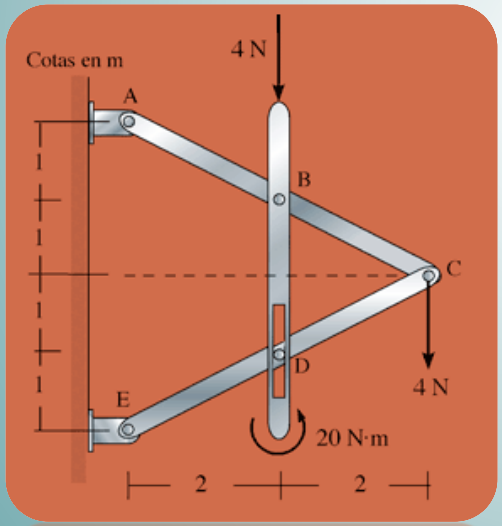
Mecánica

Tema 08. Cinemática del sólido rígido.



Cecilia Pardo Sanjurjo

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

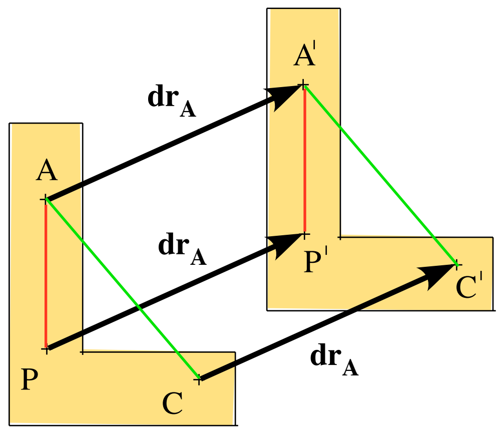
CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Los movimientos han de conservar las distancias entre los puntos

CINEMÁTICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Los movimientos han de conservar las distancias entre los puntos

1) Traslación: todos los puntos se mueven igual



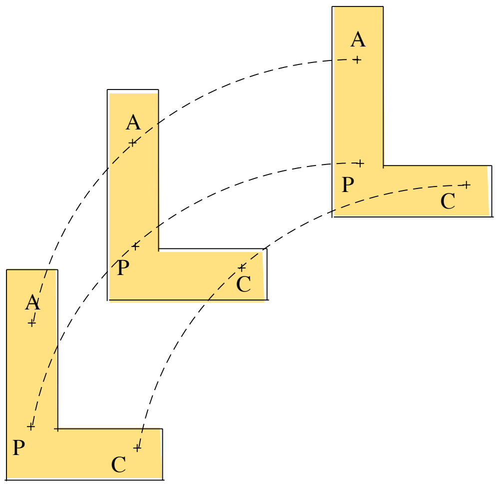
$$d\vec{r}_P = d\vec{r}_A \quad \forall P$$

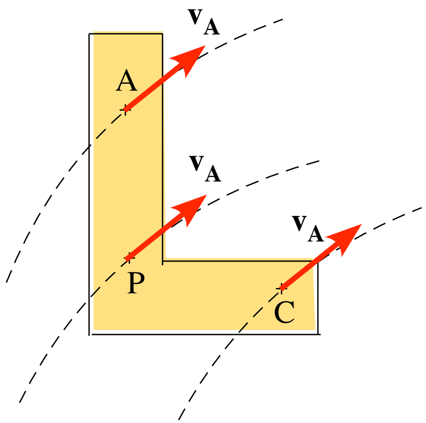
No hay cambio de orientación
(cualquier segmento se mantiene paralelo)

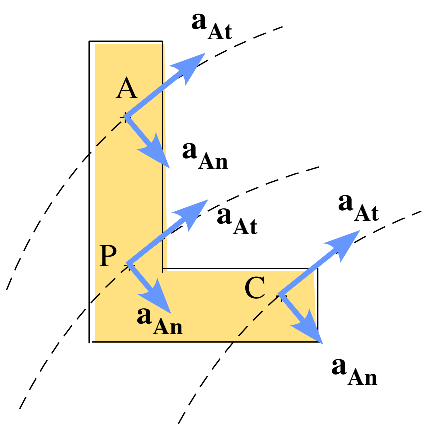
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A \qquad \vec{a}_P = \vec{a}_A$$

Todos los puntos hacen la misma trayectoria
que puede ser rectilínea o curvilínea

Traslación curvilínea:





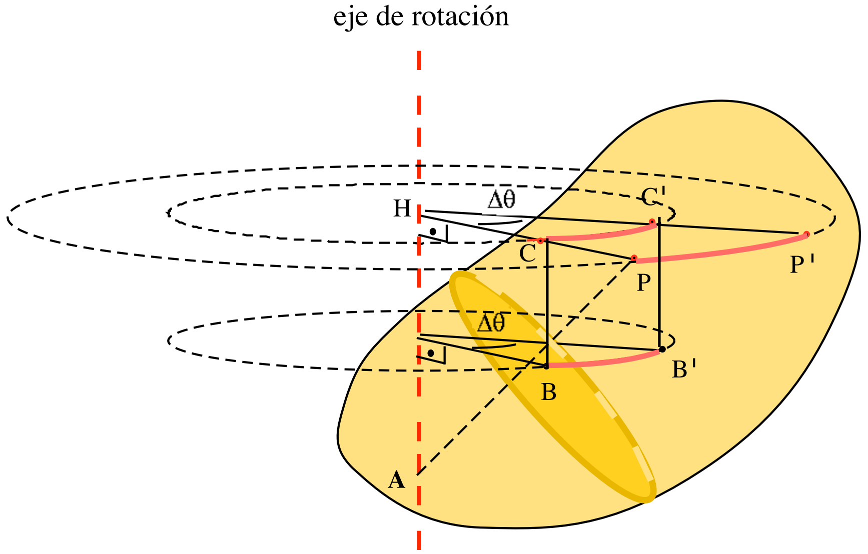


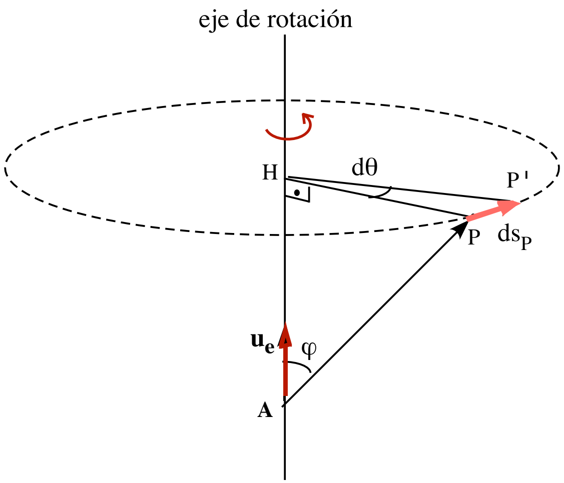
Las velocidades tangentes a las trayectorias

Aceleración con componente normal y tangencial.

Trayectorias iguales. Mismos radios de curvatura

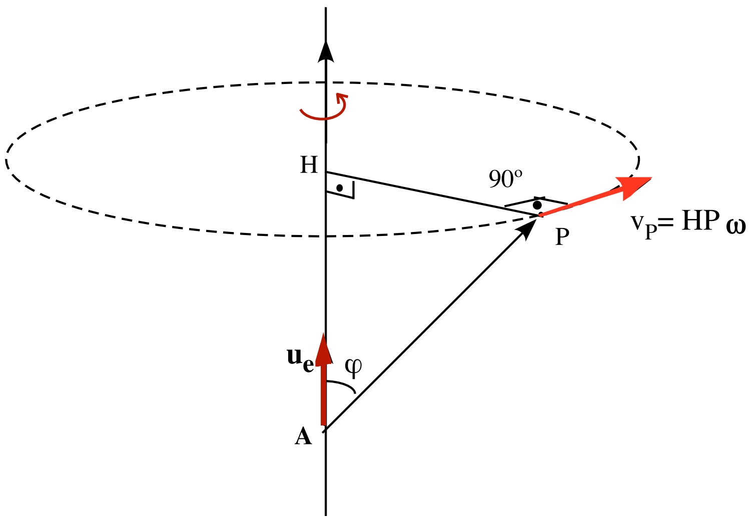
2) Rotación en torno a un eje que pasa por un punto del sólido





- Los puntos que están en el eje de rotación no se desplazan

•Los demás se mueven en **planos perpendiculares** al eje describiendo arcos de circunferencia con centro en el eje y **mismo ángulo**



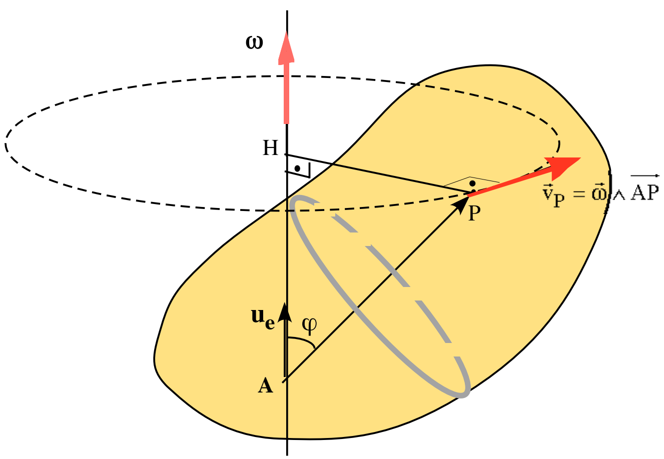
Velocidad de P en una rotación pura

P hace una trayectoria circular, su velocidad es tangente a la misma y su módulo es el radio · velocidad angular:

$$v_P = HP\omega \quad \text{siendo } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

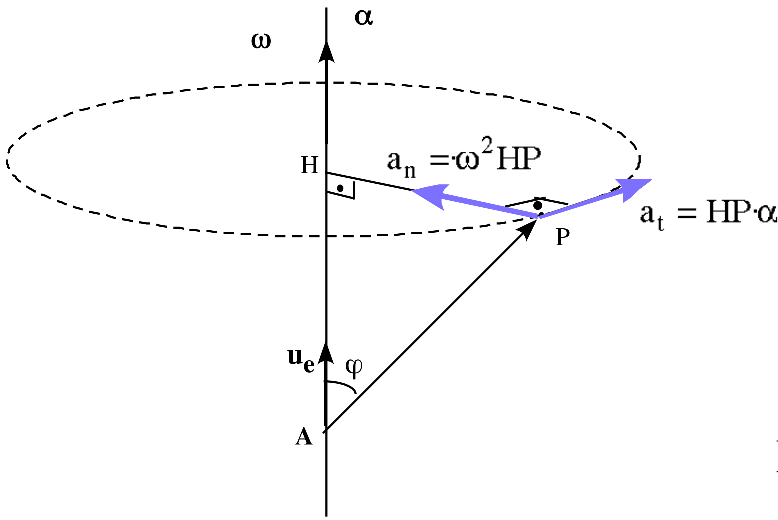
Si la velocidad se refiere al A (punto del eje de rotación): $v_P = AP \cdot \text{sen}\varphi \cdot \omega$

Y definiendo la **velocidad angular del sólido** en torno a un eje como $\vec{\omega} = \omega\, \vec{u}_e$



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

Aceleración en la rotación



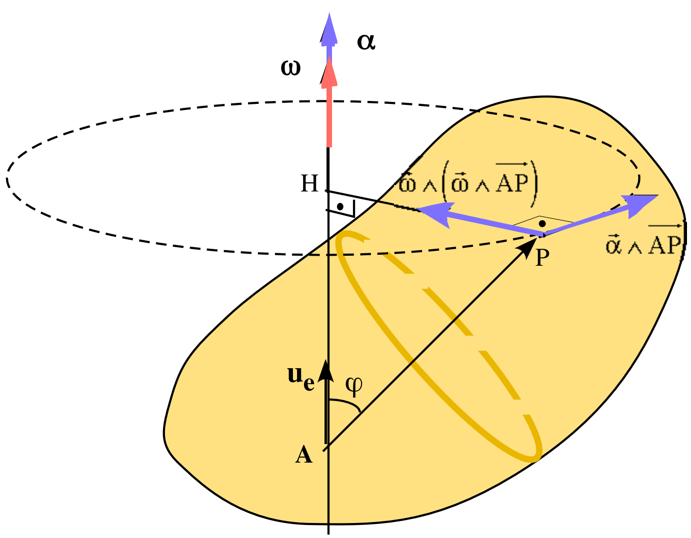
En el movimiento circular, la aceleración de P:

$a_t = HP \cdot \alpha$ $\qquad a_n = \omega^2 HP$ (dirigida hacia H)

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$ la aceleración angular del movimiento circular

Definiendo la **aceleración angular del sólido**:

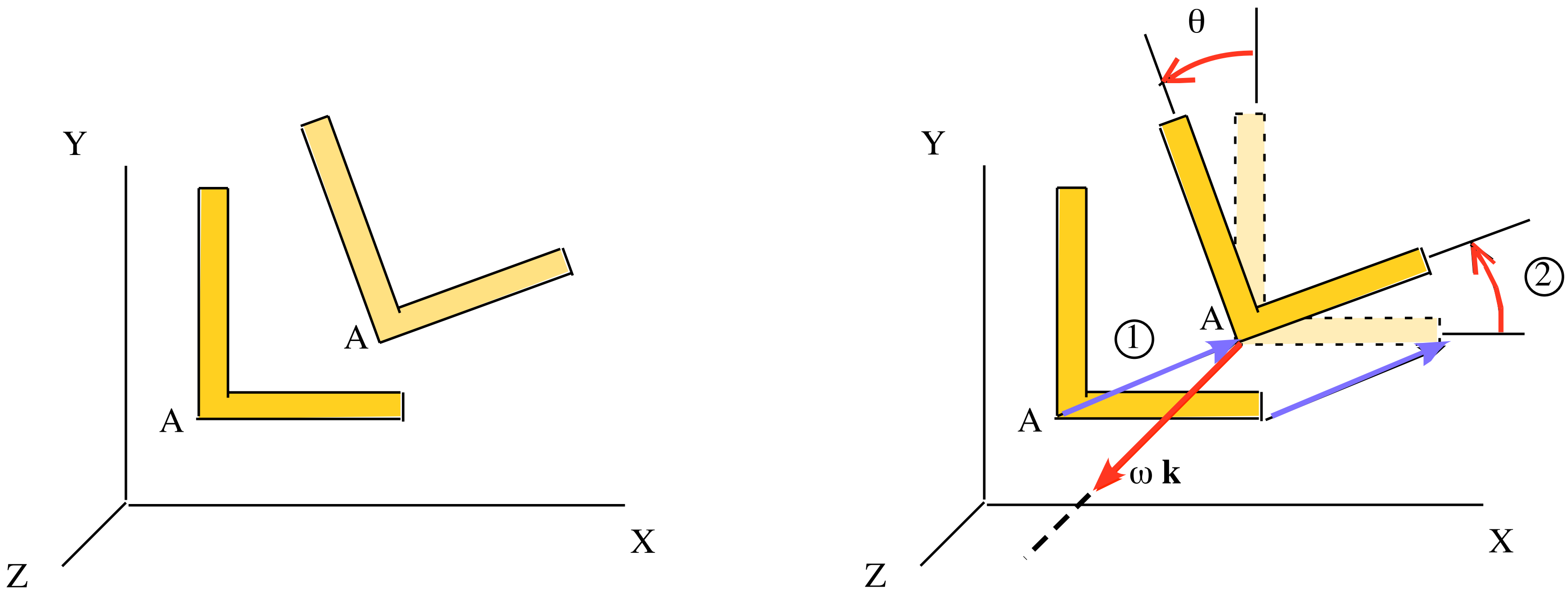
$$\vec{\alpha} = \alpha\, \vec{u}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



Y refiriendo las componentes de la aceleración al punto A (en lugar de H):

$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}\right)$$

3) Movimiento general del sólido= traslación con A+ rotación respecto a eje por A

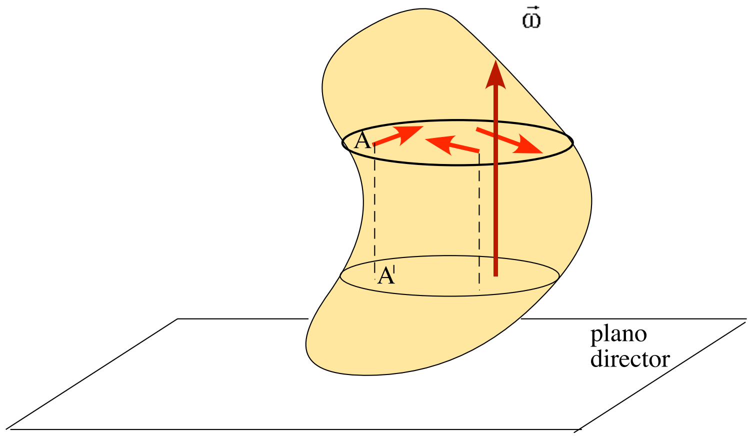


Campo de velocidades del sólido rígido: $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$

Campo de aceleraciones del sólido rígido: $\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}\right)$

Cinemática del movimiento plano del sólido rígido

Un sólido tiene un movimiento plano cuando sus puntos se mueven manteniéndose en planos paralelos a uno determinado (plano director)



Velocidades y aceleraciones están contenidas en el plano
Eje de rotación perpendicular al plano:

$$\vec{\omega}\ ,\vec{\alpha}\ \perp \text{plano}$$

Los puntos en la misma perpendicular al plano, se mueven de la misma forma:

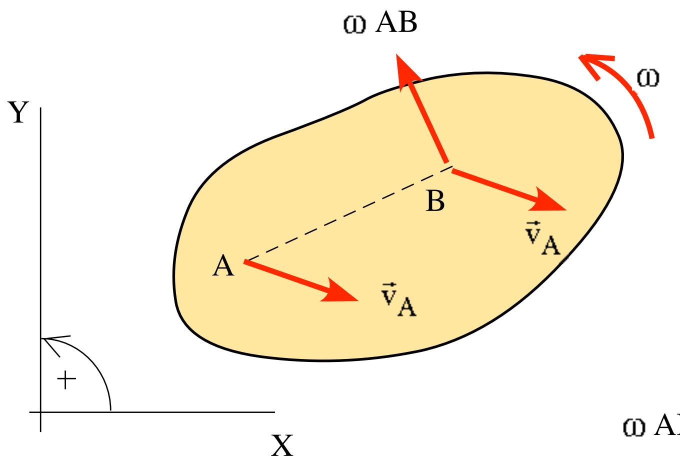
$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A'} + \cancel{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{A'A}} = \vec{v}_{A'} \qquad (\text{ya que } \vec{\omega} \parallel \overrightarrow{A'A})$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}\,'_A \text{ en cualquier instante, } \vec{a}_A = \vec{a}\,'_A$$

Basta estudiar el movimiento de un plano representativo

Si ese plano es el xy: $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$ y $\vec{\alpha} = \alpha\,\vec{k}$

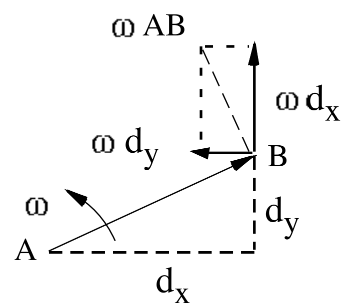
Se representan mediante un giro orientado



- **Campo de velocidades en el plano**

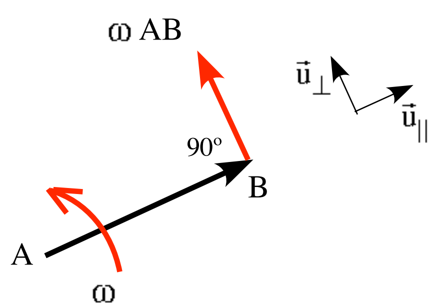
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Cálculo de $\vec{\omega} \wedge \vec{AB}$:



$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ d_x & d_y & 0 \end{vmatrix} = -\omega\, d_y\, \vec{i} + \omega\, d_x\, \vec{j}$$

O bien

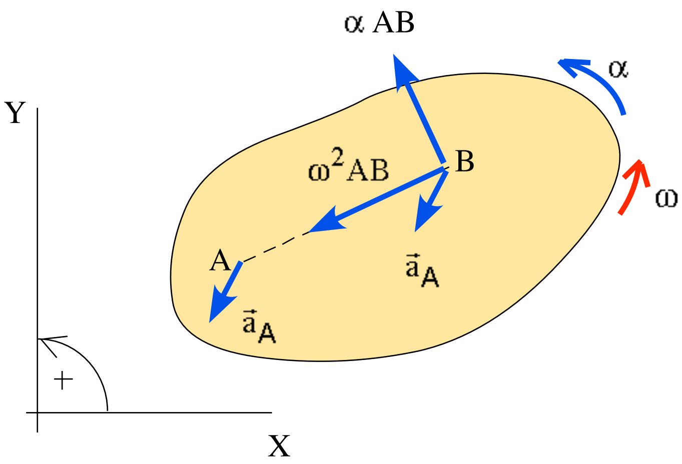


$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega AB\, \vec{u}_\perp$$

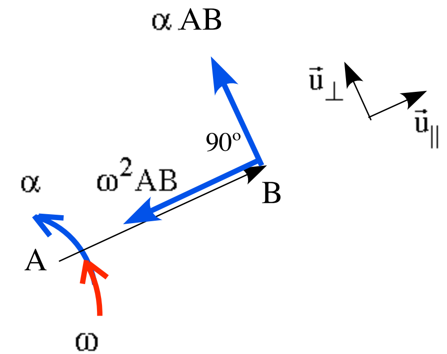
- **Campo de aceleraciones en el plano:**

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right) = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega^2\, \overrightarrow{AB}$$

Ya que $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right) = \cancel{\left(\vec{\omega}\bullet\overrightarrow{AB}\right)\vec{\omega}} - \left(\vec{\omega}\bullet\vec{\omega}\right)\overrightarrow{AB} = -\omega^2\, \overrightarrow{AB}$



Cálculo de términos de rotación:



$$\underline{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha AB\, \vec{u}_\perp - \omega^2 AB\, \vec{u}_{||}}$$

Traslación en el movimiento plano

Si hay dos puntos del sólido con la misma velocidad, $\omega = 0$

$$\text{Si } \vec{v}_A = \vec{v}_B \ , \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega AB\,\vec{u}_\perp = \vec{v}_A \rightarrow \omega = 0$$

Y todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad

Si hay dos puntos del sólido con la misma aceleración, el movimiento es de traslación: $\omega = 0 \quad \alpha = 0$

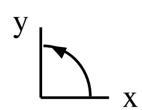
$$\text{Si } \vec{a}_A = \vec{a}_B \ , \vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha AB\,\vec{u}_\perp - \omega^2 AB\,\vec{u}_{||} = \vec{a}_A \rightarrow \vec{0} = \alpha AB\,\vec{u}_\perp - \omega^2 AB\,\vec{u}_{||} \begin{cases} ||) \ \omega = 0 \\ \perp) \ \alpha = 0 \end{cases}$$

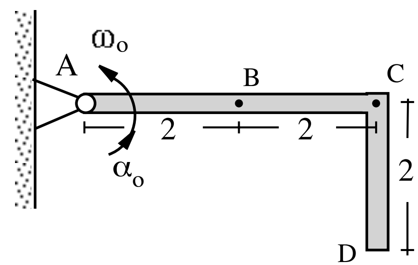
Todos los puntos tienen la misma velocidad y la misma aceleración

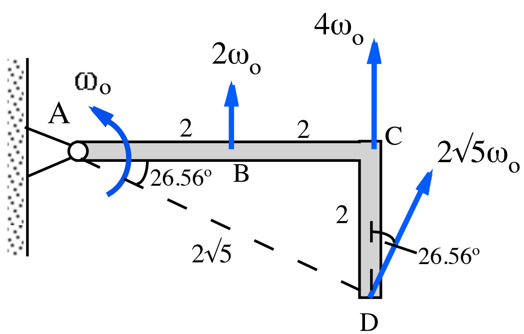
Rotación pura en el movimiento plano

Si existe un punto fijo en el sólido el movimiento es sólo de rotación y todos los puntos del sólido hacen trayectorias circulares con centro en ese punto

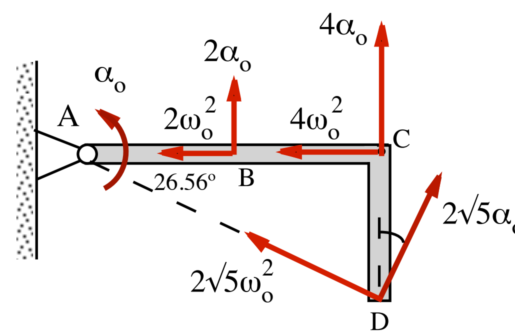
Ejemplo:







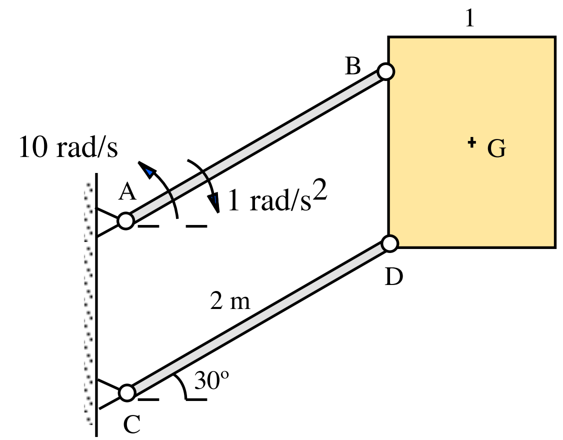
velocidades

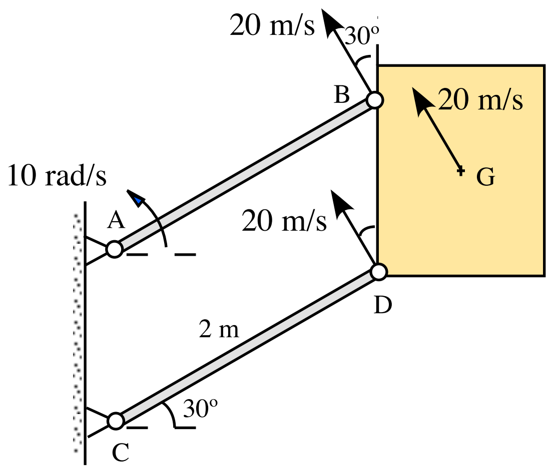


aceleraciones

Ejemplo de traslación:

Hallar la velocidad y aceleración del cdg del bloque de la figura, si el movimiento de las barras AB y CD (misma longitud y ángulo de inclinación) que lo sujetan, es conocido.





CD siempre paralela a AB $\rightarrow$ misma ω y α

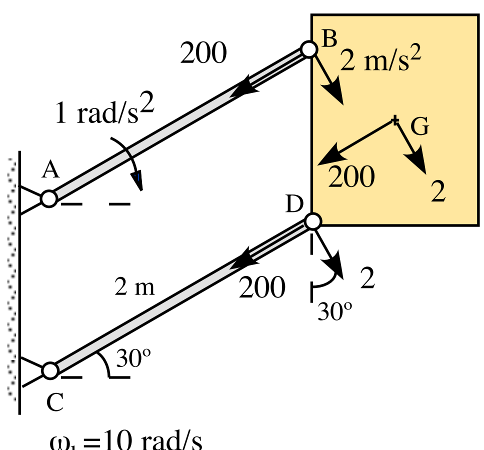
$$\vec{v}_D = \vec{v}_B \qquad \vec{a}_D = \vec{a}_B$$

$$B \in AB \rightarrow \vec{v}_B = \cancel{\vec{v}_A} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} = \omega_{AB} AB \vec{u}_\perp = 20\vec{u}_\perp$$

$$\vec{v}_B = 20\left(-\text{sen}30\,\vec{i} + \cos 30\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_A} + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{AB} = \alpha_{AB} AB \vec{u}_\perp - \omega_{AB}^2 AB \vec{u}_{||}$$

$$\vec{a}_B = -1 \cdot 2\left(-\text{sen}30\,\vec{i} + \cos 30\,\vec{j}\right) - 10^2 \cdot 2\left(-\cos 30\,\vec{i} - \text{sen}30\,\vec{j}\right)$$



Bloque:

B y D misma velocidad y aceleración $\rightarrow \omega_{bloque} = 0$; $\alpha_{bloque} = 0$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_D = \vec{v}_B \qquad \vec{a}_G = \vec{a}_D = \vec{a}_B$$

Centro instantáneo de rotación (c.i.r.)

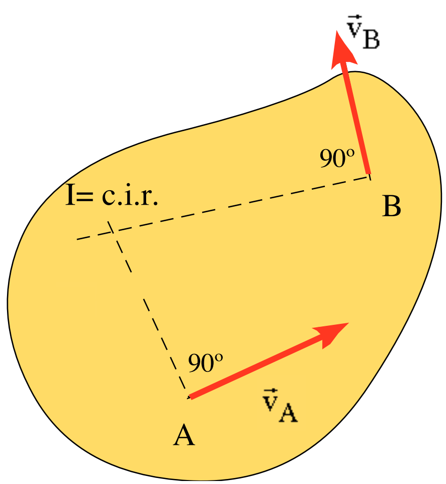
Se llama centro instantáneo de rotación (c.i.r.) a un punto, respecto al cual el movimiento del sólido es una rotación pura en ese instante: $\vec{v}_{cir} = \vec{0}$

Si el cir está en el punto I : $\vec{v}_A = \cancel{\vec{v}_I} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IA} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IA}$

$$\vec{v}_A \perp \overrightarrow{IA} \qquad v_A = \omega\ IA$$

La velocidad de cualquier punto se calcula como el producto $\omega \cdot$ distancia al cir

Determinación del cir en un instante:



• Si se conoce un punto del sólido que en ese instante tiene velocidad 0, ese es el cir

• Si se conocen las velocidades de 2 puntos del sólido, se trazan perpendiculares a las dos velocidades y el punto de corte es el cir. Ese punto puede estar dentro o fuera del cuerpo. Determinando IA o IB geométricamente:

$$v_A = \omega\ IA \ \rightarrow \ \omega = \frac{v_A}{IA}$$

El sentido de la rotación coherente con la v conocida

Centro instantáneo de rotación (c.i.r.)

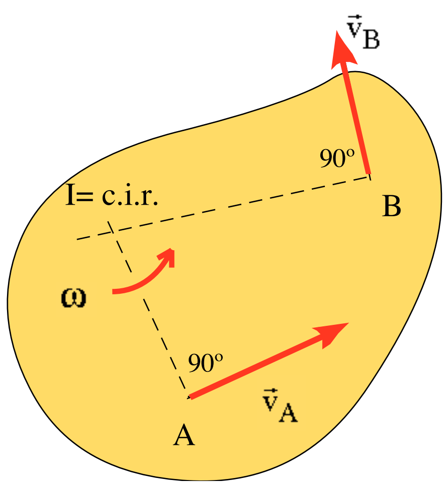
Se llama centro instantáneo de rotación (c.i.r.) a un punto, respecto al cual el movimiento del sólido es una rotación pura en ese instante: $\vec{v}_{cir} = \vec{0}$

Si el cir está en el punto I : $\vec{v}_A = \cancel{\vec{v}_I} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IA} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IA}$

$$\vec{v}_A \perp \overrightarrow{IA} \qquad v_A = \omega\ IA$$

La velocidad de cualquier punto se calcula como el producto $\omega \cdot$ distancia al cir

Determinación del cir en un instante:



• Si se conoce un punto del sólido que en ese instante tiene velocidad 0, ese es el cir

• Si se conocen las velocidades de 2 puntos del sólido, se trazan perpendiculares a las dos velocidades y el punto de corte es el cir. Ese punto puede estar dentro o fuera del cuerpo. Determinando IA o IB geométricamente:

$$v_A = \omega\ IA \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{v_A}{IA}$$

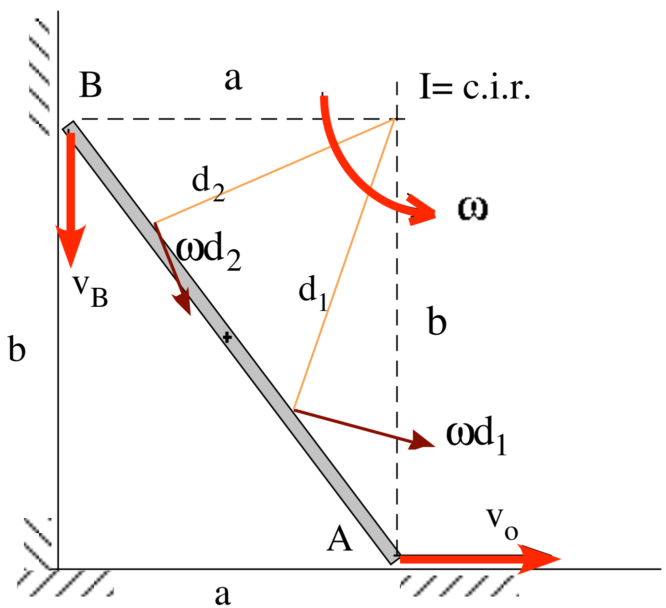
El sentido de la rotación coherente con la v conocida

•El cir está asociado a un sólido. Permite visualizar de forma inmediata las velocidades del sólido

•**La aceleración del cir no es cero** (en general)

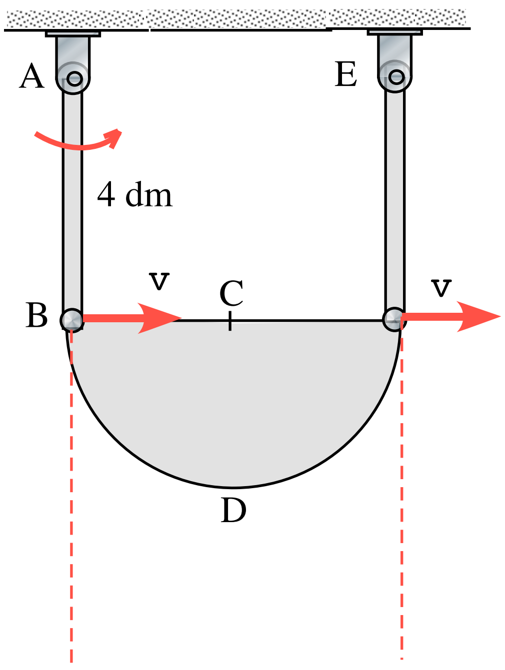
Ejemplo: Una barra se mueve con sus extremos apoyados en suelo y pared. El extremo A tiene una velocidad conocida, v_o. Hallar la velocidad angular de la barra y la velocidad de B

La velocidad de B es vertical. Trazando perpendiculares a v_B y a v_A localizamos el cir



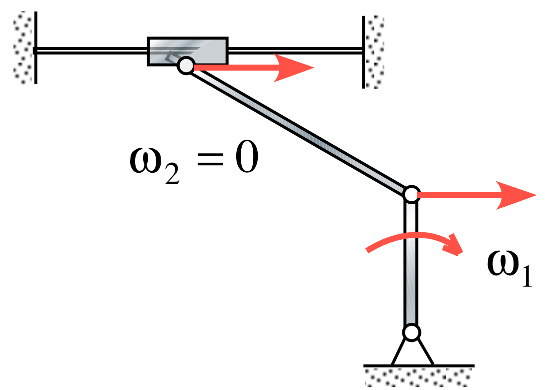
$$v_o = \omega\ IA = \omega\ b \;\rightarrow\; \omega = \frac{v_o}{b}$$

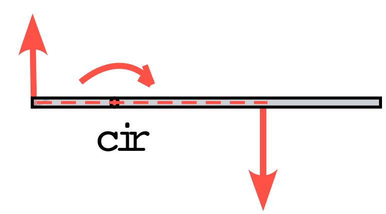
$$v_B = \omega\ IB = \frac{v_o}{b} a$$



cir en el infinito

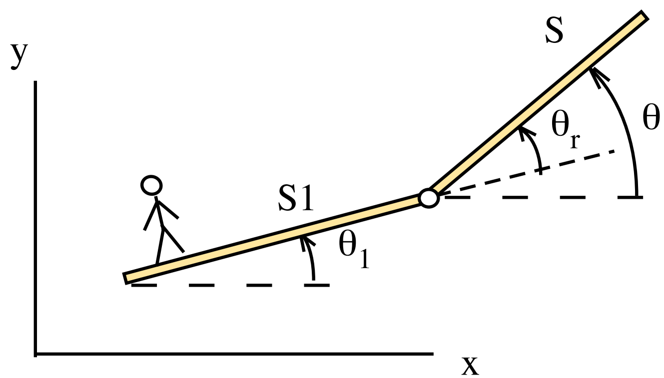
$\omega = 0$





Sistemas de referencia móviles:

Algunas veces el movimiento del sólido será más fácil de analizar para un observador en movimiento.



Observador moviéndose con $\vec{\omega}_a$ y $\vec{\alpha}_a$

Ve al sólido S moverse con $\vec{\omega}_r$ y $\vec{\alpha}_r$

¿Relación con $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ absolutas del sólido?

$$\vec{\omega}_1 = \frac{d\theta_1}{dt}\vec{k} = \vec{\omega}_a \qquad \vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k} \equiv \vec{\omega}_{abs} \text{ de S}$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_r \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_r}{dt} \rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a}$$

Derivando respecto al tiempo: $\boxed{\vec{\alpha}_{abs} = \vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_a}$

[En el espacio esta última es distinta: $\vec{\alpha}_{abs} = \vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_a + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r$]

De momento nuestras herramientas se reducen a

$A,B \in$ Sólido $\qquad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} - \omega^2 \overrightarrow{AB}$$

Conociendo v y a de un punto del sólido, así como $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ podemos saber velocidad y aceleración de cualquier otro punto.

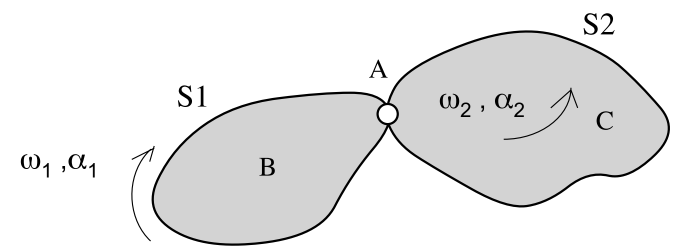
A veces no se dispone de toda esa información o bien hay varios sólidos que están unidos entre sí y sus movimientos están relacionados.

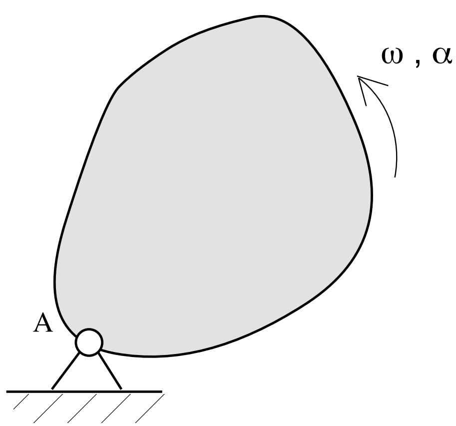
La relación en los movimientos llega a través de los puntos de enlace o contacto. Vamos a ver como se analizan

Sólidos en contacto: enlaces

Los enlaces suponen restricciones al movimiento de algunos puntos de los sólidos

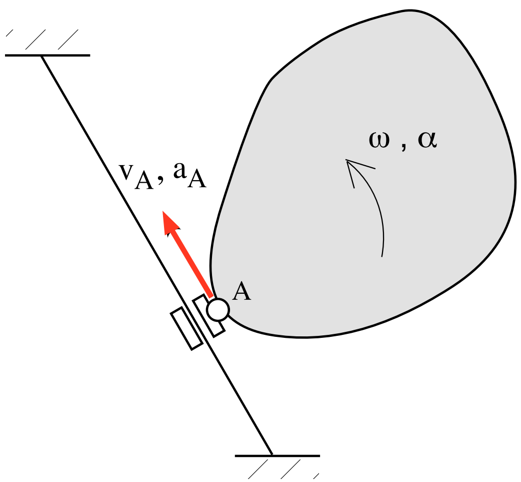
Articulación: punto común a dos sólidos que no impide la rotación de uno respecto al otro. Es un punto que se puede usar con los campos de velocidades y aceleraciones de ambos sólidos, para relacionarlos.

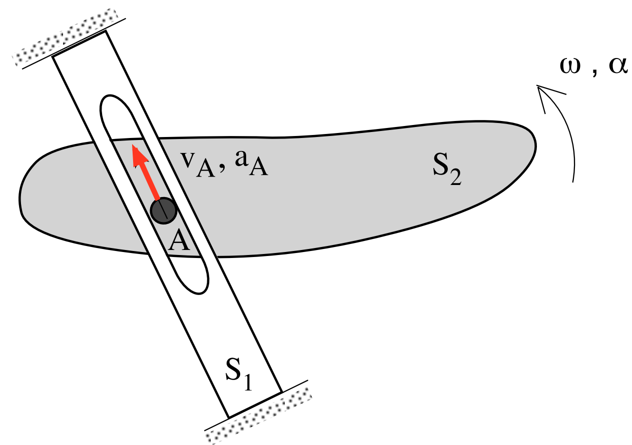


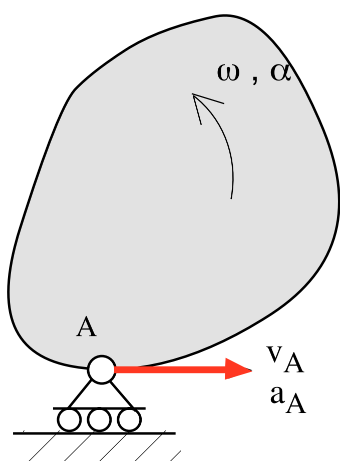


Articulación a punto fijo:
Ese punto tiene $v_A=0$ y $a_A=0$

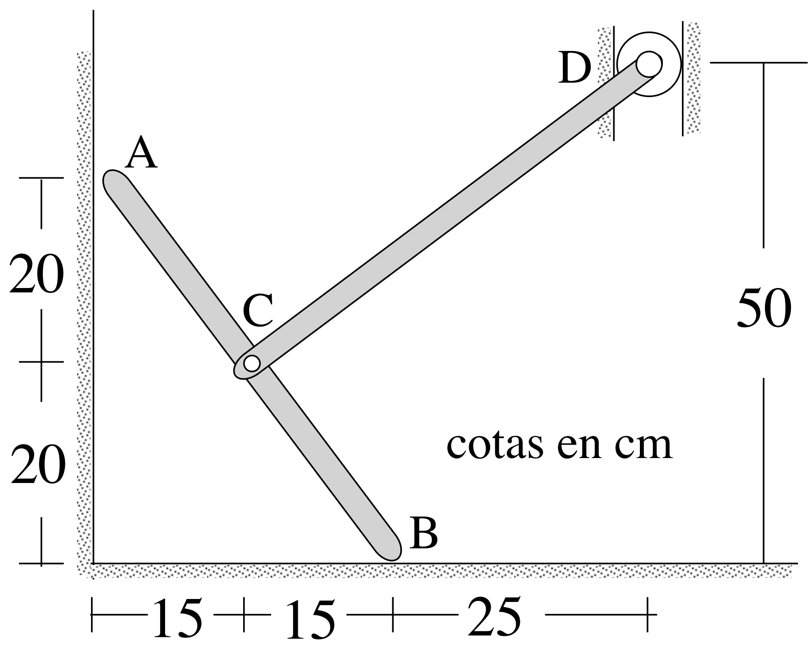
Deslizadera, ranura y apoyo simple : el punto A se mueve a lo largo del eje de la deslizadera, de la ranura o en la dirección del suelo del apoyo





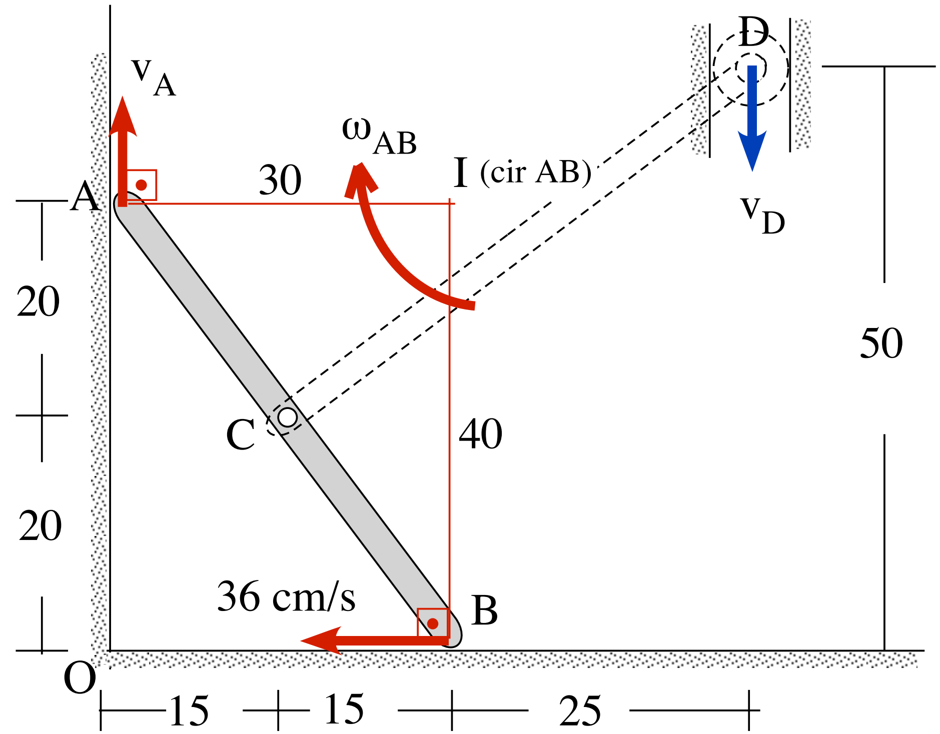


67) Dos barras de 50 cm de longitud están conectadas como se muestra. Si B se mueve con velocidad constante de 36 cm/s hacia la pared, determinar en el instante mostrado, a) las velocidades angulares de cada barra y la velocidad del pasador D b) las aceleraciones angulares de las barras c) indicar donde se encuentra el cir de cada barra.



En velocidades:

Situamos el cir de la barra AB trazando perpendiculares a las velocidades de A y B

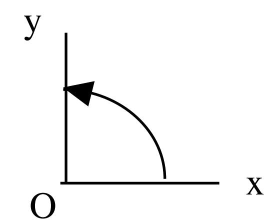


Respecto al cir (I), las velocidades de A y B:

$$v_B = IB \cdot \omega_{AB} \;\rightarrow\; \omega_{AB} = \frac{36}{40} = 0.9 \text{ rad/s}$$

$$\vec{\omega}_{AB} = -\,0.9\,\vec{k}$$

$$v_A = IA \cdot \omega_{AB} = 30 \cdot 0.9 = 27 \text{ cm/s} \qquad \vec{v}_A = 27\,\vec{j}$$

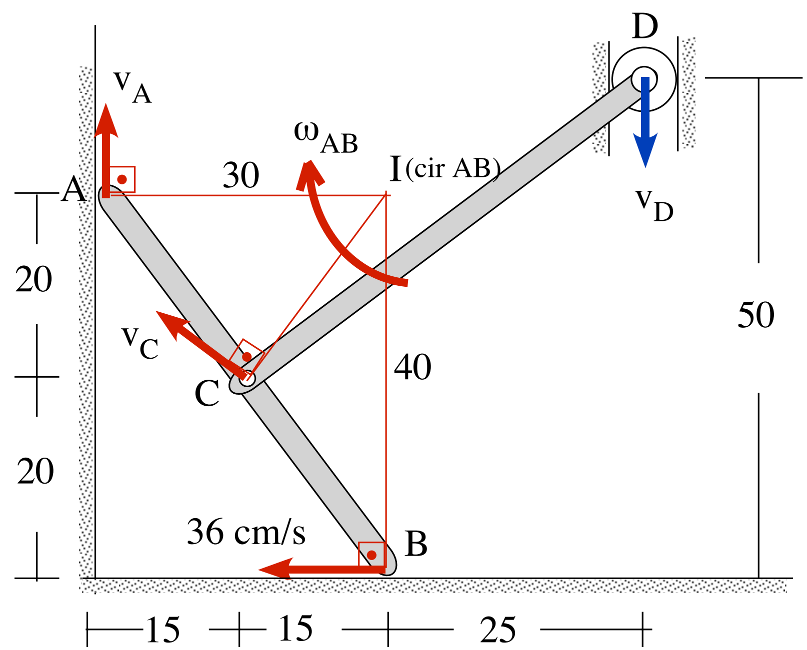


Como C es el punto medio de la barra:

$$\vec{v}_C = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_B + \vec{v}_A\right) = \frac{1}{2}\left(-36\,\vec{i} + 27\,\vec{j}\right) = -18\,\vec{i} + 13.5\,\vec{j}$$

Campo de velocidades en la barra CD:

Supongo que D se mueve hacia abajo y que la barra CD gira en sentido horario, como la AB.



$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{CD} \wedge \overrightarrow{CD}$$

$$-v_D \vec{j} = \left(-18\vec{i} + 13.5\vec{j}\right) + \left(-\omega_{CD}\vec{k}\right) \wedge \left(40\vec{i} + 30\vec{j}\right)$$

x) $0 = -18 + 30\ \omega_{CD}$ $\qquad$ $\underline{\omega_{CD} = 0.6 \text{ rad/s}}$

y) $-v_D = 13.5 - 40\ \omega_{CD}$ $\qquad$ $\underline{v_D = 10.5 \text{ cm/s}}$

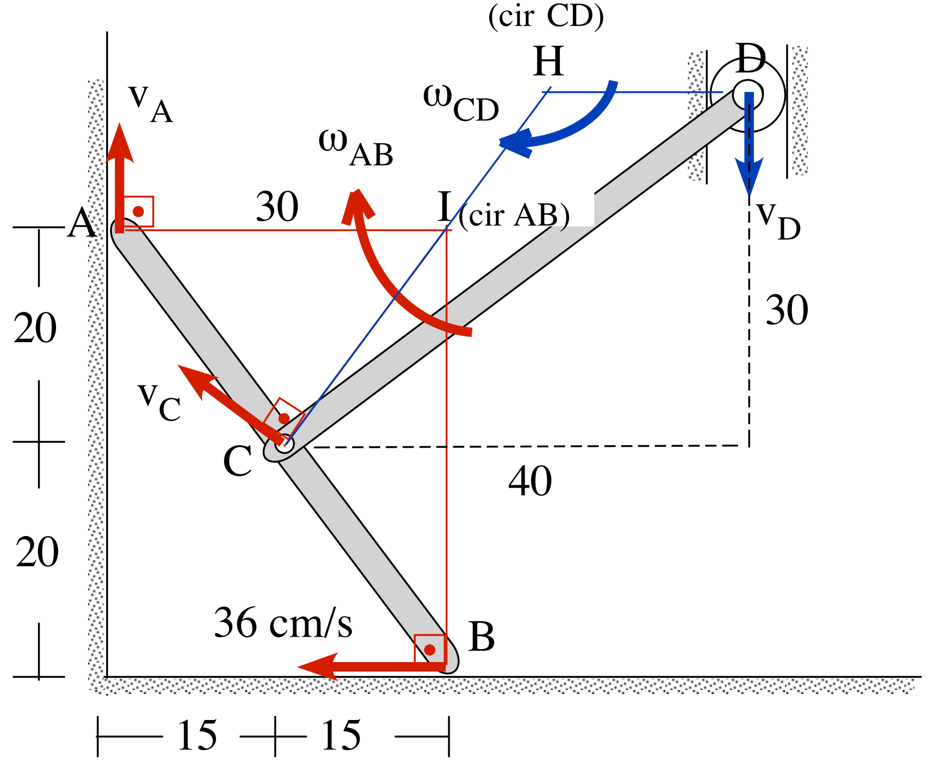
c) Situamos el cir de la otra barra a partir de la velocidad de C y de D (vertical)

H es el cir de la barra CD

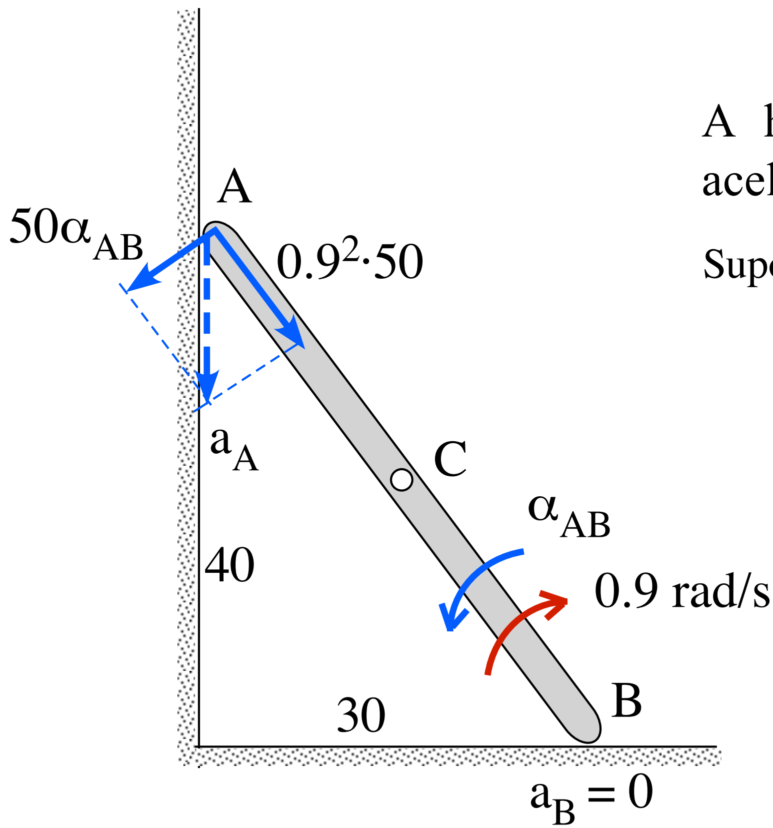
$$v_D = HD\,\omega_{CD}$$

$$HD = \frac{v_D}{\omega_{CD}} = \frac{10.5}{0.6} = 17.5 \text{ cm}$$

H está a 50 cm de altura y a 37.5 cm de la pared vertical



Aceleraciones:



- Campo de aceleraciones en la barra AB:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{BA} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{BA}$$

A hace un movimiento rectilíneo vertical, su aceleración es vertical.

Supongo $\vec{a}_A = a_A \vec{j} \quad \vec{\alpha}_{AB} = \alpha_{AB} \vec{k}$

$$a_A \vec{j} = -40\alpha_{AB} \vec{i} - 30\alpha_{AB} \vec{j} + 0.9^2 \left(30\vec{i} - 40\vec{j}\right)$$

$$x)\ 0 = -40\alpha_{AB} + 24.3 \ \rightarrow \ \alpha_{AB} = 0.6075 \text{ rad/s}^2$$

$$y)\ a_A = -30\alpha_{AB} - 32.4 \ \rightarrow \ a_A = -50.625 \text{ cm/s}^2$$

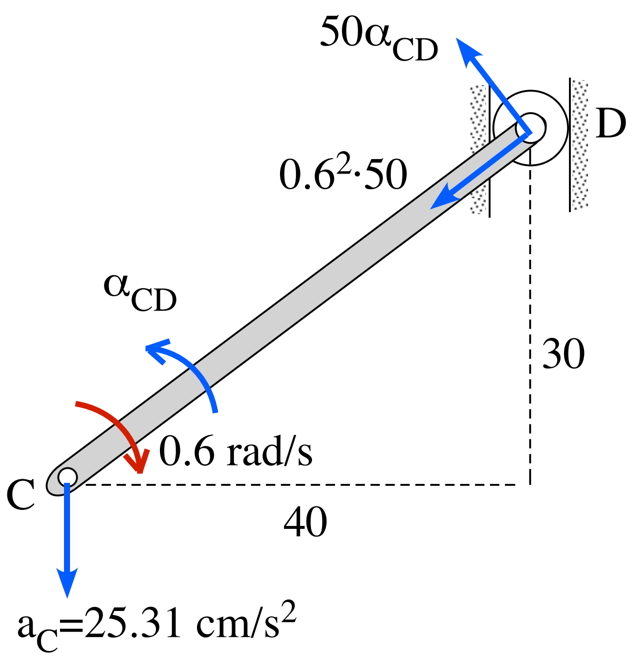
C punto medio de A y B:

$$\vec{a}_C = \frac{1}{2}\left(\vec{a}_A + \vec{a}_B\right) = -25.3125\vec{j}$$

• Campo de aceleraciones en la barra CD:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{\alpha}_{CD} \wedge \overrightarrow{CD} - \omega_{CD}^2 \overrightarrow{CD}$$

Supongo $\vec{a}_D = a_D \vec{j}$ $\quad \vec{\alpha}_{CD} = \alpha_{CD} \vec{k}$



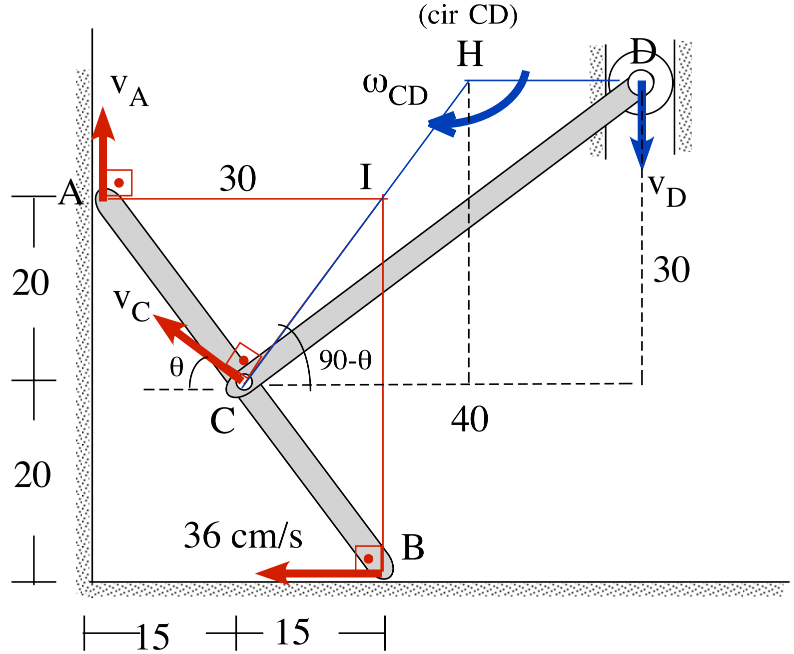
$$a_D \vec{j} = -25.3125\vec{j} - 30\alpha_{CD}\vec{i} - 40\alpha_{CD}\vec{j} - 0.6^2\left(40\vec{i} + 30\vec{j}\right)$$

x) $0 = -30\alpha_{CD} - 14.4 \;\rightarrow\; \alpha_{CD} = -0.48 \text{ rad/s}^2$

y) $a_D = -25.3125 - 40\alpha_{CD} - 10.8$

$a_D = -16.91 \text{ cm/s}^2$

Podría haber resuelto en velocidades la barra CD geométricamente, determinando y utilizando el cir:



A partir de $\vec{v}_C = -18\,\vec{i} + 13.5\,\vec{j}$ calculo θ:

$$tg\theta = \frac{13.5}{18} = 0.75 \rightarrow \theta = 36.87^o$$

$$CH \cdot sen(90-\theta) = 30$$

$$CH = \frac{30}{0.8} = 37.5$$

Sitúo el cir:

$$HD = 40 - CH \cdot \cos(90-\theta) = 40 - 37.5 \cdot 0.6 = 17.5cm$$

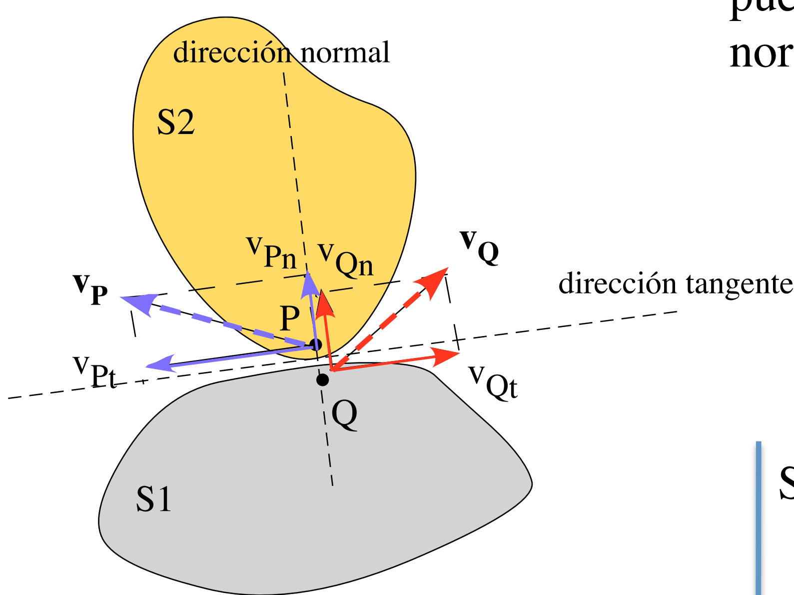
Calculo la velocidad angular:

$$v_C = CH\omega_{CD} = \sqrt{18^2 + 13.5^2}$$

$$\omega_{CD} = \frac{v_C}{CH} = \frac{\sqrt{18^2 + 13.5^2}}{37.5} = 0.6 \text{ rad / s}$$

Sólidos apoyados: contactos permanentes

Sean dos sólidos que se mueven **manteniéndose en contacto**. Se dice entonces que el **contacto es permanente**, y en ese caso los movimientos de ambos están relacionados.



La velocidad de los puntos en contacto, se pueden descomponer según la dirección normal, n, y tangente, t, en el contacto:

$$Q \in S1 \quad \rightarrow \quad \vec{v}_Q = \vec{v}_{Qn} + \vec{v}_{Qt}$$

$$P \in S2 \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_{Pn} + \vec{v}_{Pt}$$

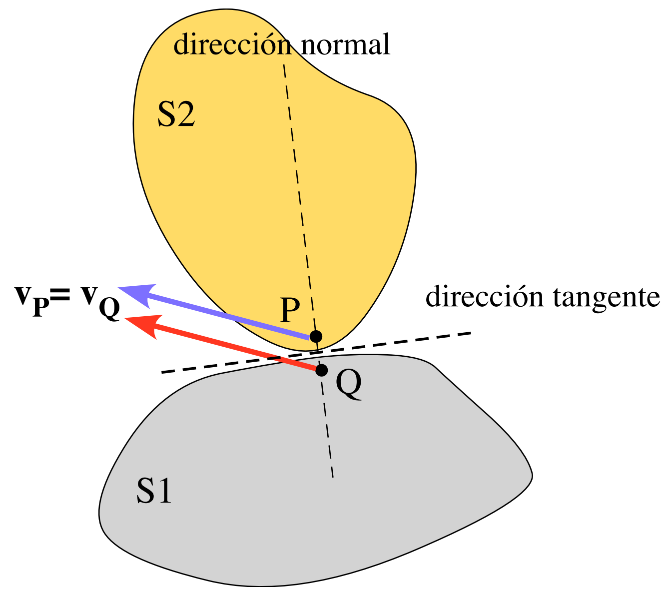
Si el **contacto es permanente**

$$\vec{v}_{Pn} = \vec{v}_{Qn}$$

Si P desliza respecto a Q, no hay relación entre componentes tangenciales

Si P **no desliza** en Q, ambos puntos se mueven también igual en dirección tangente $\vec{v}_{Pt} = \vec{v}_{Qt}$ con lo que

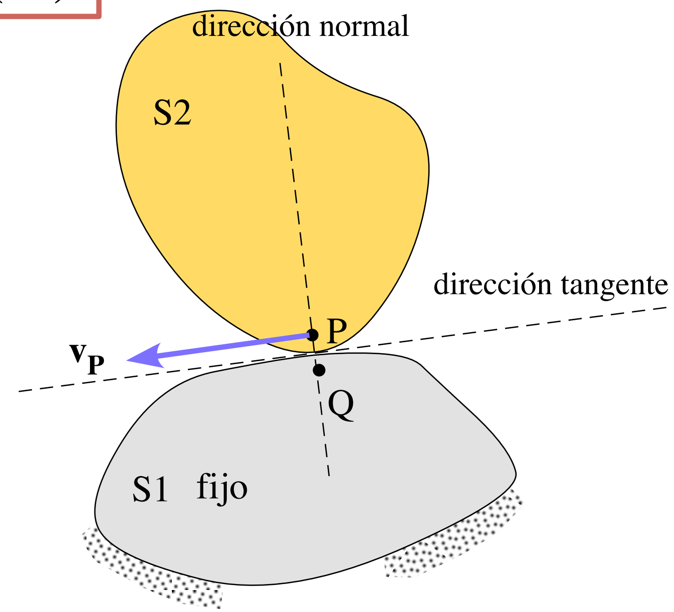
$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q$$



Sólido S2 moviéndose sobre un suelo fijo (S1)

$Q \in S1$ fijo $\quad \rightarrow \quad \vec{v}_Q = \vec{0}$

$P \in S2 \quad \rightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_{Pn} + \vec{v}_{Pt}$



Contacto permanente $\quad \vec{v}_{Pn} = \vec{0}$

a) Desliza en Q : $\quad \vec{v}_{Pt} \neq \vec{0} \qquad \vec{v}_P = \vec{v}_{Pt}$

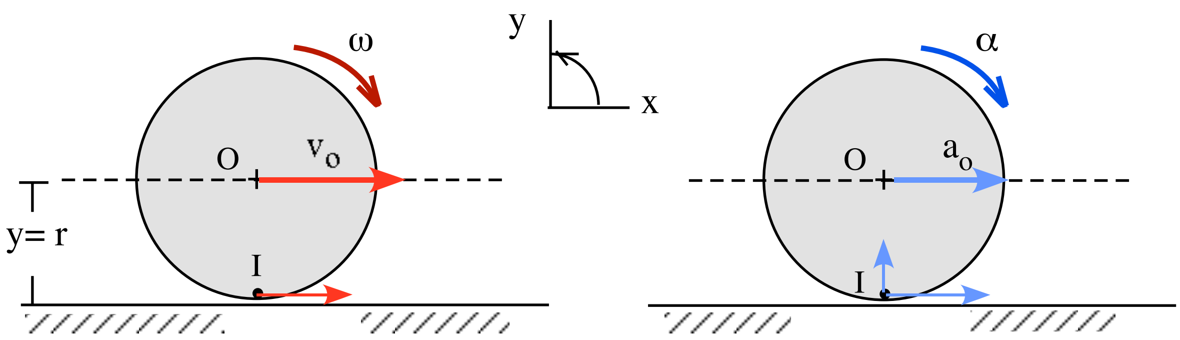
La velocidad de P es en la dirección tangente en el contacto

b) No desliza en Q : $\quad \vec{v}_{Pt} = \vec{0} \longrightarrow \vec{v}_P = \vec{0} \qquad$ **P= c.i.r.**

La velocidad del punto P es cero, siendo ese punto el c.i.r. de S2. **El sólido rueda sin deslizar sobre el suelo (r.s.d.)**

Disco rodando sobre un suelo horizontal

- Si el disco desliza y rueda

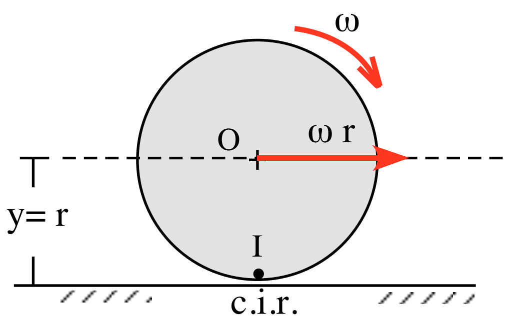


El centro del disco hace una trayectoria rectilínea paralela al suelo, a una altura constante

$$\vec{v}_O = v_O \vec{i} \qquad \vec{a}_O = a_O \vec{i}$$

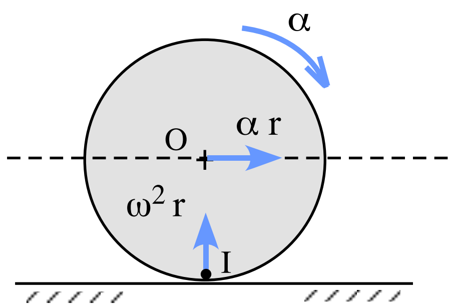
De la velocidad del punto de contacto con el suelo, I, sabemos que es sólo en dirección tangente. La velocidad y aceleración angular pueden tener cualquier valor y sentido.

Si el disco rueda sin deslizar (r.s.d): el punto I es el cir (v_I=0)



$$v_O = IO \cdot \omega = r\omega$$

(sentidos de $\vec{v}_O$ y $\vec{\omega}$ coherentes)



En aceleraciones:

$$\vec{a}_O = \frac{dv_O}{dt}\vec{i} = r\frac{d\omega}{dt}\vec{i} = r\alpha\vec{i}$$

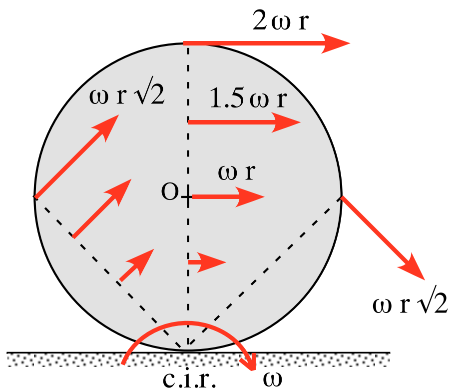
(sentidos de $\vec{a}_O$ y $\vec{\alpha}$ coherentes)

Para hallar la aceleración de cualquier otro punto se usa el campo de aceleraciones con el centro del disco, por ejemplo la de I:

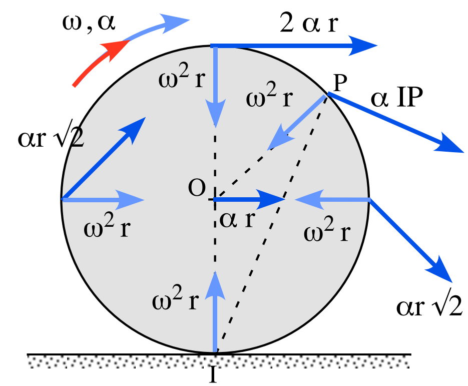
$$\vec{a}_I = \vec{a}_O + \alpha \wedge \overrightarrow{OI} - \omega^2 \overrightarrow{OI} = r\alpha\vec{i} - r\alpha\vec{i} + \omega^2 r\vec{j} \qquad \boxed{\vec{a}_I = \omega^2 r\vec{j}}$$

Como se ve **la aceleración del cir, en general no es cero**

Movimiento de algunos puntos del disco

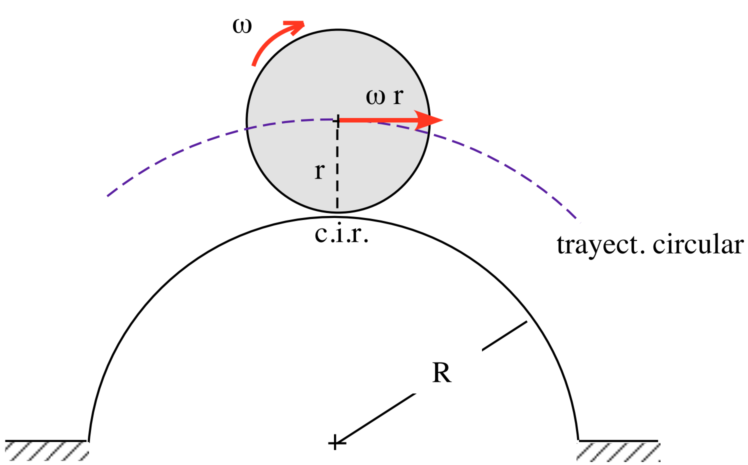


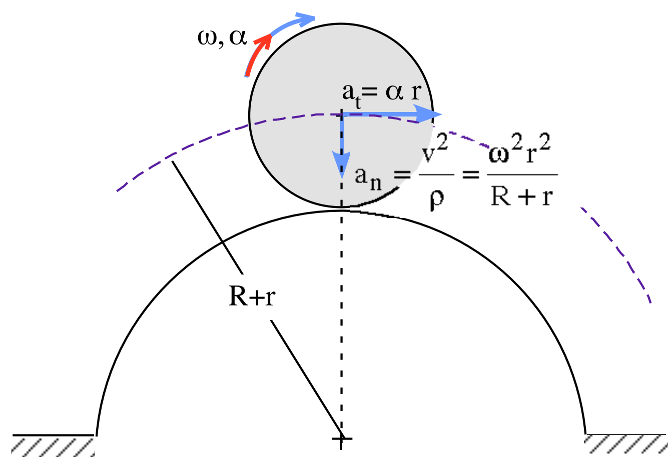
Velocidades
(Campo de veloc. con el cir o con O)



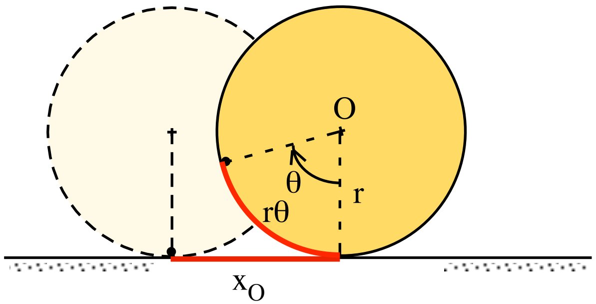
Aceleraciones
(Campo de aceleraciones con O)

¿Y si el suelo es curvo? La trayectoria del centro del disco es curvilínea y tiene aceleración tangencial y normal





•Que un disco ruede sin deslizar significa que lo que avanza por el suelo, también lo ha girado, de forma que la longitud de arco girada= distancia recorrida por el suelo

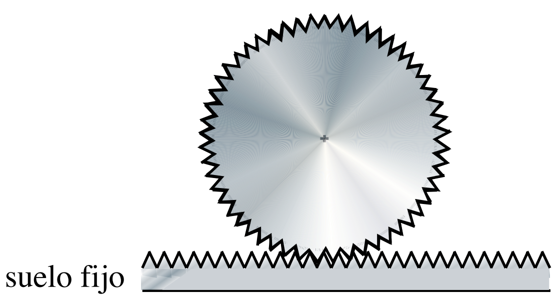


$$r\cdot\theta = x_O$$

Derivando respecto al tiempo:

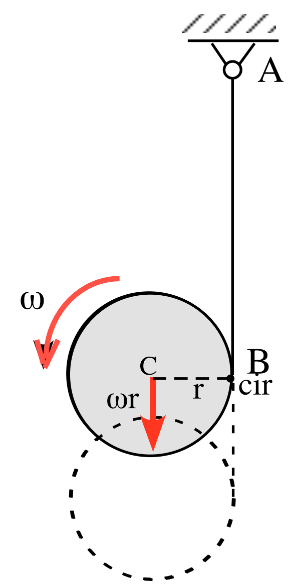
$$r\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx_O}{dt} \quad \rightarrow \quad r\cdot\omega = v_O$$

•Las ruedas dentadas r.s.d. por construcción

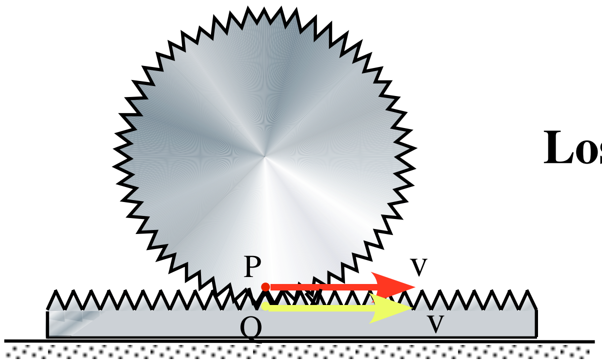


•En las poleas los tramos de hilo rectos son suelos rectos que se van generando a medida que el disco se desenrolla.

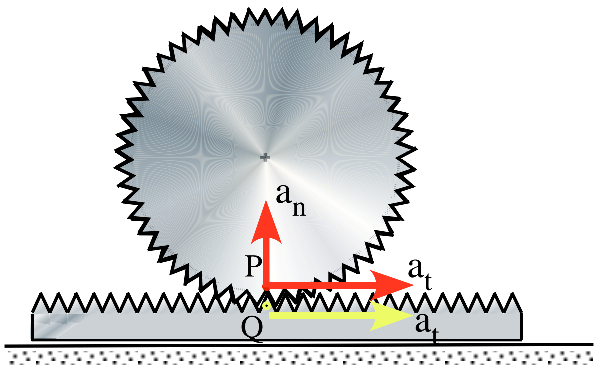
Siempre r.s.d. sobre los hilos



•**Disco que r. s. d. sobre un suelo que se mueve:**



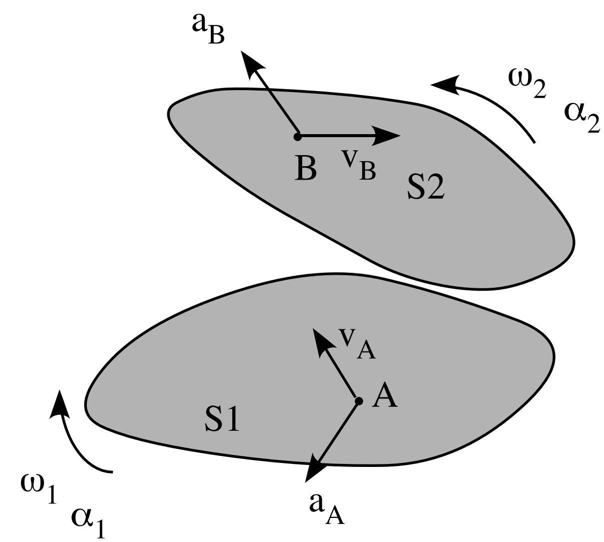
Los puntos de contacto P y Q tienen la misma velocidad



Los puntos P y Q tienen la **misma aceleración en la dirección tangente**, ya que los dientes de abajo arrastran a los de arriba en esa dirección

Las aceleraciones normales no son iguales y dependen del sólido a que pertenezcan

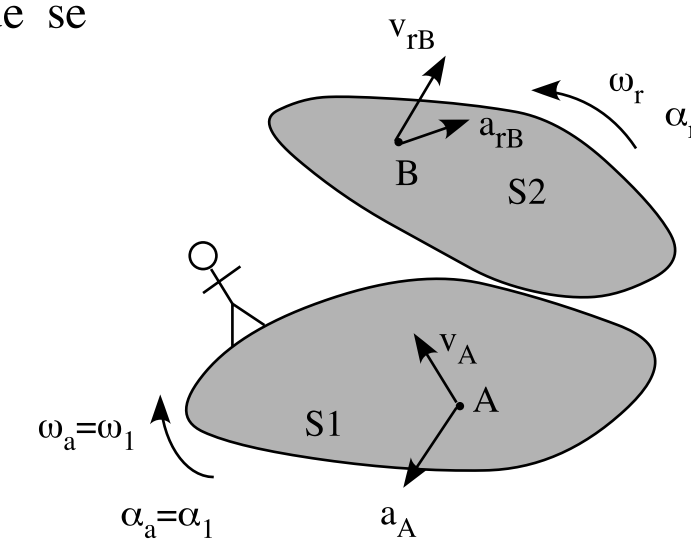
Forma general de analizar dos sólidos S1 y S2 que se mueven apoyados uno en otro. En el dibujo se muestran los valores absolutos de velocidades y aceleraciones de cada uno



Se elige un observador auxiliar en uno de los sólidos. Ese observador se mueve como el sólido en que se encuentra

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 \;\; , \;\; \vec{\alpha}_a = \vec{\alpha}_1$$

Ese señor ve a S2 girando con $\vec{\omega}_r$ y $\vec{\alpha}_r$ y al punto B moviéndose con $\vec{v}_{rB}$ y $\vec{a}_{rB}$



Se aplican las expresiones de Coriolis al punto B:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{rB} + \vec{v}_{aB} \qquad \text{con} \qquad \vec{v}_{aB} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_a \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{rB} + \vec{a}_{aB} + \vec{a}_{cor\ B} \qquad \text{siendo}$$

$$\vec{a}_{aB} = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_a \wedge \overrightarrow{AB} - \omega_a^2 \overrightarrow{AB}$$

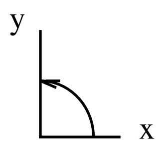
$$\vec{a}_{cor\ B} = 2\vec{\omega}_a \wedge \vec{v}_{rB}$$

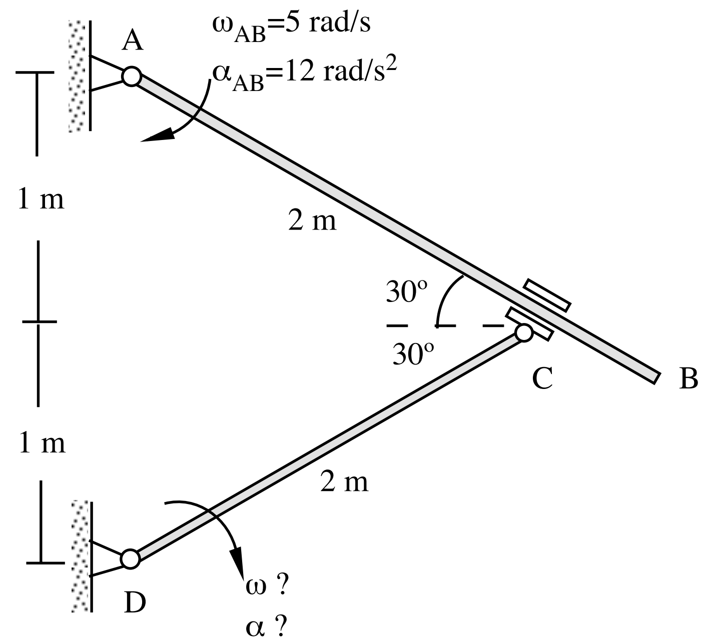
Y las relaciones entre velocidades y aceleraciones angulares absolutas y relativas:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a \qquad \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_r + \vec{\alpha}_a$$

Ejemplo:

Hallar velocidad y aceleración angular de DC sabiendo las de la barra AB.





Velocidad y aceleración absolutas de C

$C \in DC$

$$\vec{v}_C = \cancel{\vec{v}_D} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{DC} = -\omega\ \vec{k} \wedge \left(\sqrt{3}\ \ \vec{i} + \vec{j}\right) = \omega\vec{i} - \omega\sqrt{3}\,\vec{j}$$

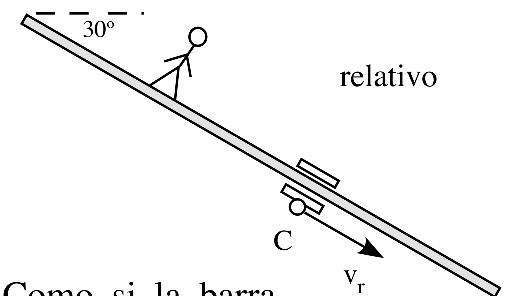
$$\vec{a}_C = \cancel{\vec{a}_D} + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{DC} - \omega^2\,\overrightarrow{DC} == \alpha\vec{i} - \alpha\sqrt{3}\,\vec{j} - \omega^2\left(\sqrt{3}\ \ \vec{i} + \vec{j}\right) =$$

$$= \left(\alpha - \omega^2\sqrt{3}\right)\vec{i} + \left(-\alpha\sqrt{3} - \omega^2\right)\vec{j}$$

Elijo un **observador auxiliar en la barra AB**, por tanto

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_{AB} = -5\,\vec{k} \qquad \vec{\alpha}_a = \vec{\alpha}_{AB} = -12\,\vec{k}$$

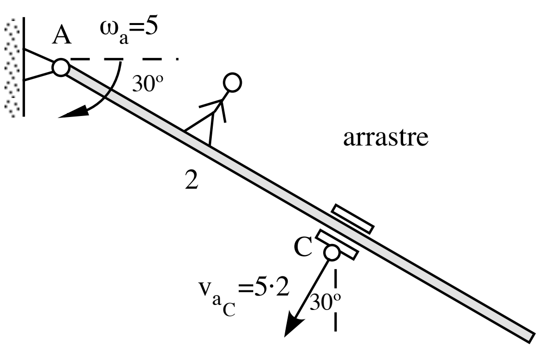
Para ese señor , el punto C de la otra barra tiene un movimiento sencillo: rectilíneo a lo largo de AB con v_r y a_r en esa dirección. Aplico Coriolis a ese punto **en velocidades**:



Como si la barra fuese un suelo fijo

$$\begin{cases} \vec{v}_{r\,C} = v_r\left(\cos 30\,\vec{i} - \text{sen}30\,\vec{j}\right) \\ \vec{v}_{a\,C} = \cancel{\vec{v}_A} + \vec{\omega}_a \wedge \overrightarrow{AC} = -5\,\vec{k} \wedge \left(2\cos 30\,\vec{i} - 2\text{sen}30\,\vec{j}\right) = \\ \quad = 10\left(-\text{sen}30\,\vec{i} - \cos 30\,\vec{j}\right) \end{cases}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{r\,C} + \vec{v}_{a\,C}$$

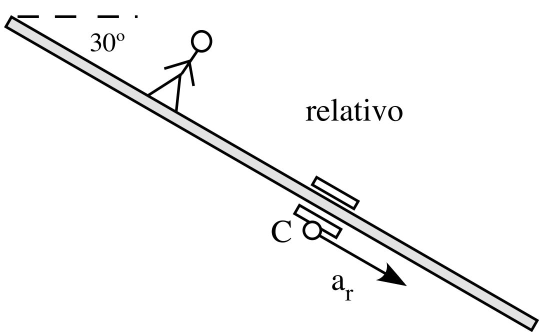


Como si C estuviese pegado a la barra en su movimiento

Rellenando esta ecuación y escribiendo las 2 ecs escalares:

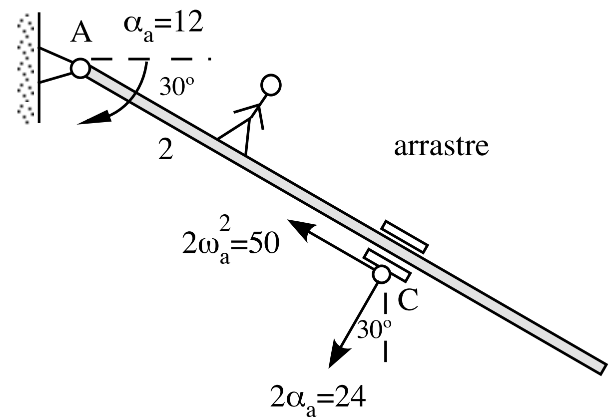
$$\left.\begin{array}{l} x)\,\omega = v_r\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 5 \\ y)\,-\omega\sqrt{3} = -v_r\,\dfrac{1}{2} - 5\sqrt{3} \end{array}\right\} v_r = 10\sqrt{3}\ \text{m/s} \qquad \omega = 10\ \text{rad/s}$$

Aplicando Coriolis en aceleraciones: $\vec{a}_C = \vec{a}_{r\,C} + \vec{a}_{a\,C} + \vec{a}_{cor\,C}$



$$\vec{a}_C = \left(\alpha - 100\sqrt{3}\right)\vec{i} + \left(-\alpha\sqrt{3} - 100\right)\vec{j}$$

$$\vec{a}_{r\,C} = a_r\left(\cos 30\,\vec{i} - \operatorname{sen}30\,\vec{j}\right)$$

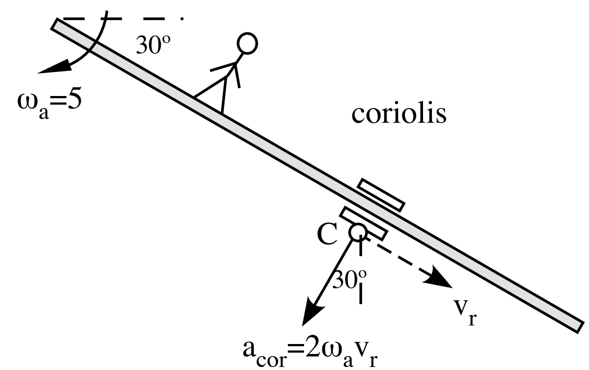


$$\vec{a}_{a\,C} = \cancel{\vec{a}_A} + \vec{\alpha}_a \wedge \overline{AC} - \omega_a^2\,\overline{AC} =$$

$$= 24\left(-\operatorname{sen}30\,\vec{i} - \cos 30\,\vec{j}\right) - 5^2\left(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_{cor\,C} = 2\vec{\omega}_a \wedge \vec{v}_{r\,C} = 2\cdot 5\cdot 10\sqrt{3}\left(-\operatorname{sen}30\,\vec{i} - \cos 30\,\vec{j}\right) =$$

$$= -50\sqrt{3}\vec{i} - 150\,\vec{j}$$

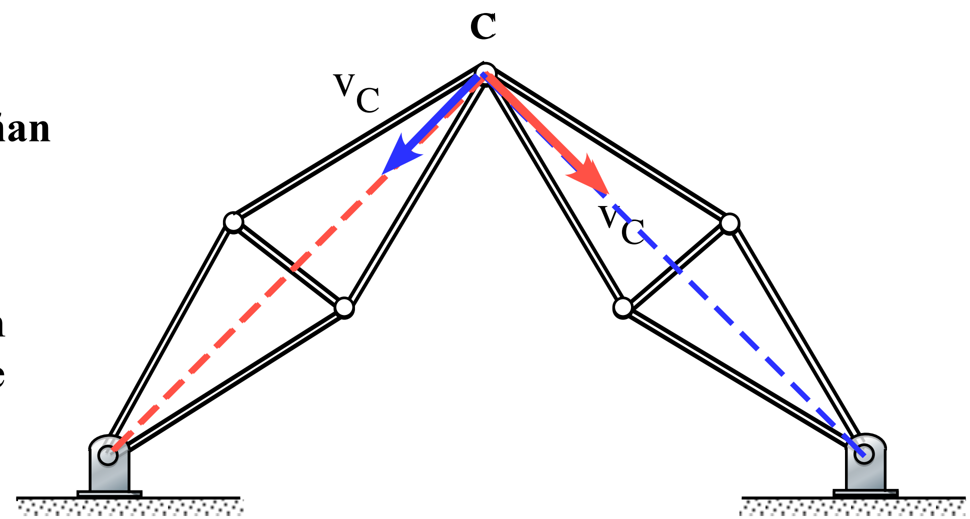


Se obtiene el sistema de ecuaciones:

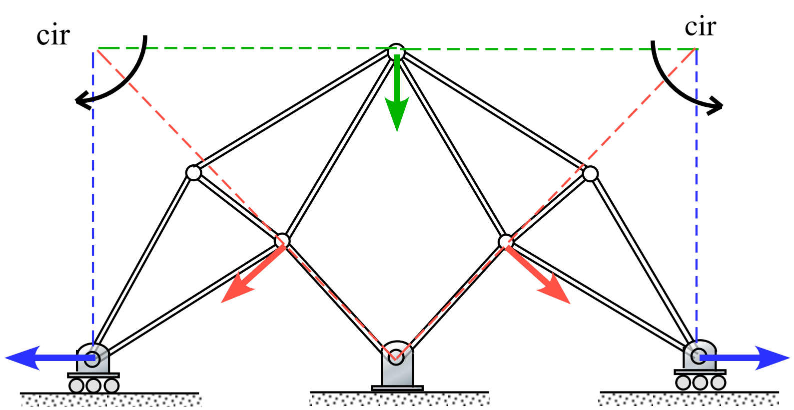
$$\left.\begin{aligned} x)\ &\alpha - 100\sqrt{3} = a_r\frac{\sqrt{3}}{2} - 12 - 25\sqrt{3} - 50\sqrt{3} \\ y)\ &-\alpha\sqrt{3} - 100 = -a_r\frac{1}{2} - 12\sqrt{3} + 25 - 150 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_r &= -8.42\ \ \mathrm{m/s^2} \\ \alpha &= 24\ \ \mathrm{rad/s^2} \end{aligned}$$

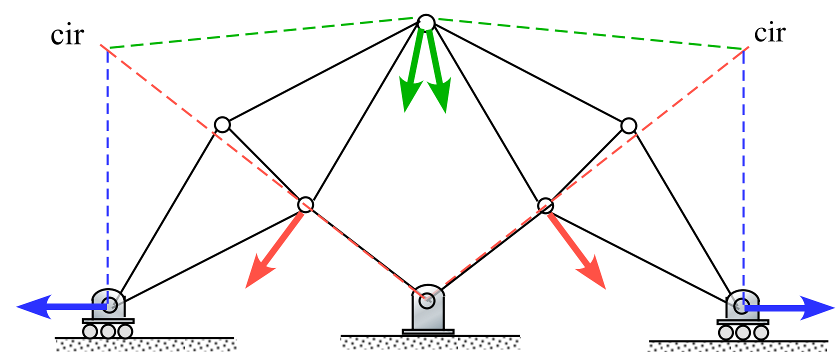
Cinemática cuando se diseñan estructuras estáticas, ¿para que?

Entre otras cosas para evaluar si algún movimiento es posible sin más que dibujar velocidades de algunos puntos



Esta estructura no se puede mover, v_C tendría que ser única.





Esta en cambio puede iniciar una rotación

Tras la cual el movimiento se bloquearía

En este tipo de sistemas las fuerzas en los elementos se hacen muy grandes y se rompen se llaman **sistemas críticos** y es importante detectarlos

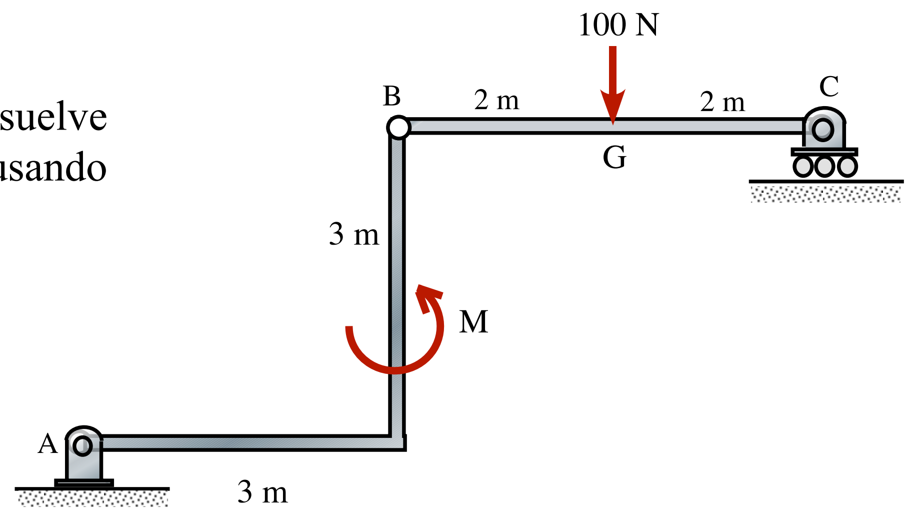
Hay varios métodos de estática, (en esta asignatura hemos visto el de trabajos virtuales), en que se utilizan desplazamientos hipotéticos de algunos puntos de un sistema en equilibrio en torno a dicha posición.

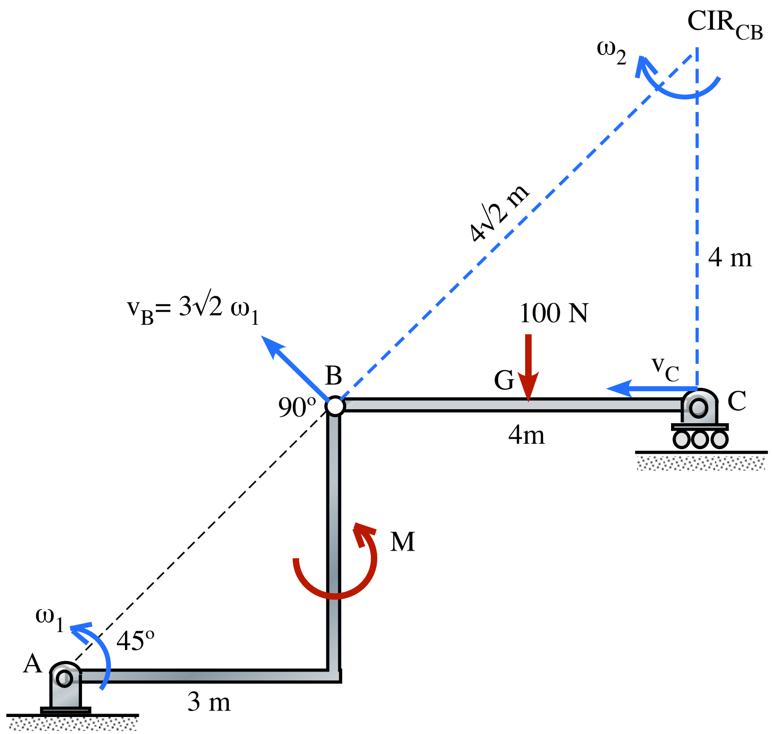
En lugar de dibujar u obtener desplazamientos se puede hacer con velocidades ya que la diferencia entre ellos es el elemento de tiempo en que se hacen. Y la misma relación hay entre desplazamiento angular y velocidad angular de rotación.

$$\delta\vec{r}_B = \vec{v}_B \delta t \qquad \begin{cases} \delta x_B = v_{Bx} \delta t \\ \delta y_B = v_{By} \delta t \end{cases} \qquad\qquad \delta\theta = \omega\ \delta t$$

Vamos a ver con un ejemplo como se resuelve un problema de trabajos virtuales usando cinemática .

Nos piden calcular M para que el sistema de la figura esté en equilibrio





Supongo que la escuadra gira con ω_1 y la barra con ω_2 : ambas están relacionadas

Determino la velocidad de B como punto de la escuadra

$$v_B = 3\sqrt{2}\ \omega_1 \qquad \vec{v}_B = -3\omega_1 \vec{i} + 3\omega_1 \vec{j}$$

Como B también es de la barra CB y C sólo se mueve horizontalmente puedo hallar gráficamente el cir de CB y relacionar las dos rotaciones:

$$v_B = 3\sqrt{2}\ \omega_1 = 4\sqrt{2}\ \omega_2 \rightarrow \omega_2 = 0.75\omega_1$$

La componente vertical de la velocidad de G (punto medio barra):

$$v_{Gy} = \frac{1}{2}\left(v_{By} + v_{Cy}\right) = 1.5\omega_1$$

Teorema trabajos virtuales:

$$\delta W = 0 \rightarrow -100 v_{Gy} \delta t + M\omega_1 \delta t = 0 \qquad \left(-150 + M\right)\omega_1 \delta t = 0 \rightarrow M = 150\ \mathrm{N{\cdot}m}$$