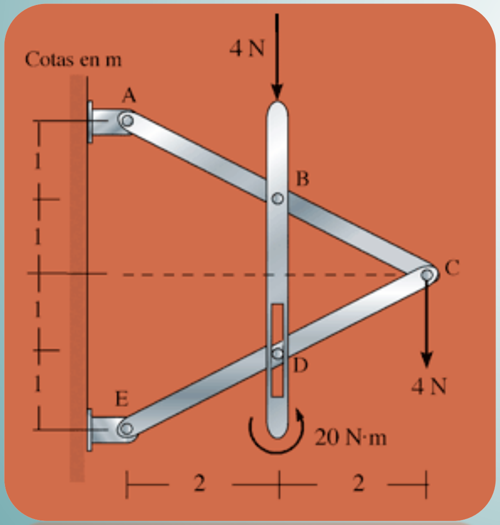
Mecánica

Tema 07. Cinemática del punto material. Movimiento relativo.



Cecilia Pardo Sanjurjo

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Cinemática

Parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, independientemente de las causas que lo producen. Se le llama también geometría del movimiento.

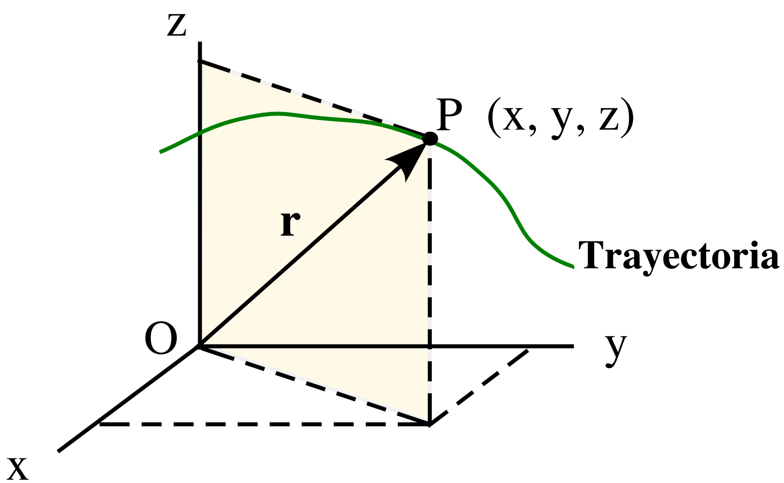
Posiciones, velocidades y aceleraciones en el tiempo

- **Cinemática del punto**

- **Cinemática del sólido rígido**

Cinemática del punto

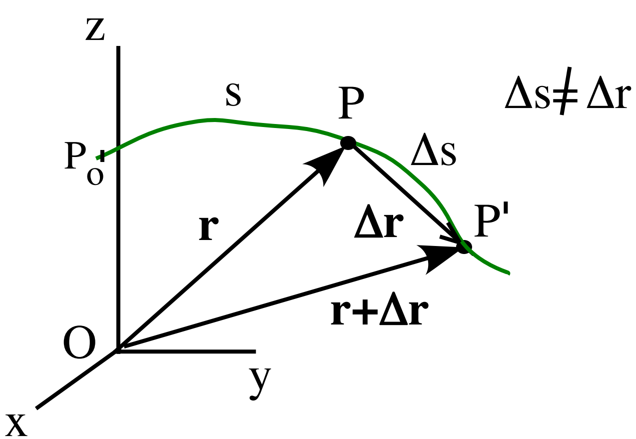
Supongamos que un punto se mueve en el espacio, de forma que en un instante de tiempo t se encuentra en el punto P de coordenadas (x, y, z) en ese instante.



Vector de posición de P respecto al sistema de ejes con origen en O:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Se llama **trayectoria** a la curva descrita por el punto su movimiento a lo largo del tiempo.



Al cabo de un tiempo Δt el punto habrá avanzado a otra posición, P´ :

$$\vec{r} + \overrightarrow{\Delta r} = (x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$$

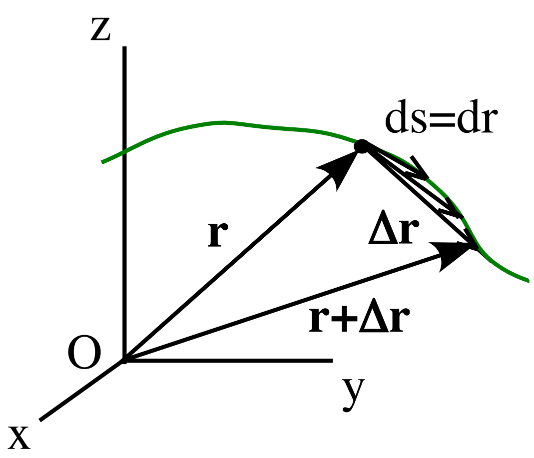
Vector desplazamiento: $\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{PP'}$

Velocidad media: $\vec{v}_m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}, \dfrac{\Delta y}{\Delta t}, \dfrac{\Delta z}{\Delta t} \right)$

La distancia recorrida a lo largo de la trayectoria entre dos posiciones no coincide con el módulo del vector desplazamiento $\Delta s \neq \Delta r$

La velocidad media tiene la dirección y sentido de $\overrightarrow{\Delta r}$

Si vamos tomando Δt cada vez más pequeños, el $\overrightarrow{\Delta r}$ se va haciendo más próximo en orientación al tramo de trayectoria. Cuando Δt tiende a 0, el desplazamiento se hace tangente a la trayectoria. Además, su módulo coincide con el desplazamiento a lo largo de la trayectoria: ds=dr



Velocidad de un punto es la variación del vector desplazamiento por unidad de tiempo cuando el intervalo de tiempo tiende a cero

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La velocidad es tangente a la trayectoria en ese punto

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Es común indicar derivada respecto al tiempo con un punto encima de la variable

$$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

Al módulo de la velocidad se le llama **celeridad:**

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

Velocidad: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\qquad \vec{v} = v\,\vec{e}_t = \dot{s}\,\vec{e}_t$

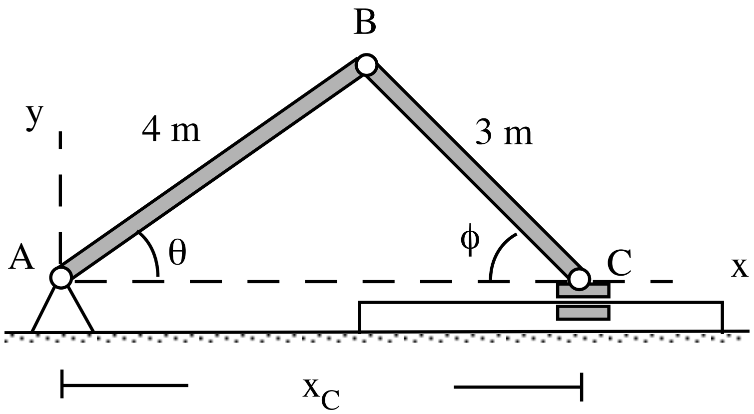
Siendo e_t el versor (vector unitario) tangente a la trayectoria en el punto

Aceleración media: $\vec{a}_m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

Aceleración de un punto: $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} \qquad \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

Si se conocen las coordenadas en función del tiempo (llamadas ecuaciones horarias) se pueden calcular velocidades y aceleraciones derivando respecto al tiempo. Si se conoce la aceleración en función del tiempo habrá que integrar para hallar velocidad y posición.



Ejemplo: Hallar velocidad y aceleración de la deslizadera C en el instante en que las dos barras forman un ángulo recto, sabiendo que, en función del tiempo:

$$\theta = 0.9\ t \quad (\text{t en s; } \theta \text{ en radianes})$$

Relación geométrica entre ángulos:

$$y_B = 4\,\text{sen}\theta = 3\,\text{sen}\phi \;\rightarrow \text{sen}\phi = \frac{4}{3}\text{sen}0.9t$$

$$\cos\phi\cdot\frac{d\phi}{dt} = \frac{4}{3}0.9\cos 0.9t \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = 1.2\frac{\cos 0.9t}{\cos\phi}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = 1.2\frac{-0.9\,\text{sen}0.9t\cdot\cos\phi + \cos 0.9t\cdot\text{sen}\phi\cdot\frac{d\phi}{dt}}{\cos^2\phi}$$

En la posición pedida:

$$\theta = 36.87^{\circ} \rightarrow \phi = 53.13^{\circ} \;\left(t = \frac{36.87\pi}{0.9\cdot 180} = 0.715\ \text{s}\right)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 1.6\ \text{rad/s}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = 2.\hat{3}\ \text{rad/s}^2$$

Movimiento del punto C: $x_C = 4\cos 0.9t + 3\ \cos\ \phi \rightarrow \underline{x_C = 5\ \text{m}}$

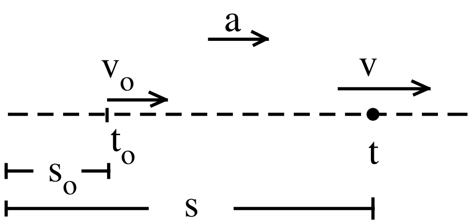
$$v_C = \frac{dx_C}{dt} = -4\cdot 0.9\,\text{sen}0.9t - 3\frac{d\phi}{dt}\text{sen}\ \phi \rightarrow v_C = -6\ \text{m/s} \qquad \underline{\vec{v}_C = -6\,\vec{i}}$$

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = -3.6\cdot 0.9\cos 0.9t - 3\frac{d^2\phi}{dt^2}\text{sen}\ \phi - 3\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\cos\ \phi \rightarrow a_C = -12.8\ \text{m}/\text{s}^2 \qquad \underline{\vec{a}_C = -12.8\,\vec{i}}$$

Movimiento rectilíneo

La trayectoria es una **línea recta**: **velocidades y aceleraciones son en esa misma dirección**

• Movimiento uniformemente acelerado



$$\vec{a} = \vec{cte} \rightarrow a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a\ dt$$

$$\int_{v_o}^{v} dv = \int_{t_o}^{t} a\,dt \rightarrow \boxed{v = v_o + a\left(t - t_o\right)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = v\ dt \quad \rightarrow \quad \int_{s_o}^{s} ds = \int_{t_o}^{t} v\,dt = \int_{t_o}^{t} \left[v_o + a\left(t - t_o\right)\right] dt$$

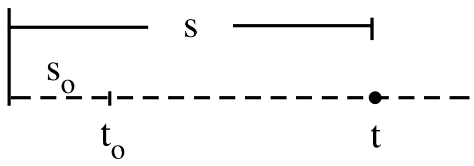
$$\boxed{s - s_o = v_o\left(t - t_o\right) + \frac{1}{2} a\left(t - t_o\right)^2}$$

Eliminando el tiempo ($t-t_o$) de estas dos ecuaciones:

$$\boxed{v^2 - v_o^2 = 2\ a(s - s_o)}$$

- **Movimiento rectilíneo uniforme o de velocidad constante:**

$$\vec{v} = ct\vec{e} \qquad \vec{a} = \vec{0}$$



Sustituyendo en las expresiones anteriores con a=0

$$s - s_o = v\left(t - t_o\right)$$

En cualquier caso habrá que integrar dos veces para obtener las características del movimiento a partir de la aceleración.

Tres problemas de integración según:

1) **La aceleración es una función conocida de t** $a = f(t)$

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a\ dt = f(t)dt \rightarrow \text{se integra y se obtiene } v(t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = vdt \rightarrow \text{se integra y se obtiene } s(t)$$

2) **La aceleración es una función conocida de la posición** $a = f(s)$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} \rightarrow vdv = a\ ds = f(s)ds \rightarrow \text{se integra y se obtiene } v(s)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{ds}{v} = dt \rightarrow \text{se integra y se obtiene } s(t)$$

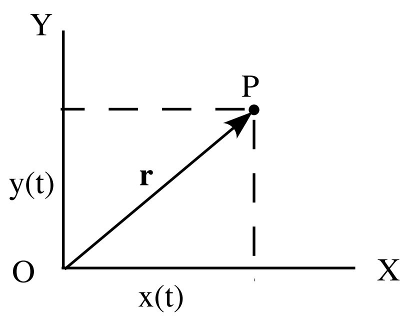
3) **La aceleración es una función conocida de la velocidad** $a = f(v)$

$$a = \frac{dv}{dt} = f(v) \rightarrow \frac{dv}{f(v)} = dt \rightarrow \text{se integra y se obtiene } t(v)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dv}f(v) \rightarrow v\frac{dv}{f(v)} = ds \rightarrow \text{se integra y se obtiene } s(v)$$

Movimiento general en el plano

Una posibilidad es utilizar las coordenadas rectangulares respecto a unos ejes fijos OXY



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

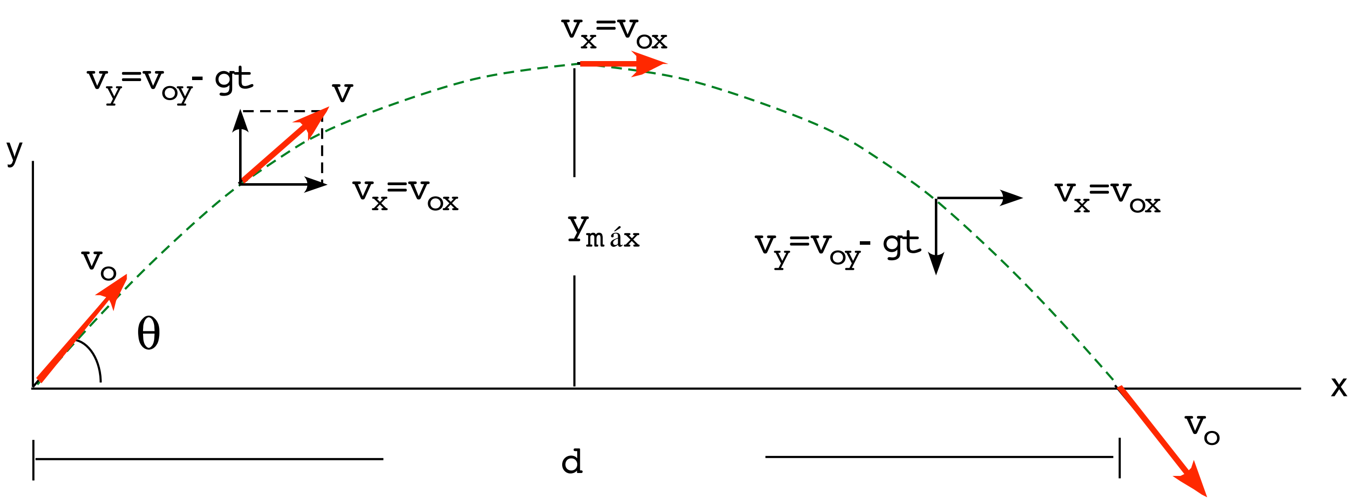
$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \quad \text{con} \quad v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \quad \text{con} \quad a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y}$$

Y tratar el movimiento en cada eje separadamente. En los casos en que el movimiento en cada eje no depende del otro, es cómodo usar estas componentes rectangulares.

Un ejemplo es el movimiento de proyectiles o tiro parabólico

Movimiento de proyectiles o tiro parabólico



Movimiento horizontal con velocidad constante:

$v_x = v_{ox}$ $\quad a_x = 0$ $\quad x = v_{ox}\ t$

siendo $v_{ox} = v_o \cos\theta$

Movimiento vertical con aceleración constante:

$a_y = -g$ $\quad v_y = v_{oy} - gt$ $\quad y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$

siendo $v_{oy} = v_o \operatorname{sen}\theta$

Trayectoria parabólica:

$$y = v_{oy}\left(\frac{x}{v_{ox}}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{ox}}\right)^2$$

Altura máxima:

$$y_{máx} \quad \text{cuando } v_y = 0 \rightarrow t = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o \operatorname{sen}\theta}{g} \qquad\qquad y_{máx} = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

Alcance horizontal, d:

Haciendo y=0 en la ec. de la trayectoria se obtienen dos soluciones:

- x=0 el punto de partida
- $x = \dfrac{2v_{ox}v_{oy}}{g} \equiv d$ alcance horizontal

$$d = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

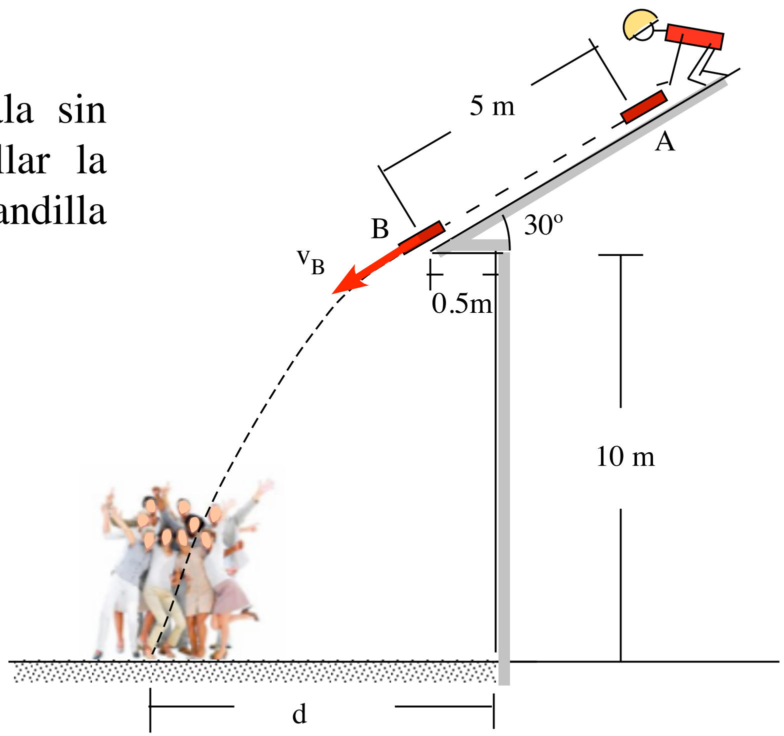
(El tiempo en que se alcanza es doble que el del $y_{máx}$)

Ángulo de alcance máximo para una v_o fija:

$$d_{máx} = \frac{v_o^2}{g} \quad \text{que ocurre cuando } \theta = 45^o \ (\operatorname{sen}2\theta = 1)$$

Ejemplo:

A un albañil se le escapa una teja, que resbala sin rozamiento por el tejado y cae al suelo. Hallar la distancia mínima, d, a la que ha de situarse la pandilla habitual para no correr peligro.

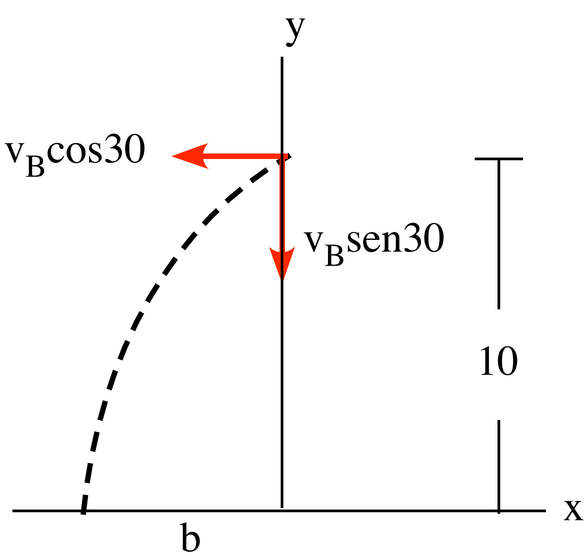


Tramo de A a B: (sin rozamiento)

$$v_A = 0 \; ; \; s = 5\text{m} \; ; \; a = g \text{ sen}30$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2as = 2 \cdot g \text{ sen}30 \cdot 5 = 49$$

$$v_B = 7 \text{ m/s}$$



De B al suelo, tramo parabólico:

$$x = -v_B \cos 30 \cdot t \qquad y = 10 - v_B \text{sen}30 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Cuando llega al suelo y=0, x=– b: $10 = 3.5 \cdot t + 4.9t^2$

$$4.9\, t^2 + 3.5 \cdot t - 10 = 0 \rightarrow t = 1.115 \text{ s}$$

$$b = 3.5\sqrt{3} \cdot t = 6.76 \text{ m}$$

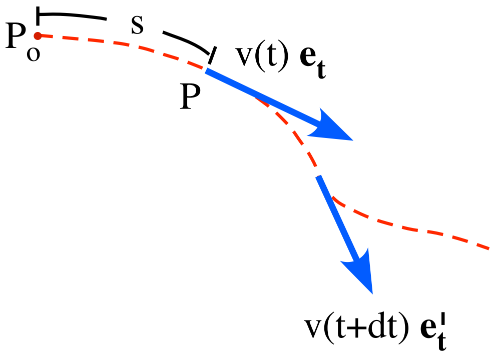
$$d = 0.5 + 6.76 = 7.26 \text{ m}$$ desde la pared

Coordenadas intrínsecas

Otra posibilidad es usar **coordenadas intrínsecas**: La situación del punto se da respecto a un punto de la trayectoria P_o mediante la longitud s(t) recorrida a lo largo de la misma.

La velocidad es tangente a la trayectoria en cada punto, siendo su módulo la derivada respecto al tiempo de la distancia, s, recorrida a lo largo de la trayectoria:

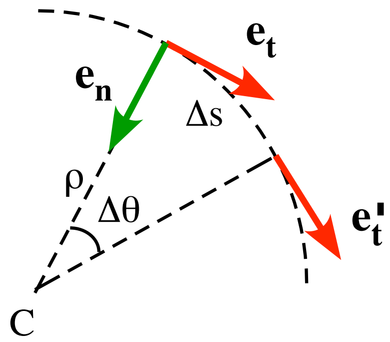
$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t}$$

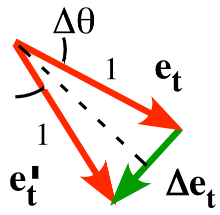


$\vec{e}_t$ = vector unitario tangente a la trayectoria en P

Para hallar la aceleración derivamos la velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$





$$\Delta e_t = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

Cuando $\Delta\theta \to 0$, $\Delta\vec{e}_t$ tiende a ser perpendicular a $\vec{e}_t$, es decir, en dirección $\vec{e}_n$

La variación de su módulo con el ángulo tiende a 1:

$$\frac{de_t}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta e_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\Delta\theta} = 1$$

Por tanto $$\frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \vec{e}_n$$ **vector unitario normal** en el punto de la trayectoria dirigido hacia su centro de curvatura

Y teniendo en cuenta que ds= $\rho d\theta$ y que v= $\frac{ds}{dt}$:

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{e}_n$$

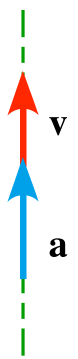
La **aceleración** en coordenadas intrínsecas se escribe como:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}$$

aceleración tangencial $a_t = \frac{dv}{dt}$

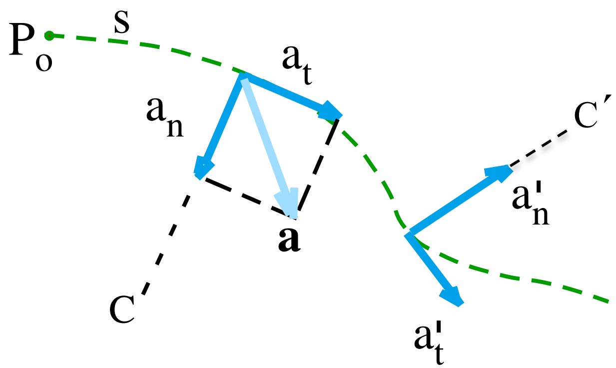
aceleración normal $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ ρ: **radio de curvatura** de la trayectoria en P

La aceleración normal siempre va dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria en el punto. Los versores normal y tangente, así como el radio de curvatura dependen del punto de la trayectoria.

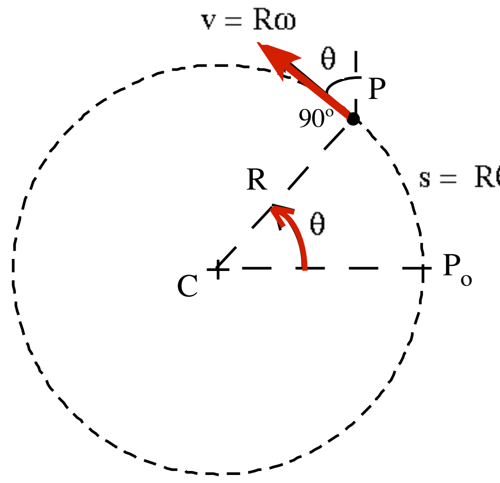


En una trayectoria rectilínea

$\rho = \infty$ y no hay a_n



Movimiento con trayectoria circular



Longitud de arco recorrida en función del ángulo en radianes:

$$s = R\theta$$

Velocidad:

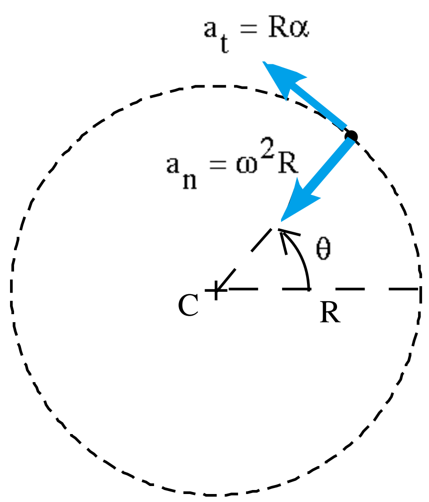
$$\vec{v} = v\,\vec{e}_t \qquad v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$ **velocidad angular en el movimiento circular** (rad/s)

Aceleración:

$$\vec{a} = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n$$

tangencial: $a_t = \dfrac{dv}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\alpha$ normal: $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = R\omega^2$



$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$ **aceleración angular en el movimiento circular** (rad/s^2)

- **Movimiento circular uniformemente acelerado** $\alpha = cte \rightarrow a_t = cte$

$$a_n = R\omega^2 \neq cte$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \rightarrow \boxed{\omega = \omega_o + \alpha t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \boxed{\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

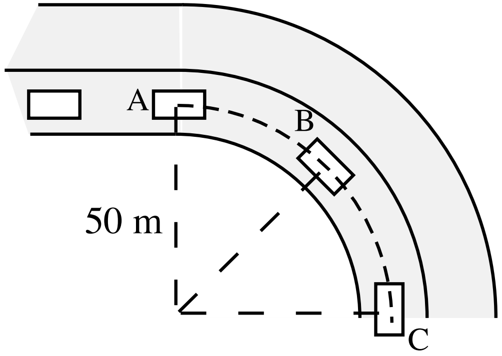
$$\boxed{\omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha\left(\theta - \theta_o\right)}$$

Multiplicando por R se encuentra la longitud recorrida y la velocidad del punto:

$$\boxed{v = v_o + a_t t} \qquad \boxed{s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}a_t t^2} \qquad \boxed{v^2 - v_o^2 = 2a_t\left(s - s_o\right)}$$

- **Movimiento circular uniforme:** $\alpha = 0 \rightarrow \omega = \omega_o = cte \rightarrow v = R\omega = cte$

$$a_t = 0 \qquad a_n = R\omega^2 = cte$$

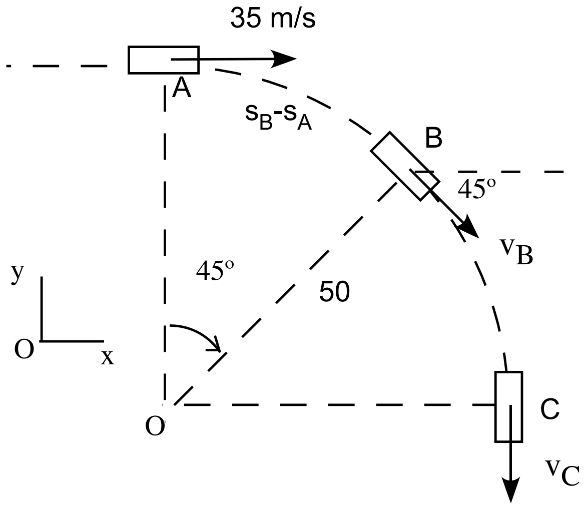


Ejemplo: El coche de la figura va a una velocidad constante de 126 km/h cuando llega a una curva circular de 50 m de radio. Empieza a decelerar en A, a un ritmo de 9 km/h cada segundo.
Hallar velocidad y aceleración en la mitad y al final de la curva.

$$1\ \mathrm{km/h} = \frac{10^3\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = \frac{1}{3.6}\ \mathrm{m/s}$$

$$v_A = 126\ \mathrm{km/h} = 35\ \mathrm{m/s}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -9\ \mathrm{km/h{\cdot}s} = -2.5\ \mathrm{m/s^2}$$



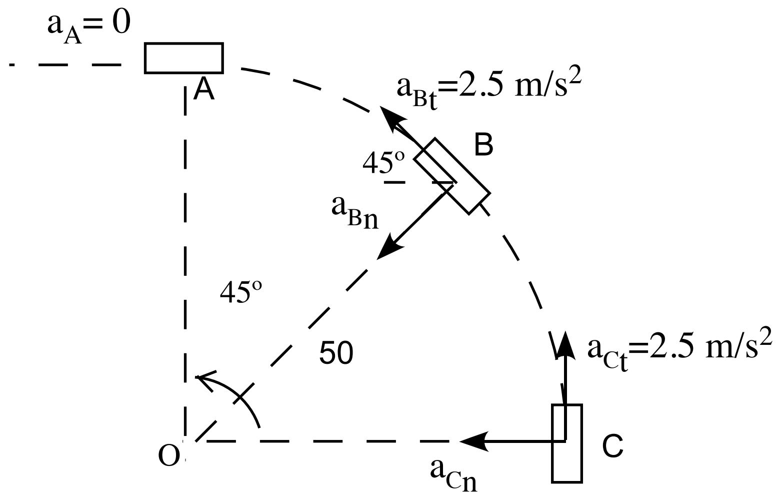
Movimiento circular uniformemente decelerado:

$$v_B^2 = v_A^2 + 2a_t \cdot (s_B - s_A) \qquad v_B^2 = 35^2 - 2 \cdot 2.5 \cdot \left(50 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow v_B = 32.07\ \mathrm{m/s} \qquad \underline{\vec{v}_B = 32.07\left(\cos 45\ \vec{i} - \mathrm{sen} 45\ \vec{j}\right)}$$

$$v_C^2 = v_A^2 + 2a_t \cdot (s_C - s_A) \qquad v_C^2 = 35^2 - 2 \cdot 2.5 \cdot \left(50 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow v_C = 28.85\ \mathrm{m/s} \qquad \underline{\vec{v}_C = -28.85\ \vec{j}}$$

Todas las **aceleraciones tangenciales** son iguales en módulo:



$$a_{Bt} = a_{Ct} = 2.5\ \text{m/s}^2$$

$$\vec{a}_{Bt} = 2.5\left(-\cos 45\,\vec{i} + \text{sen}45\,\vec{j}\right) \qquad \vec{a}_{Ct} = 2.5\,\vec{j}$$

Las componentes normales:

$$a_{Bn} = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{32.07^2}{50} = 20.57\ \text{m/s}^2 \rightarrow \vec{a}_{Bn} = 20.57\left(-\text{sen}45\,\vec{i} - \cos 45\,\vec{j}\right)$$

$$a_{Cn} = \frac{v_C^2}{\rho} = \frac{28.85^2}{50} = 16.65\ \text{m/s}^2 \rightarrow \vec{a}_{Cn} = -16.65\,\vec{i}$$

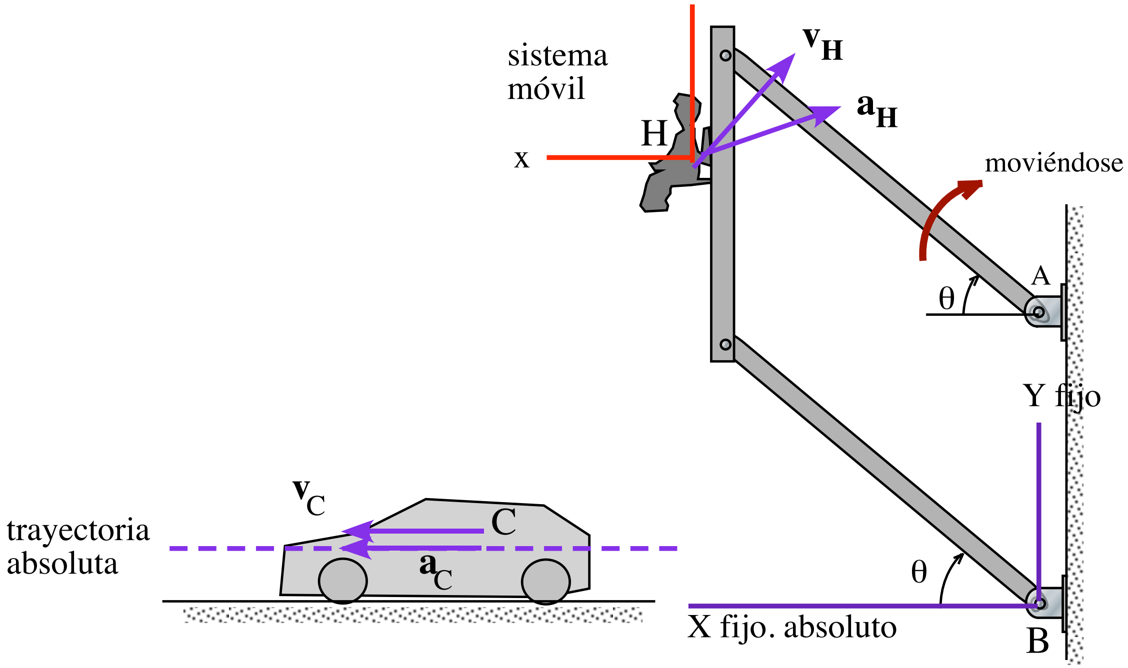
$$\underline{\vec{a}_B = 2.5\left(-\cos 45\,\vec{i} + \text{sen}45\,\vec{j}\right) + 20.57\left(-\text{sen}45\,\vec{i} - \cos 45\,\vec{j}\right)} \qquad \underline{\vec{a}_C = 2.5\,\vec{j} - 16.65\,\vec{i}}$$

Velocidades y aceleraciones angulares en B y C:

$$\omega_B = \frac{v_B}{R} = 0.64\ \text{rad/s} \qquad \omega_C = \frac{v_C}{R} = 0.577\ \text{rad/s} \quad \text{horarias}$$

$$\alpha_B = \alpha_C = \alpha = \frac{a_t}{R} = 0.05\ \text{rad / s}^2 \quad \text{antihoraria}$$

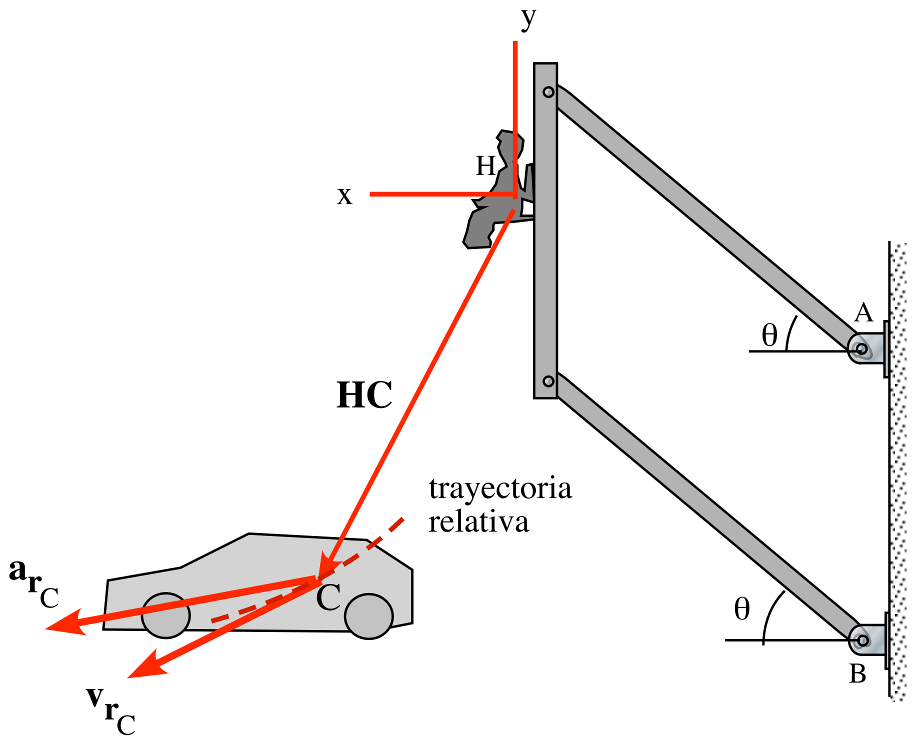
En ocasiones, es conveniente utilizar más de un sistema de referencia para describir el movimiento de un punto, en particular algún sistema móvil.



Movimiento **absoluto de los puntos H y C**: visto desde un sistema fijo (ejes fijos en B)

$$\vec{v}_C = \left(\frac{d\overrightarrow{BC}}{dt}\right)_{absol} \qquad \vec{a}_C = \left(\frac{d\vec{v}_C}{dt}\right)_{absol} \qquad \vec{v}_H = \left(\frac{d\overrightarrow{BH}}{dt}\right)_{absol} \qquad \vec{a}_H = \left(\frac{d\vec{v}_H}{dt}\right)_{absol}$$

El movimiento del coche (punto C) **visto por un sistema de ejes que se está moviendo** se llama **movimiento relativo de C respecto a ese sistema** que en este caso está en H.

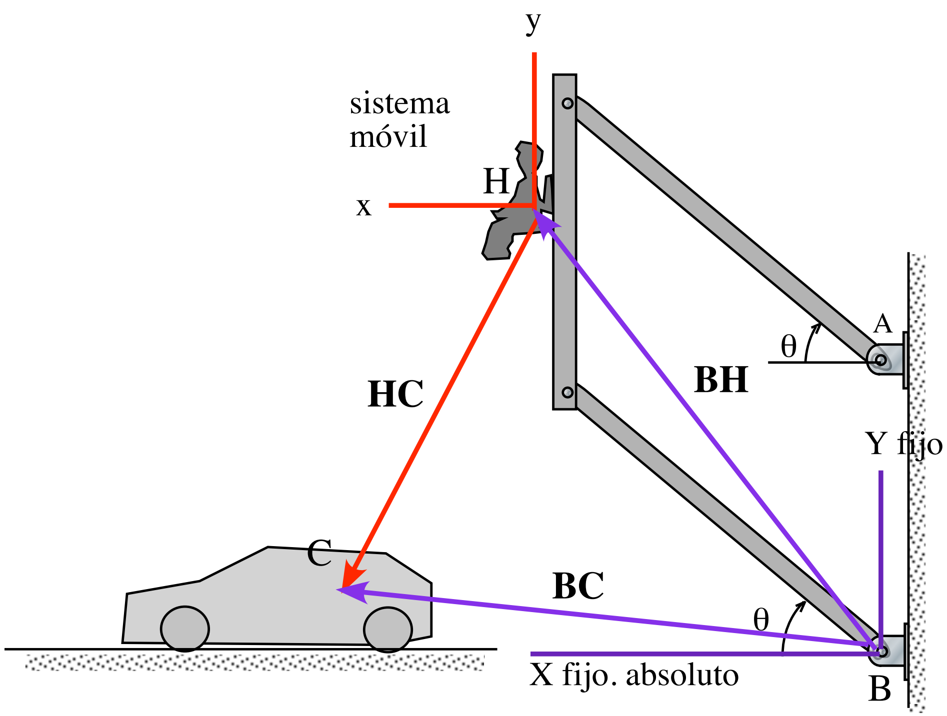


Movimiento **relativo de C visto por el sistema móvil en H:**

$$\left(\frac{d\overrightarrow{HC}}{dt}\right)_{móvil} = \vec{v}_{r_C} \quad \text{velocidad relativa de C}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}_{r_C}}{dt}\right)_{móvil} = \vec{a}_{r_C} \quad \text{aceleración relativa de C}$$

¿Relación entre ambos?

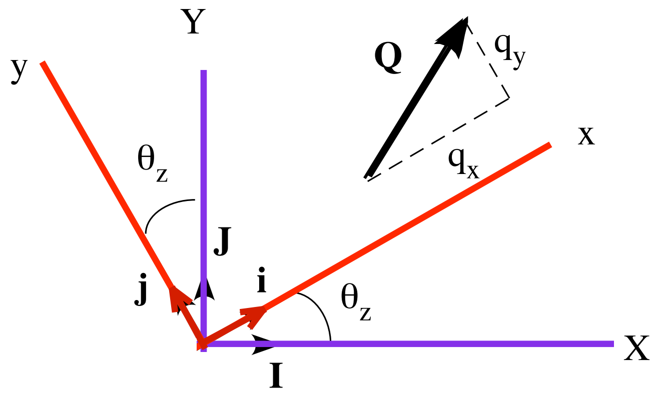


A partir de la relación entre vectores de posición:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}$$

Vector de posición relativo de C respecto a H

Movimiento relativo. Expresiones de Coriolis



Sea un sistema de ejes fijo o absoluto XYZ , con vectores unitarios **I**, **J**, **K**

Otro sistema con el mismo origen xyz está girando en torno al eje z (idéntico al Z) de forma que los vectores unitarios **i, j** describen un movimiento circular o giro en torno al eje Z (Z=z) con

$$\omega_z = \frac{d\theta_z}{dt}$$

El vector i en componentes respecto al sistema $\qquad \vec{i} = \cos\theta_z\ \vec{I} + \mathrm{sen}\theta_z\ \vec{J}$

Su variación respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = -\omega_z\ \mathrm{sen}\theta_z\ \vec{I} + \omega_z \cos\theta_z\ \vec{J} = \omega_z \vec{k} \wedge \vec{i}$$

Si el giro es en torno a un eje cualquiera con velocidad angular $\vec{\omega}$: $\qquad \dfrac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$

Consideremos ahora un vector cualquiera **Q** expresado en el sistema móvil:

$$\vec{Q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k} \qquad (q_x\,,\ q_y\,,\ q_z \text{ en general, variables en el tiempo})$$

La variación de **Q** con el tiempo:

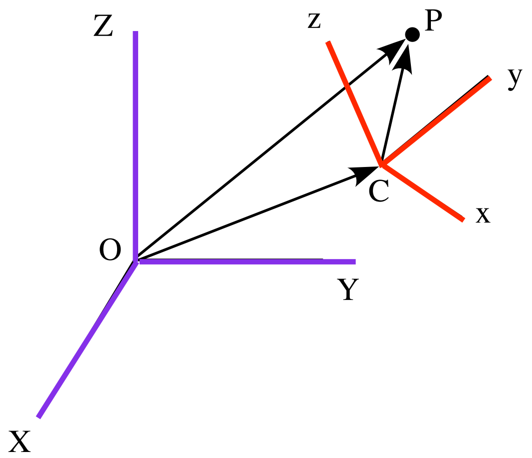
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \left[\frac{dq_x}{dt}\vec{i} + \frac{dq_y}{dt}\vec{j} + \frac{dq_z}{dt}\vec{k} \right] + \left[q_x \frac{d\vec{i}}{dt} + q_y \frac{d\vec{j}}{dt} + q_z \frac{d\vec{k}}{dt} \right]$$

El primer corchete sería la variación de Q **vista desde el sistema móvil**, ya que para él los i,j,k estarían fijos: es la **derivada relativa**

El segundo término: $q_x \vec{\omega} \wedge \vec{i} + q_y \vec{\omega} \wedge \vec{j} + q_z \vec{\omega} \wedge \vec{k} = \vec{\omega} \wedge \left(q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k} \right) = \vec{\omega} \wedge \vec{Q}$

$$\left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{abs} = \left[\frac{d\vec{Q}}{dt} \right]_{rel} + \vec{\omega} \wedge \vec{Q}$$

Vamos a ver como se relacionan las velocidades y aceleraciones de una masa puntual observadas respecto a un sistema fijo OXYZ y otro móvil Cxyz que gira con $\vec{\omega}$



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$

$$\vec{v}_P = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{CP}}{dt} = \vec{v}_C + \left[\frac{d\overrightarrow{CP}}{dt}\right]_{rel} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} =$$

$$= \vec{v}_{r_P} + \left(\vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}\right) = \vec{v}_{r_P} + \vec{v}_{a_P}$$

$$\vec{a}_P = \left[\frac{d\vec{v}_{r_P}}{dt}\right]_{rel} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{r_P} + \frac{d\vec{v}_C}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{CP} + \vec{\omega} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{CP}}{dt}\right]_{rel} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}\right) =$$

$$= \vec{a}_{r_P} + \left[\vec{a}_C + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CP} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}\right)\right] + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{r_P}$$

En donde se ha introducido la **aceleración angular del sistema móvil**: $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

Resumiendo: las expresiones de Coriolis que relacionan velocidades y aceleraciones relativas y absolutas de un punto P son

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{r_P} + \vec{v}_{a_P} \begin{cases} \vec{v}_{r_P} & \text{velocidad relativa de P, la vista por el sistema móvil} \\ \vec{v}_{a_P} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} & \text{velocidad de arrastre} \end{cases}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{r_P} + \vec{a}_{a_P} + \vec{a}_{cor_P} \begin{cases} \vec{a}_{r_P} & \text{relativa de P vista desde el sistema móvil} \\ \vec{a}_{a_P} = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CP} + \underline{\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}\right)} & \text{de arrastre} \\ \vec{a}_{cor_P} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{r_P} & \text{de coriolis} \end{cases}$$

Los términos de arrastre dependen de las características del movimiento del sistema móvil $\vec{v}_C$, $\vec{a}_C$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$.

En problemas planos $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$ y $\vec{\alpha} = \alpha\,\vec{k}$ (y resto de vectores con componentes xy) :

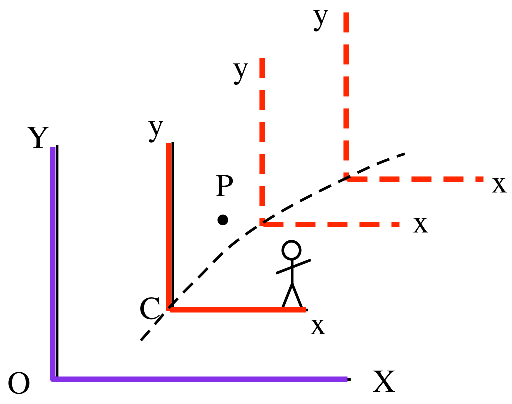
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{r_P} + \vec{v}_{a_P} \begin{cases} \vec{v}_{r_P} & \text{velocidad relativa de P, la vista por el sistema móvil} \\ \vec{v}_{a_P} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} & \text{velocidad de arrastre} \end{cases}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{r_P} + \vec{a}_{a_P} + \vec{a}_{cor_P} \begin{cases} \vec{a}_{r_P} & \text{relativa de P vista desde el sistema móvil} \\ \vec{a}_{a_P} = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CP} - \underline{\omega^2\,\overrightarrow{CP}} & \text{de arrastre} \\ \vec{a}_{cor_P} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{r_P} & \text{de coriolis} \end{cases}$$

Notar que: $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}\right) = -\omega^2\,\overrightarrow{CP}$

Los términos de arrastre dependen de las características del movimiento del sistema móvil $\vec{v}_C$, $\vec{a}_C$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$.

Sistema de referencia en traslación: Expresiones simples de Coriolis



El observador móvil se mueve como los ejes rojos

Los ejes no cambian de orientación $\vec{\omega} = \vec{0} \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$

De las expresiones de Coriolis:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{r_P} + \vec{v}_C \qquad \vec{a}_P = \vec{a}_{r_P} + \vec{a}_C$$

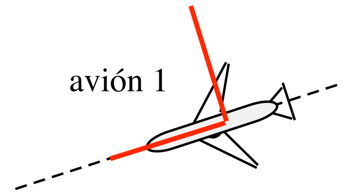
(Todos los puntos del sistema móvil se mueven igual)

- **Si la traslación es rectilínea y uniforme:** $\vec{a}_C = \vec{0}$

$\vec{a}_P = \vec{a}_{r_P}$ Misma aceleración vista por ambos sistemas

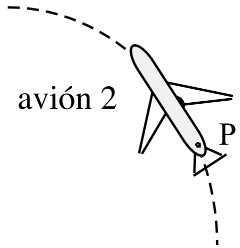
Las leyes de Newton son las mismas en los sistemas absolutos o en los que se trasladan con movimiento rectilíneo uniforme.

Es adecuado considerar unos ejes que se trasladan cuando:



- El observador en movimiento (ejes rojos) se está trasladando

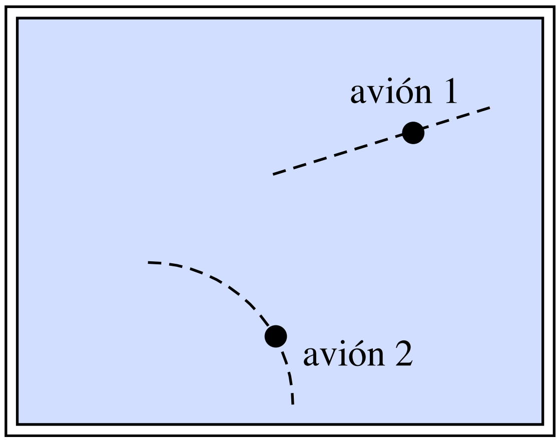
La velocidad y aceleración de un punto, P, del avión 2:



$$\vec{v}_P = \vec{v}_{r_P} + \vec{v}_1$$

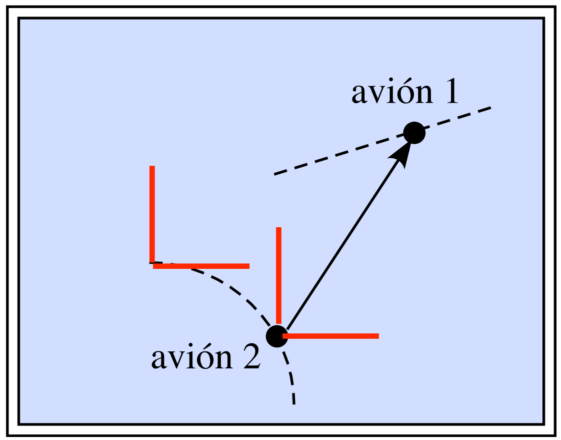
$$\vec{a}_P = \vec{a}_{r_P} + \vec{a}_1$$

- Cuando el cambio de orientación no interesa, el objeto se reduce a un punto representando su posición. Se puede elegir un observador móvil ligado al punto del avión 2 con unos ejes en traslación curvilínea.

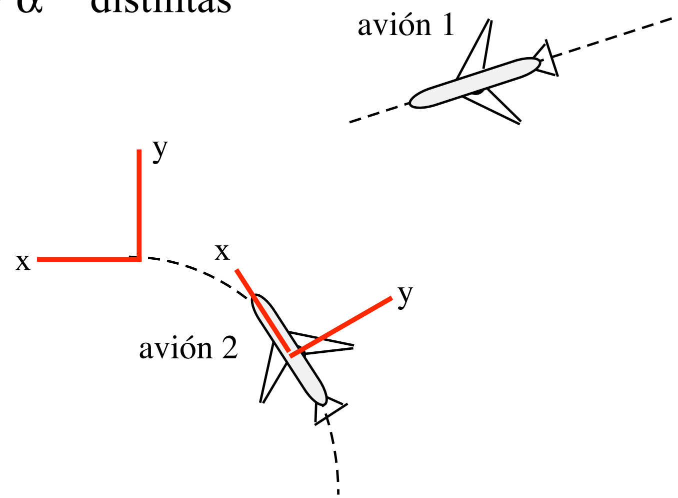


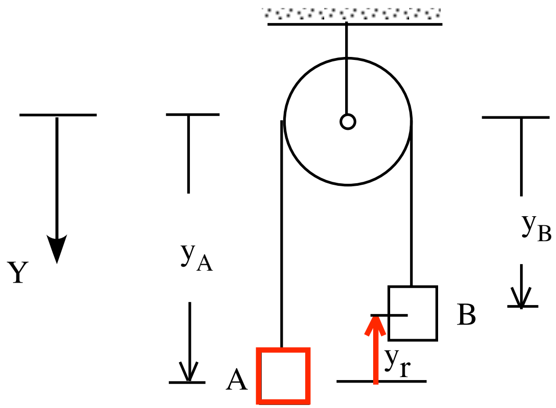
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{r_1} + \vec{v}_2$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_{r_1} + \vec{a}_2$$



• En cambio, si se pregunta por el movimiento de un punto del avión 1 visto por el piloto del avión 2, hay que considerar un sistema móvil que cambia de orientación (gira) porque esta describiendo una curva y hay que utilizar las expresiones completas de Coriolis con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ distintas de 0





Ejemplo:

El bloque A desciende con velocidad de 0.1 m/s, y aceleración de 1 m/s^2 en el mismo sentido.

Calcular v_B y a_B absolutas, así como las que vería un observador situado en A

la longitud del hilo que cuelga es constante:

$$y_A + y_B = L \rightarrow y_B = L - y_A$$

Derivando : $v_B = -v_A \qquad a_B = -a_A$

Si $\vec{v}_A = 0.1\vec{j} \rightarrow \vec{v}_B = -0.1\vec{j} \qquad \vec{a}_A = \vec{j} \rightarrow \vec{v}_B = -\vec{j}$

Absolutas, ya que y_A e y_B son coordenadas absolutas

Respecto a un sistema ligado a A (en traslación):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{r_B} + \vec{v}_A \rightarrow \vec{v}_{r_B} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = -0.2\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{r_B} + \vec{a}_A \rightarrow \vec{a}_{r_B} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = -2\vec{j}$$

O bien se puede encontrar también derivando respecto al tiempo el vector de posición relativo de B respecto a A (-y_r**j**):

$$\overrightarrow{AB} = \text{cte}\,\vec{i} - y_r\,\vec{j} \qquad y_r = y_A - y_B \qquad \dot{y}_r = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 0.2 \qquad \ddot{y}_r = a_A - a_B = 2$$

$$\vec{v}_{r_B} = -\dot{y}_r\,\vec{j} = -0.2\,\vec{j} \qquad \vec{a}_{r_B} = -\ddot{y}_r\,\vec{j} = -2\,\vec{j}$$