una masa puntual que se mueve libremente por el plano precisa dar 2 coordenadas, altura y posición horizontal respecto a referencias fijas

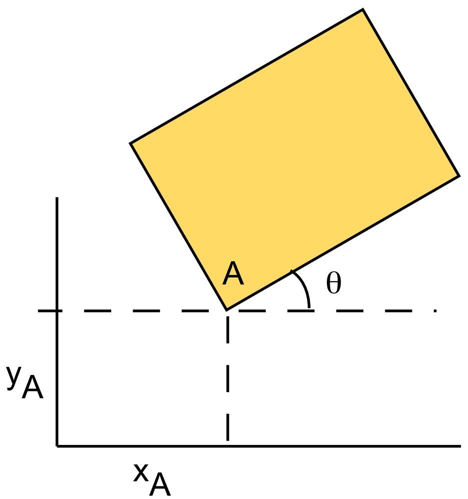


2 coordenadas

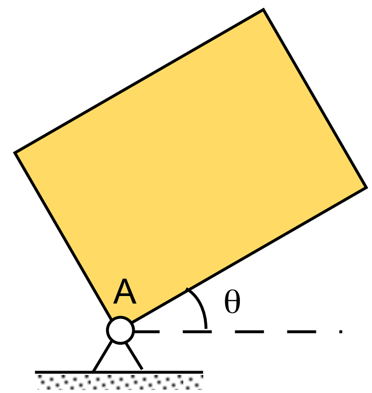


En este caso **1 coordenada** es suficiente, ya que está apoyada en el plano inclinado. Sabiendo s la masa puntual está perfectamente situada.

Para situar un sólido rígido libre en el plano, hay que dar la posición de uno de sus puntos y la orientación en el plano para que todos sus puntos queden perfectamente determinados. El punto se puede dar con 2 distancias y, la orientación se suele dar mediante el ángulo de inclinación respecto a un eje fijo: 3 coordenadas



3 coordenadas variables



Una sola coordenada, θ ,es suficiente ya que hay un enlace en A

Principio de los trabajos virtuales

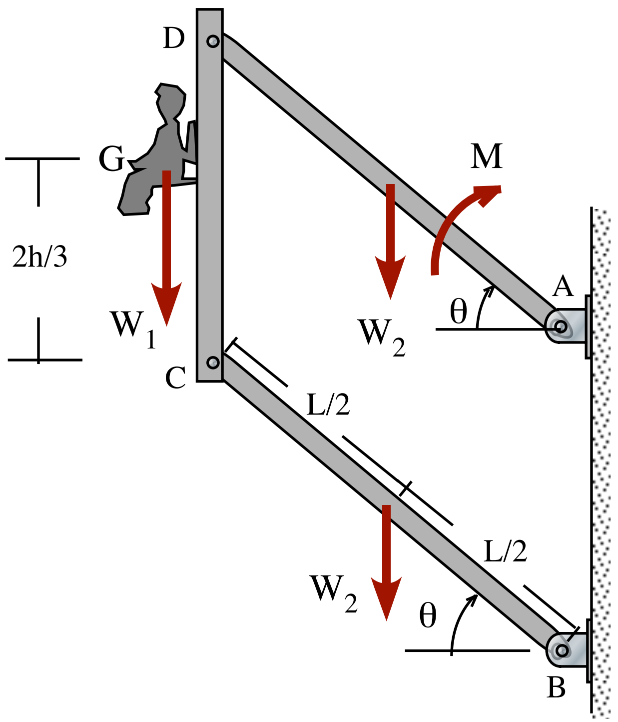
Un sistema de cuerpos rígidos conectados está en equilibrio si y sólo si el trabajo virtual realizado por todas las fuerzas y pares exteriores que actúan sobre el sistema es igual a cero para cualquier desplazamiento virtual:

En la posición de equilibrio $\delta W = \sum \vec{F}_i \bullet \overrightarrow{\delta r_i} = 0 \quad \forall \; \overrightarrow{\delta r_i}$

Se puede aplicar, dadas las fuerzas, para determinar la posición de equilibrio o a la inversa, para calcular cuanto debe valer alguna fuerza para que haya equilibrio en una posición determinada.

Aunque se puede aplicar para cualquier desplazamiento del sistema, conviene utilizar **desplazamientos compatibles con los enlaces** para minimizar el número de fuerzas que den trabajo. Hay además que expresarlo sólo **en función de las coordenadas independientes**. Vamos a ver como se aplica con un ejemplo

Problema 41: El sistema de la figura se usa para transportar personas de un nivel a otro , usando un mecanismo que aplica un par M a la barra AD. El peso del viajero, asiento y barra CD es W_1, actuando en G. Las otras dos barras son idénticas y uniformes, pesando cada una W_2. Hallar la relación entre M y el ángulo de equilibrio.



$0^{o} \leq \theta \leq 90^{o}$

4 barras paralelas dos a dos se deforman manteniéndose paralelas las barras enfrentadas

AD y BC misma inclinación

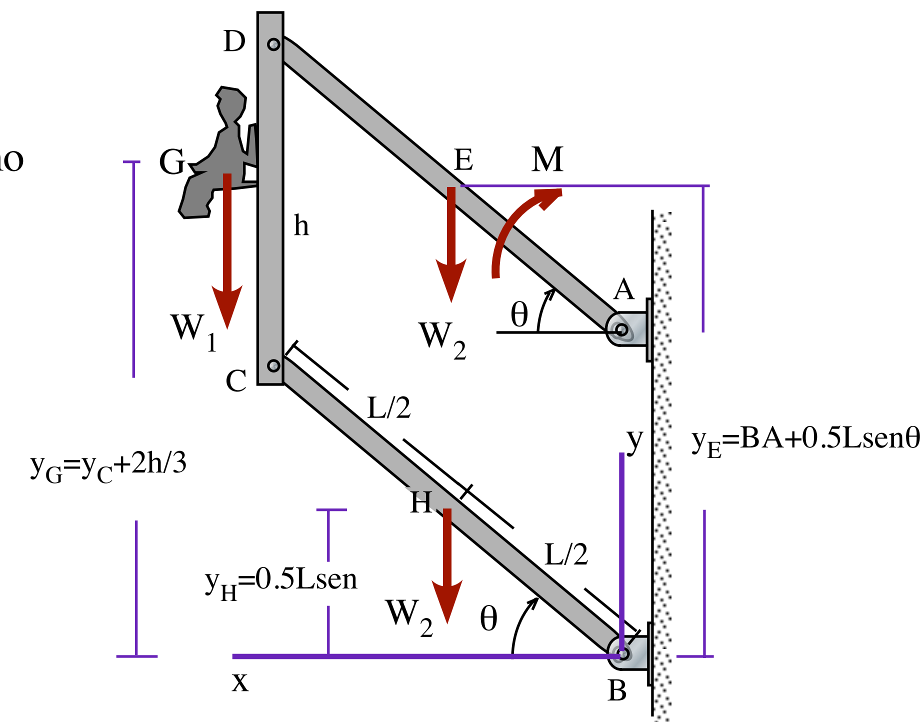
CD, como la pared, siempre vertical

El dibujo describe una posición general

La expresión del trabajo virtual:

$$\delta W = -W_1\ \delta y_G - W_2\ \delta y_H - W_2\ \delta y_E + M\delta\theta$$

Uso un desplazamiento angular $\delta\theta$ del mismo sentido que $M \rightarrow \delta W_M = +M\delta\theta$



Desplazamientos coordenadas:

$$y_G = L\text{sen}\theta + \frac{2h}{3} \;\rightarrow\; \delta y_G = L\cos\theta\ \delta\theta$$

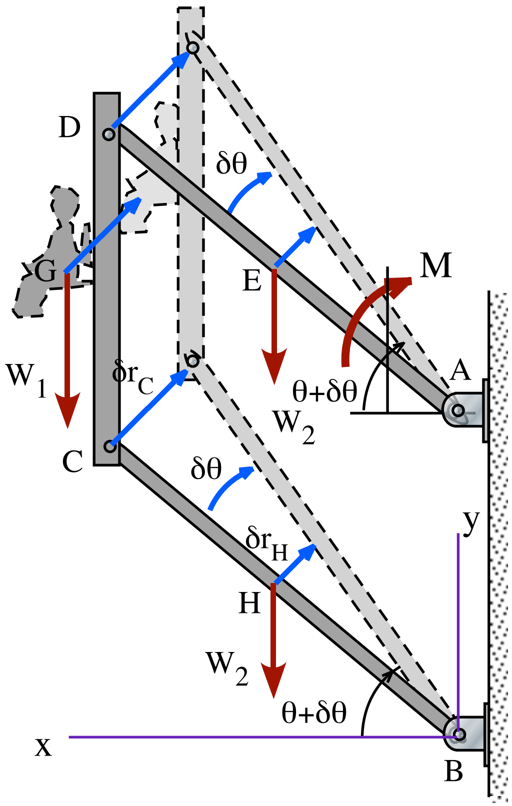
$$y_H = \frac{L}{2}\text{sen}\theta \;\rightarrow\; \delta y_H = \frac{L}{2}\cos\theta\ \delta\theta$$

$$y_E = AB + \frac{L}{2}\text{sen}\theta \;\rightarrow\; \delta y_E = \frac{L}{2}\cos\theta\ \delta\theta$$

En el equilibrio:

$$\delta W = \left(-W_1\ L\cos\theta\ - W_2\ L\cos\theta\ + M\right)\delta\theta = 0 \quad \forall\delta\theta$$

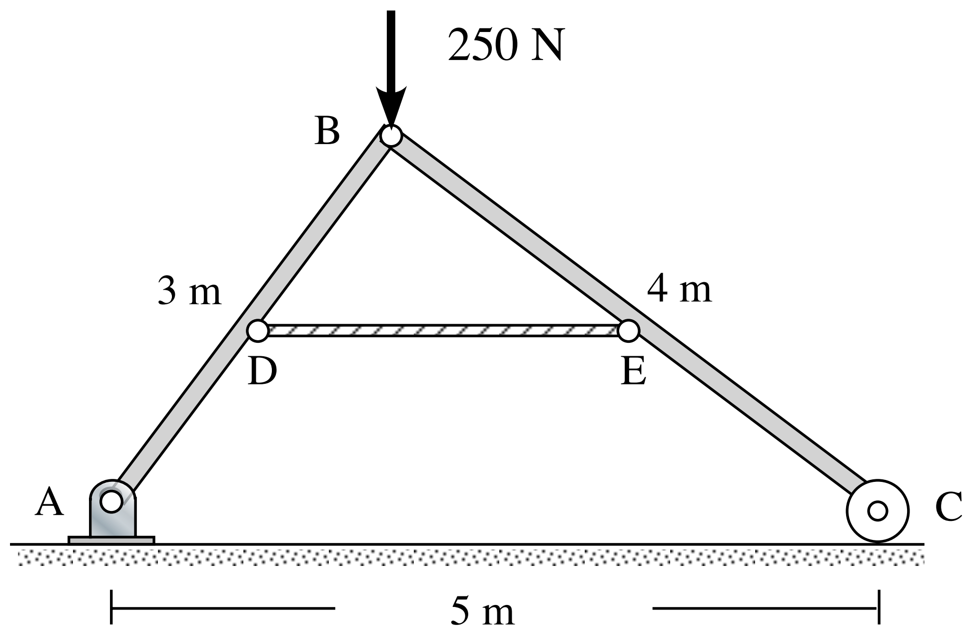
$$M = (W_1 + W_2)\ L\cos\theta$$



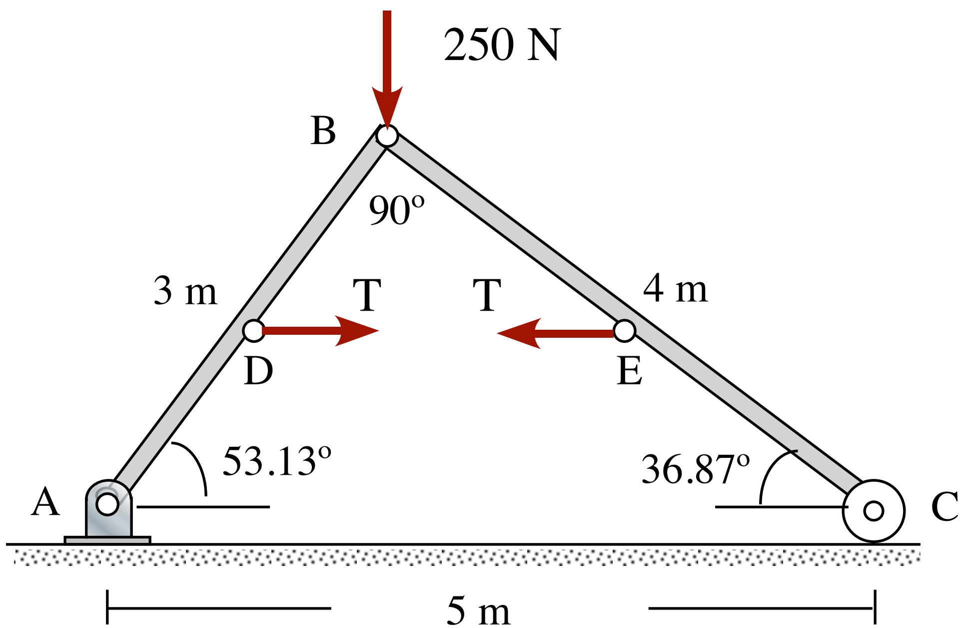
Desplazamiento del sistema que se ha empleado:

$\delta\theta$ positivo (aumento del ángulo θ)

Ejemplo (problema 45): Las barras articuladas AB y BC tienen longitudes de 3 y 4 m. Un hilo ideal une los puntos medios de ambas barras. La única carga que se considera es la vertical aplicada en B de 250 N. El sistema está en equilibrio en la posición representada. Determinar mediante el método de los trabajos virtuales, la tensión en el cable.



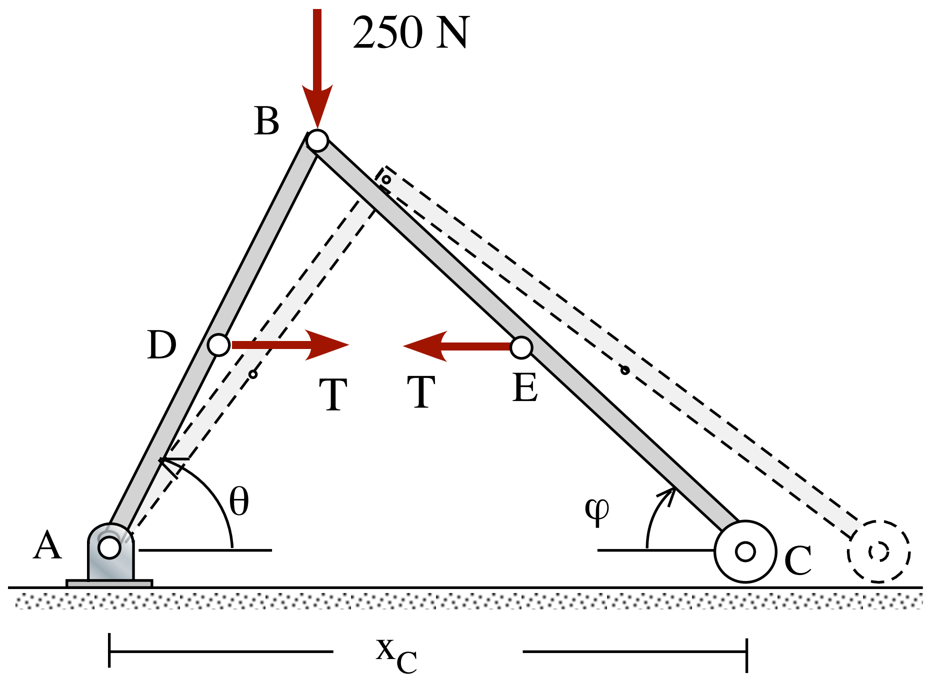
Las reacciones en A y en C no producen trabajo en desplazamientos que sea compatibles con esos enlaces.



Ángulos en la posición de equilibrio

El hilo se sustituye por la fuerza que ejerce sobre los puntos a que va unido, D y E. Es la fuerza que queremos hallar

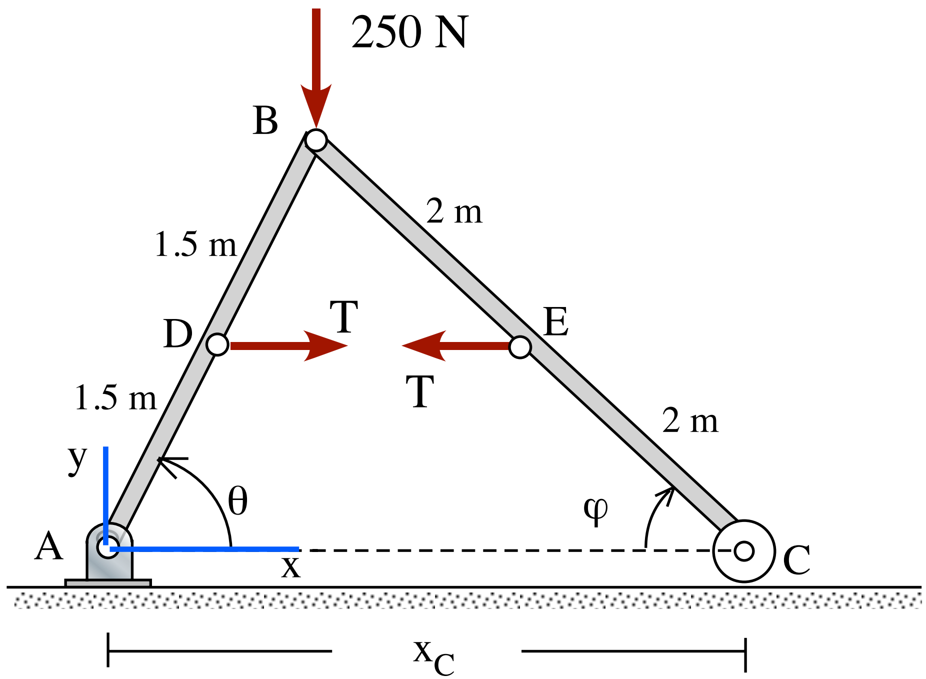
Hacemos un **desplazamiento compatible con los enlaces**: A se mantiene fijo y C sólo se desplaza en horizontal. El ángulo de 90º deja de serlo y la distancia AC ya no es 5 m.



Los dos ángulos están relacionados: si cambio uno, cambia el otro

Coordenada elegida $\rightarrow\ \theta$

En ese desplazamiento calculamos el trabajo virtual de las fuerzas, es decir fuerza por desplazamiento de la coordenada del punto de aplicación **en la dirección de la fuerza** (ya que el trabajo es un producto escalar)



Principio de Trabajos virtuales: $\delta W = \delta W_B + \delta W_D + \delta W_E = 0$ en el equilibrio

$$\delta W = -250\ \delta y_B + T\ \delta x_D - T\ \delta x_E = 0$$

Sólo necesito los desplazamientos paralelos a las fuerzas para el cálculo del trabajo en esos puntos. Así que escribo nada mas la coordenada paralela a la fuerza, hallo su variación al variar θ y particularizo a su valor en el equilibrio:

$$y_B = 3\cdot\text{sen}\theta \qquad \delta y_B = 3\cdot\cos\theta\cdot\delta\theta \xrightarrow[\text{equil }\theta=53.13^o]{} \delta y_B = 1.8\ \delta\theta$$

$$\delta W_B = -250\cdot 1.8\ \delta\theta = -\ 450\ \delta\theta$$

$$x_D = 1.5\cdot\cos\theta \qquad \delta x_D = -1.5\cdot\text{sen}\theta\ \delta\theta \xrightarrow[\text{equil.}\theta=53.13^o]{} \delta x_D = -1.2\ \delta\theta$$

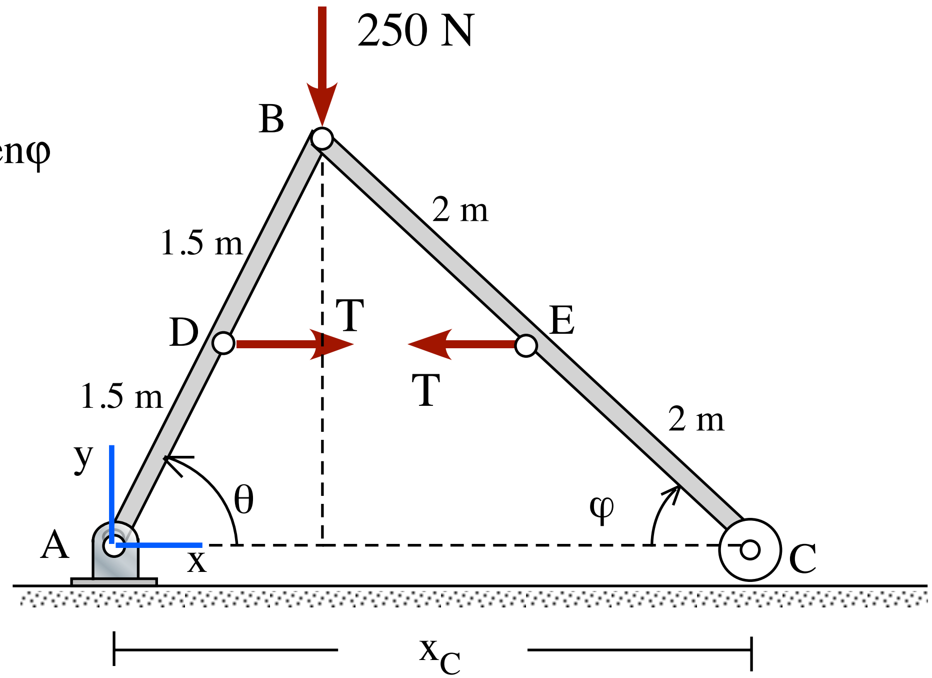
$$\delta W_D = T\ \delta x_D = -1.2T\ \delta\theta$$

$$x_E = x_B + x_{BE} = 3\cos\theta + 2\cos\varphi \qquad \delta x_E = -3\text{sen}\theta\ \delta\theta - 2\text{sen}\varphi\ \delta\varphi$$

en el equilibrio $\theta = 53.13^o$ y $\varphi = 36\ 87^o$: $\quad \delta x_C = -2.4\ \delta\theta - 1.2\ \delta\varphi$

pero necesito $\delta\varphi$ en función de $\delta\theta$

Relación entre ángulos: $3\ \mathrm{sen}\theta = 4\ \mathrm{sen}\varphi$



diferenciando:

$3\ \cos\theta\ \delta\theta = 4\ \cos\varphi\ \delta\varphi$

particularizando a los valores
de equilibrio(θ=53.13°, φ=36.87°):

$$3 \cdot 0.6\ \delta\theta = 4 \cdot 0.8\ \delta\varphi \rightarrow \delta\varphi = \frac{9}{16}\ \delta\theta$$

Volviendo al desplazamiento de x_E:

$$\delta x_E = -2.4\ \delta\theta - 1.2\ \delta\varphi = -2.4\ \delta\theta - 1.2\ \frac{9}{16}\ \delta\theta = -3.075\ \delta\theta$$

$$\delta W_E = -T\ \delta x_E = 3.075T\ \delta\theta$$

El trabajo total en la posición de equilibrio es cero :

$$\left(-450 - 1.2T + 3.075T\right)\ \delta\theta = 0 \rightarrow T=240\ \mathrm{N}$$

Resumiendo:

- Se pone el sistema en una **posición general**, **se eligen las coordenadas** independientes

- Las fuerzas son las que hay **en la posición de equilibrio**

- Se identifican los puntos con fuerzas aplicadas (y pares) y se escriben las coordenadas paralelas a las fuerzas (angulares para los pares) en la posición general, en función de las elegidas.

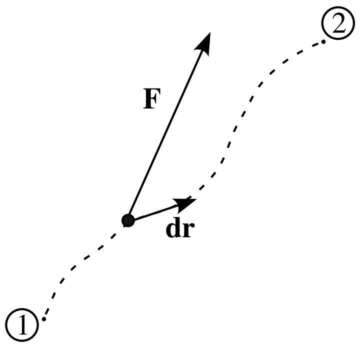
- Se diferencian y **se sustituyen los valores en el equilibrio**

- Se calcula el trabajo de cada fuerza o par. La suma se iguala a cero y se obtiene la incógnita.

Si la posición de equilibrio es conocida se puede utilizar el método para calcular alguna fuerza en algún elemento, para lo cual se sustituye dicho elemento por la (o las) fuerza(s) a que equivale.

Fuerzas conservativas. Energía potencial (V o E_p)

El trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se mueve de 1 a 2 a lo largo de la trayectoria de puntos



$$W_{12} = \int_{1\rightarrow 2} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dr}$$

en general, depende de la trayectoria que sigue la partícula para ir de 1 a 2

Para algunas fuerzas, el trabajo realizado depende únicamente de la posición inicial y final del punto, siendo independiente del camino seguido para alcanzarlas. Esas fuerzas reciben el nombre de **fuerzas conservativas**

El trabajo entonces se puede expresar en función de una magnitud escalar característica de la posición, llamada **energía potencial , V** :

$$V(1) - V(2) = W_{12}$$

Y **el trabajo de fuerzas conservativas en una trayectoria cerrada es 0**

Para dos posiciones muy próximas $dV = -\vec{F} \bullet \overrightarrow{dr}$

$$\int_1^2 dV = -\int_{1\to 2} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dr} \to V(2) - V(1) = -\int_{1\to 2} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dr}$$

Si se quiere escribir la energía potencial de una posición P cualquiera:

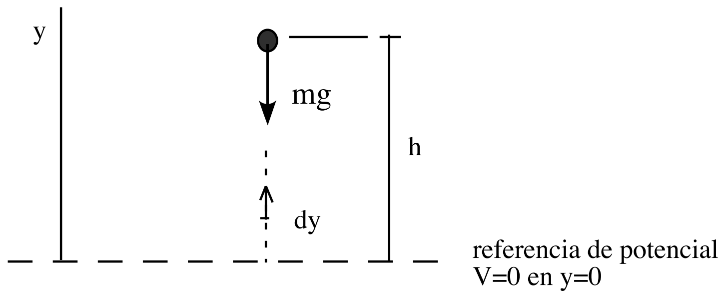
$$\int_1^P dV = -\int_{1\to P} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dr} \to V(P) - V(1) = -\int_{1\to P} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dr}$$

Eligiendo un punto P_o como referencia de potencial, tal que $V(P_o)=0$:

$$V(P) = -\int_{P_o \to P} \vec{F} \bullet \overrightarrow{dr}$$ Unidades SI: julios

Son **fuerzas conservativas las que dependen de la distancias o son constantes** (peso, fuerzas elásticas de los resortes, polinómicas). Un ejemplo importante de fuerzas **no conservativas** son las de **fricción**, para las que el trabajo realizado depende de que el camino recorrido sea más o menos largo.

Energía potencial del peso

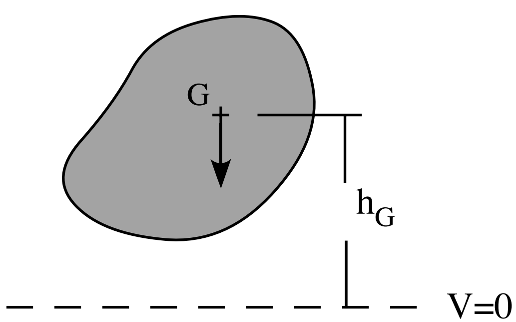


Masa puntual:

$$V(h) = -\int_0^h (-mg\vec{j})\bullet(dy\vec{j}) = mgh$$

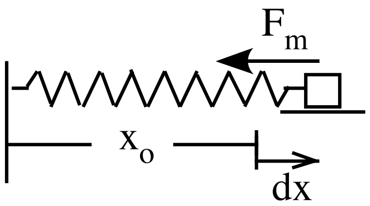
Si la masa puntual estuviese por debajo del nivel elegido como de V=0, la energía potencial sería negativa

Para un **sólido rígido** el peso está aplicado en el c.d.g., y la energía potencial es:



$$\boxed{V = mgh_G}$$

Energía potencial de un resorte elástico



$$\vec{F}_m = -k\left(x - x_o\right)\vec{i} \qquad \overrightarrow{dx} = dx\,\vec{i}$$

$$V(x) = -\int_{x_o}^{x} \left(-k\left(x - x_o\right)\vec{i}\right) \bullet \left(dx\,\vec{i}\right) = \int_{x_o}^{x} k\left(x - x_o\right)dx = \frac{1}{2}k\left(x - x_o\right)^2$$

Energía potencial de un muelle de longitud l y longitud natural l_o:

$$\boxed{V = \frac{1}{2}k\left(l - l_o\right)^2}$$

Método del potencial

La variación de la **energía potencial** es el trabajo cambiado de signo:

$$dV = -\vec{F} \bullet \overrightarrow{dr} = -dW$$

Del principio de trabajos virtuales, sabemos que si un sistema está en equilibrio y se utiliza el mínimo número de coordenadas independientes:

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \bullet \overrightarrow{dr_i} = 0 \rightarrow \sum \delta V_i = 0$$

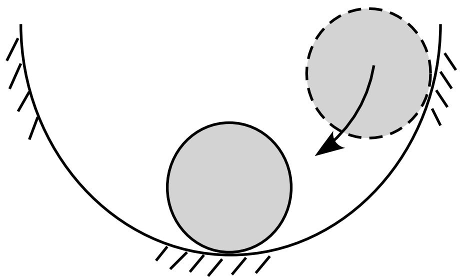
Si llamamos V (energía potencial total del sistema) a la suma de todos los V_i :

$$\delta V = 0$$

Supongamos que sólo hay una coordenada independiente a la que vamos a llamar s, el potencial del sistema sería una función de s , V=V (s). La condición de que un sistema de sólidos cualesquiera se encuentre en equilibrio en una posición s_o, es que la derivada primera del potencial respecto a esa coordenada sea 0 en ese punto

$$\frac{dV}{ds} = 0 \text{ en } s{=}s_o$$

Estabilidad del equilibrio

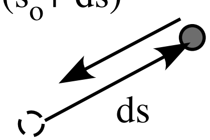


posición equilibrio
estable

Equilibrio **estable**: al desplazar ligeramente el sistema de la posición de equilibrio, el sistema se mueve de forma que recupera esa posición

$$\vec{F}(s_o) = \vec{0} \rightarrow dV(s_o) = 0$$

Desplazando la masa puntual un ds, ha de actuar una fuerza en esa nueva posición tal que tienda a recuperar la inicial

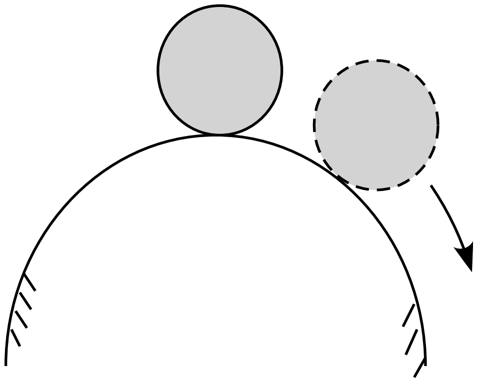


$$\vec{F}(s_o + ds) \bullet \overrightarrow{ds} < 0$$

$$\frac{d}{ds}(dV) = \lim_{ds \to 0} \frac{dV(s_o + ds) - dV(s_o)}{ds} = \lim_{ds \to 0} \frac{-\vec{F}(s_o + ds) \bullet \overrightarrow{ds}}{ds} > 0$$

$$\frac{d^2V}{ds^2} > 0$$

en s_o, V tiene un **mínimo relativo, equilibrio estable**

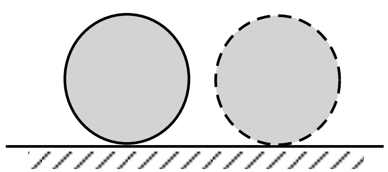


Equilibrio **inestable**: al desplazar ligeramente el sistema de una posición de equilibrio, el sistema se aleja más de la misma

En este caso, la función potencial tiene en ese punto un **máximo relativo**:

$$\frac{d^2V}{ds^2} < 0 \quad \text{en } s_o$$

Equilibrio **neutro o indiferente**: al desplazar ligeramente un sistema de una posición de equilibrio, el sistema se mantiene en ella, es una nueva posición de equilibrio.



$$\frac{d^2V}{ds^2} = 0 \quad \text{en } s_o$$

Resumiendo: el **método del potencial** para 1 coordenada independiente es un problema de extremos relativos en 1 variable

Los puntos de equilibrio de la energía potencial son los que hacen la derivada primera cero:

$$\frac{dV}{ds} = 0 \rightarrow \textbf{puntos de equilibrio } \mathbf{s_1, s_2, s_3 \;...}$$

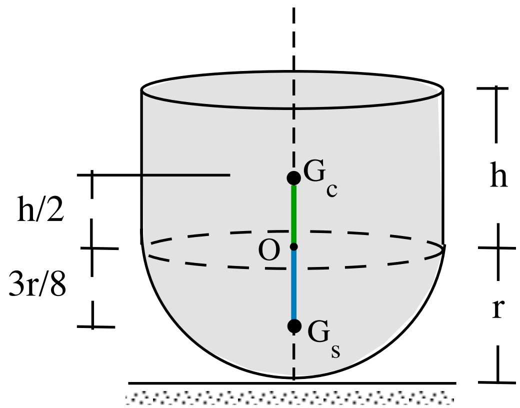
Sustituyendo **cada uno de esos puntos** en la derivada segunda se clasifican según su estabilidad:

$$\frac{d^2V}{ds^2} > 0$$ **Mínimo, punto estable**

$$\frac{d^2V}{ds^2} < 0$$ **Máximo, punto inestable**

$$\frac{d^2V}{ds^2} = 0$$ **Indiferente o neutro**

49) Estudiar la estabilidad de un tentetieso formado por un cilindro y una semiesfera de la misma densidad, en función de la altura h del cilindro y el radio común, r, de la semiesfera y base del cilindro. El c.d.g. de la semiesfera está a 3r/8 del centro.



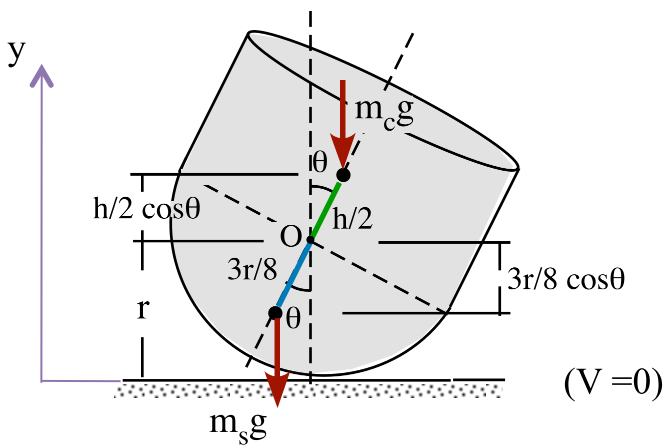
Masas de los cuerpos en función de la densidad:

$$\text{cilindro} \rightarrow \; m_c = \rho \cdot V_c = \rho\, \pi r^2 h$$

$$\text{semiesfera} \rightarrow \; m_s = \rho \cdot V_s = \rho\, \frac{2}{3} \pi r^3$$

Se considera el tentetieso en una **posición general** que respete los enlaces:

El ángulo de inclinación θ determina su posición



$$V = m_s g y_s + m_c g y_c = m_s g\left(r - \frac{3r}{8}\cos\theta\right) + m_c g\left(r + \frac{h}{2}\cos\theta\right)$$

$$V = -m_s g \frac{3r}{8}\cos\theta + m_c g \frac{h}{2}\cos\theta + cte$$

Sustituyendo las masas: $V = \rho\, \frac{1}{2}\pi r^2 g \left(-\frac{r^2}{2} + h^2 \right) \cos\theta + cte$

Puntos de equilibrio:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \rightarrow \rho\, \frac{1}{2}\pi r^2 g \left(\frac{r^2}{2} - h^2 \right) \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \rightarrow \theta = 0^{o}$$

$$\left(\frac{r^2}{2} - h^2 \right) = 0 \rightarrow r = h\sqrt{2}$$ independiente del ángulo

Estabilidad: $\frac{d^2V}{d\theta^2} = \rho\, \frac{1}{2}\pi r^2 g \left(\frac{r^2}{2} - h^2 \right) \cos\theta$

$$\underline{\text{en } \theta = 0^{o}} \rightarrow \frac{d^2V}{d\theta^2} = \rho\, \frac{1}{2}\pi r^2 g \left(\frac{r^2}{2} - h^2 \right) \begin{cases} \text{si } \underline{r > h\sqrt{2}} & \frac{d^2V}{d\theta^2} > 0 \;\; \underline{\text{mínimo, estable}} \\ \text{si } \underline{r < h\sqrt{2}} & \frac{d^2V}{d\theta^2} < 0 \;\; \underline{\text{máximo, inestable}} \end{cases}$$

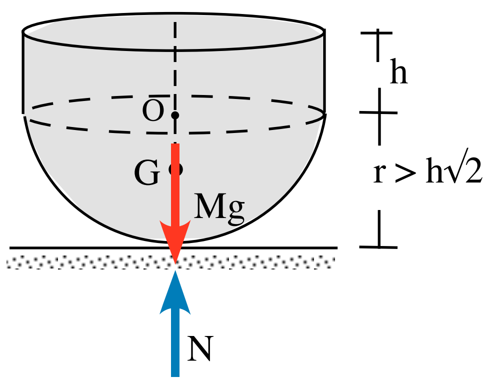
si $\underline{r = h\sqrt{2}}$ $\frac{d^2V}{d\theta^2} = 0$ para cualquier θ equilibrio <u>neutro o indiferente</u>

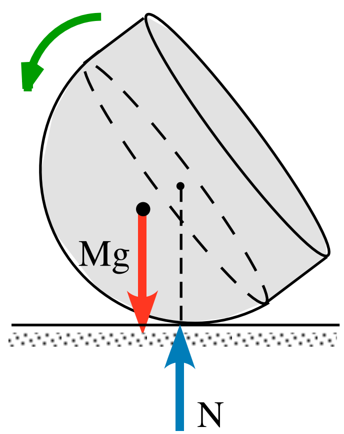
Estabilidad en la posición vertical de equilibrio (en relación con las fuerzas):

G del conjunto (calculado desde O)

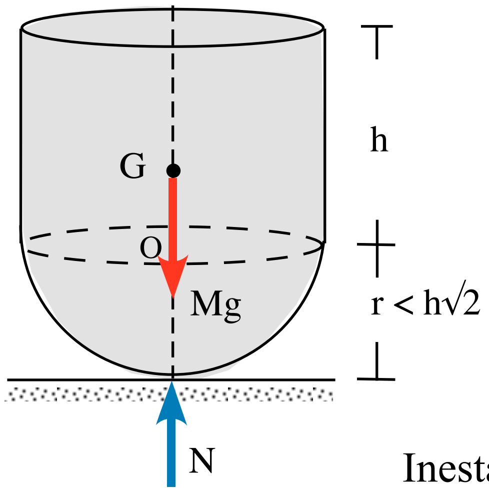
$$OG = \frac{m_C OG_C + m_S OG_S}{m_C + m_S} = \frac{h\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{2}{3}r\left(-\frac{3r}{8}\right)}{h + \frac{2}{3}r} = \frac{2h^2 - r^2}{4\left(h + \frac{2}{3}r\right)}$$

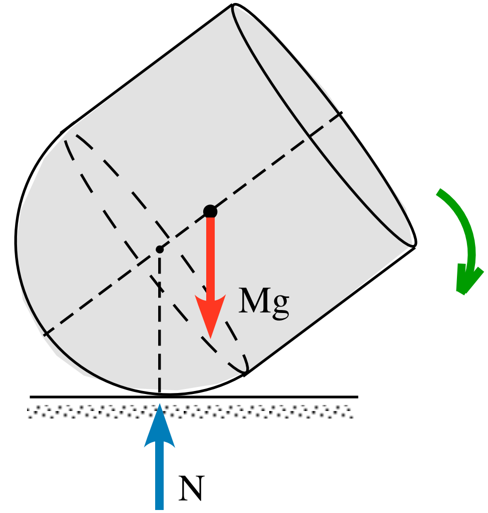
Está por arriba o por debajo de O según $h\sqrt{2}$ sea mayor o menor que r



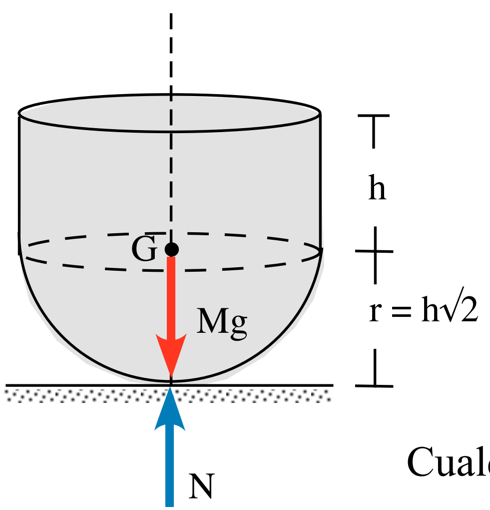


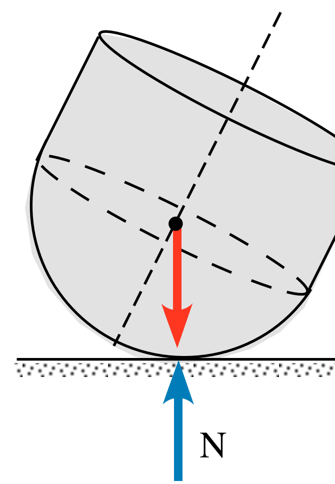
Estable: recupera la posición de equilibrio





Inestable: se aleja más de la posición de equilibrio

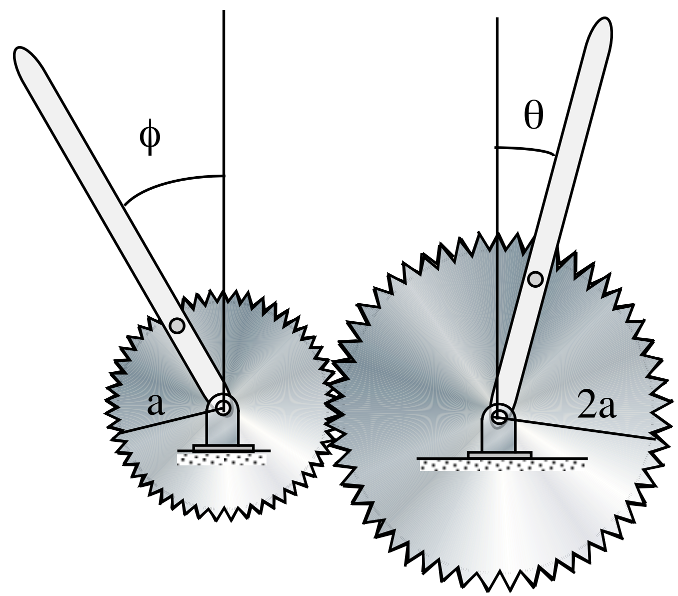




Cualquier ángulo es de equilibrio

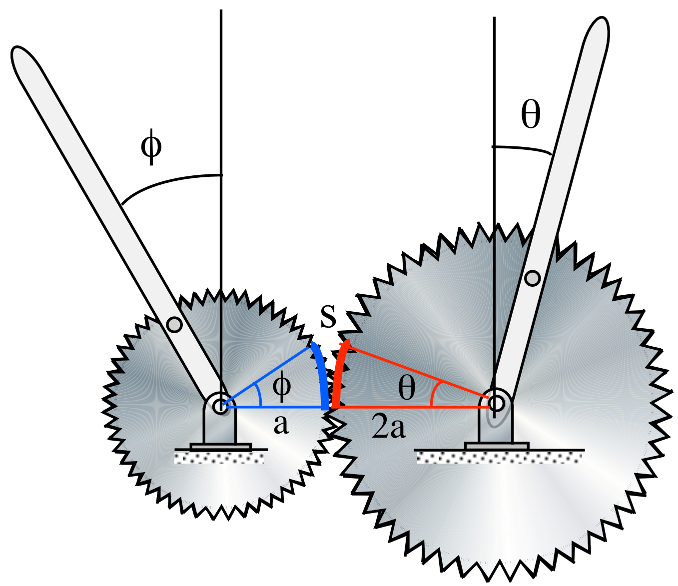
Equilibrio neutro o indiferente

50) Dos barras uniformes, ambas de masa m y longitud b, son solidarias de sendos engranajes como se muestra. En el momento del montaje ambas están en posición vertical (θ=0 y ϕ=0). Las barras pueden hacer los giros completos.
Determinar las posiciones de equilibrio del sistema y analizar en cada caso su estabilidad.



Como se piden puntos de equilibrio y estabilidad y las únicas fuerzas que necesito considerar son los pesos, aplicaré el método del potencial.

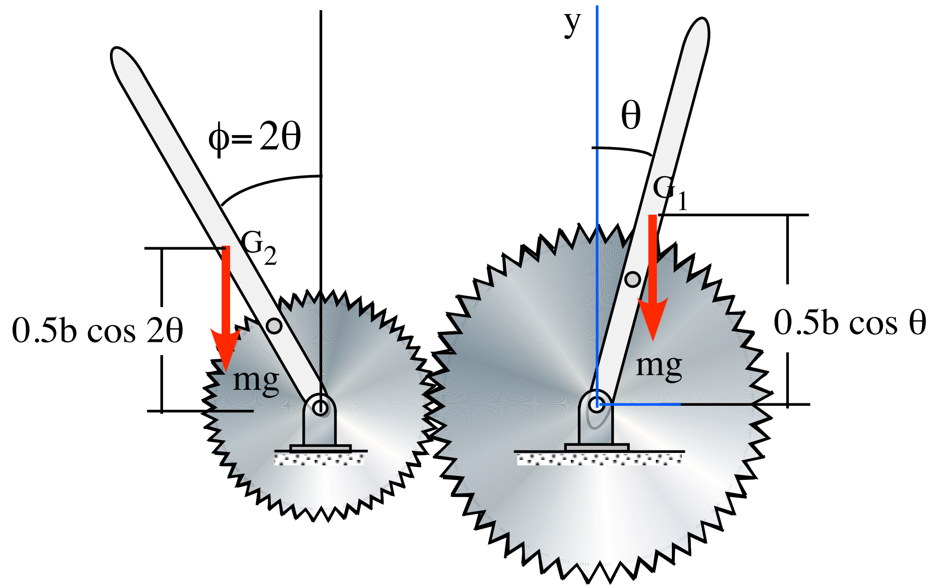
Los ángulos que giran las barras están relacionados: misma longitud de arco girada por cada engranaje (aunque el sentido de giro opuesto)



$s = 2a \cdot \theta = a \cdot \phi$

$\phi = 2\theta$

$$V = mgy_{G_1} + mgy_{G_2}$$



$$\boxed{V = mg\frac{b}{2}\cos\theta + mg\frac{b}{2}\cos 2\theta}$$

Derivando respecto a la coordenada elegida:

$$\frac{dV}{d\theta} = -mg\frac{b}{2}\operatorname{sen}\theta - mg\frac{b}{2}2\operatorname{sen}2\theta = -mg\frac{b}{2}\left(\operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right) = -mg\frac{b}{2}\left(1+4\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta$$

Puntos de equilibrio: $\frac{dV}{d\theta} = 0$

$$\left(1+4\cos\theta\right)\ \operatorname{sen}\theta = 0 \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\theta = 0^o,\ 180^o} \\ 1+4\cos\theta = 0 \ \rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \ \underline{\theta = 104.5^o,\ 255.5^o} \end{cases}$$

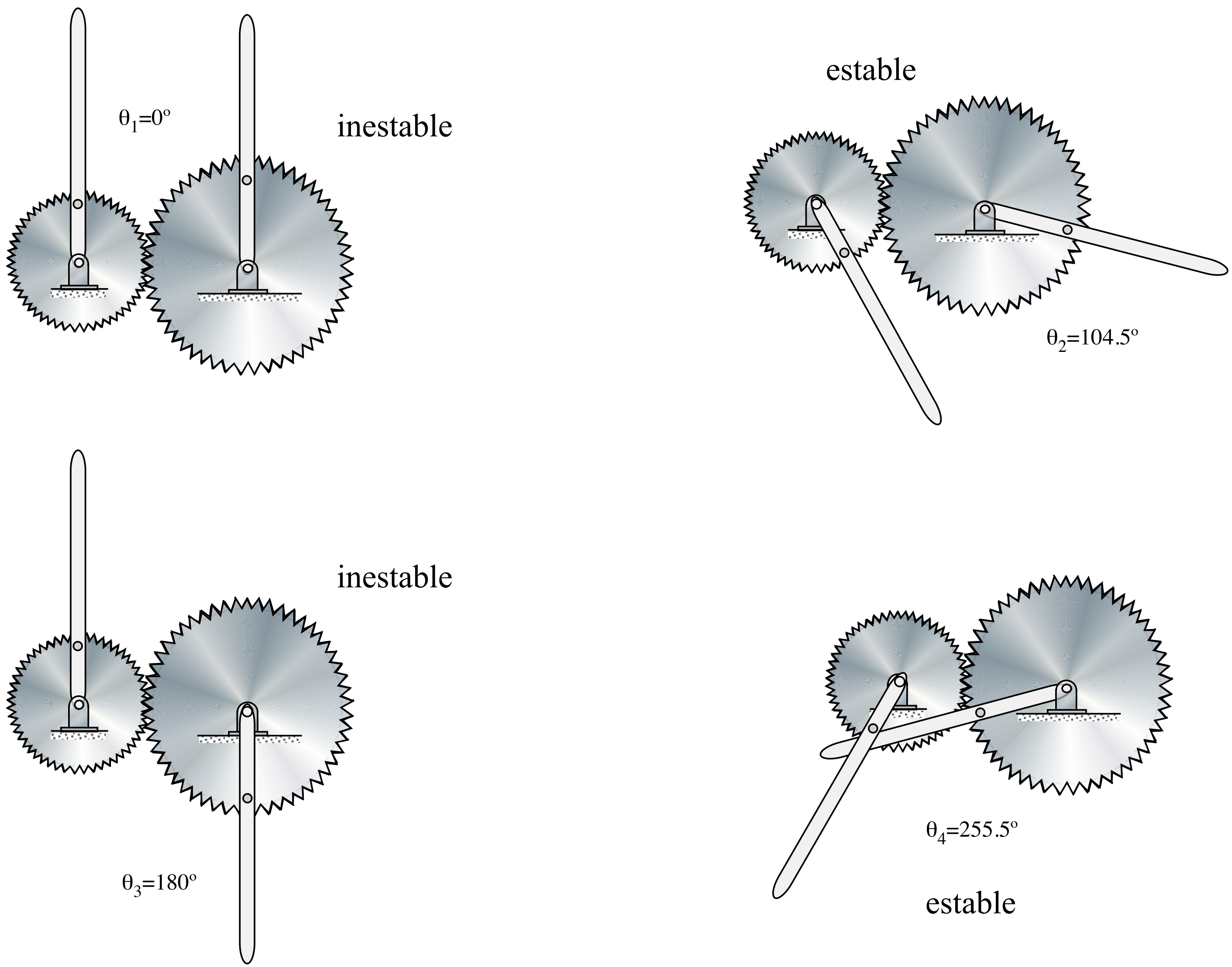
Estabilidad: $$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -mg\frac{b}{2}\cos\theta\left(1+4\cos\theta\right)+mg\frac{b}{2}4\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\theta$$

$$\theta_1 = 0^o \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} = -mg\frac{b}{2}5 < 0 \qquad \text{máximo} \qquad \text{inestable}$$

$$\theta_2 = 104.5^o \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\frac{b}{2}3.75 > 0 \qquad \text{mínimo} \qquad \text{estable}$$

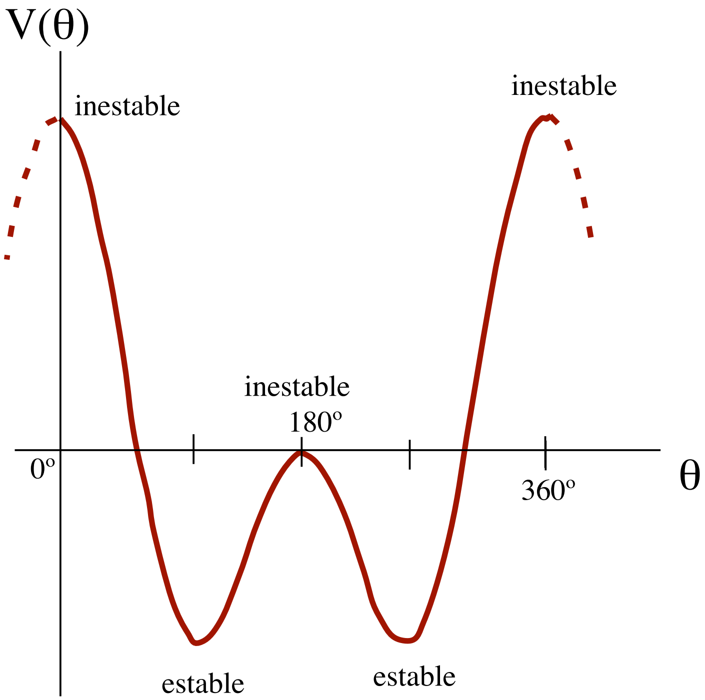
$$\theta_3 = 180^o \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} = -mg\frac{b}{2}3 < 0 \qquad \text{máximo} \qquad \text{inestable}$$

$$\theta_4 = 255.5^o \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} = mg\frac{b}{2}3.75 > 0 \qquad \text{mínimo} \qquad \text{estable}$$


θ1=0º
inestable
estable
θ2=104.5º
inestable
θ3=180º
θ4=255.5º
estable

Dibujando la función energía potencial frente a la coordenada se pueden localizar los máximos y mínimos

$$V = 0.5bmg\,(\cos\theta + \cos 2\theta)$$



En algunos casos es más fácil este procedimiento que resolver la ecuación de la derivada primera analíticamente.

Un sistema de sólidos tiende a adquirir las posiciones en que su energía potencial es mínima y mantenerse en ellas.