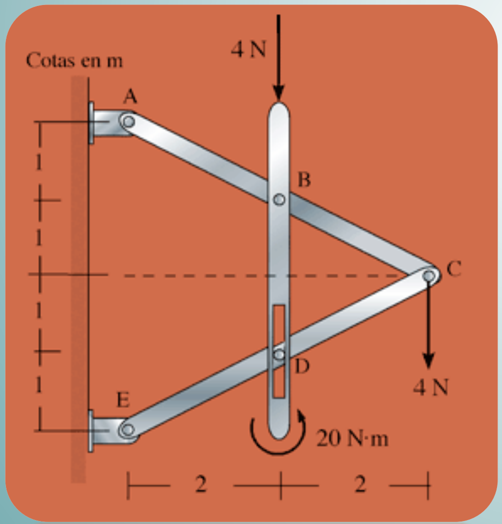
Mecánica

Tema 09. Teoremas fundamentales de la Dinámica.
Dinámica del movimiento plano del sólido rígido. Momentos de inercia.



Cecilia Pardo Sanjurjo

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

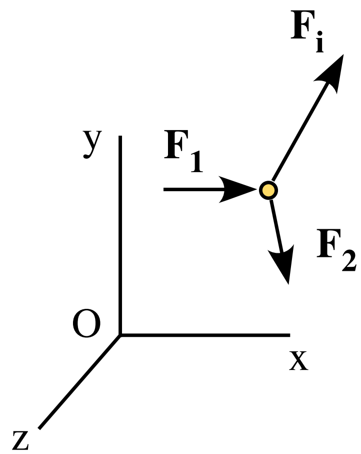
Dinámica

Estudio del movimiento en relación con las fuerzas que lo producen

Cantidad de movimiento. Momento angular. Teoremas fundamentales

- Dinámica del punto
- Dinámica de los sistemas de puntos
- Dinámica del sólido rígido. Momentos de inercia

Dinámica del punto



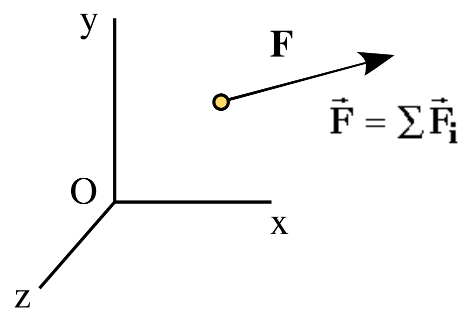
Sea un punto sobre el que actúan fuerzas

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_i \ldots$ de resultante $\vec{F}$

2ª ley de Newton: $\boxed{\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a}}$

Siendo m la masa del punto

En problemas planos (fuerzas en plano xy):
2 ecuaciones escalares



• según componentes rectangulares

$$\sum F_{ix} = ma_x \qquad \sum F_{iy} = ma_y$$

• o intrínsecas

$$\sum F_{it} = ma_t \qquad \sum F_{in} = ma_n$$

Cantidad de movimiento (momento lineal) $(\vec{p})$ $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

La 2ª Ley de Newton se puede escribir como: $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\boxed{\vec{F}\ dt = d\vec{p}}$ Ley del impulso para un dt, siendo $\vec{F}\cdot dt$, el **impulso** de las fuerzas en ese dt

Integrando entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}$$

Ley del impulso

siendo $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$ **el impulso de la fuerza en ese intervalo temporal** (unidades SI: N·s)

En el plano:

$$x)\ \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = mv_{x_2} - mv_{x_1} \qquad y)\ \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = mv_{y_2} - mv_{y_1}$$

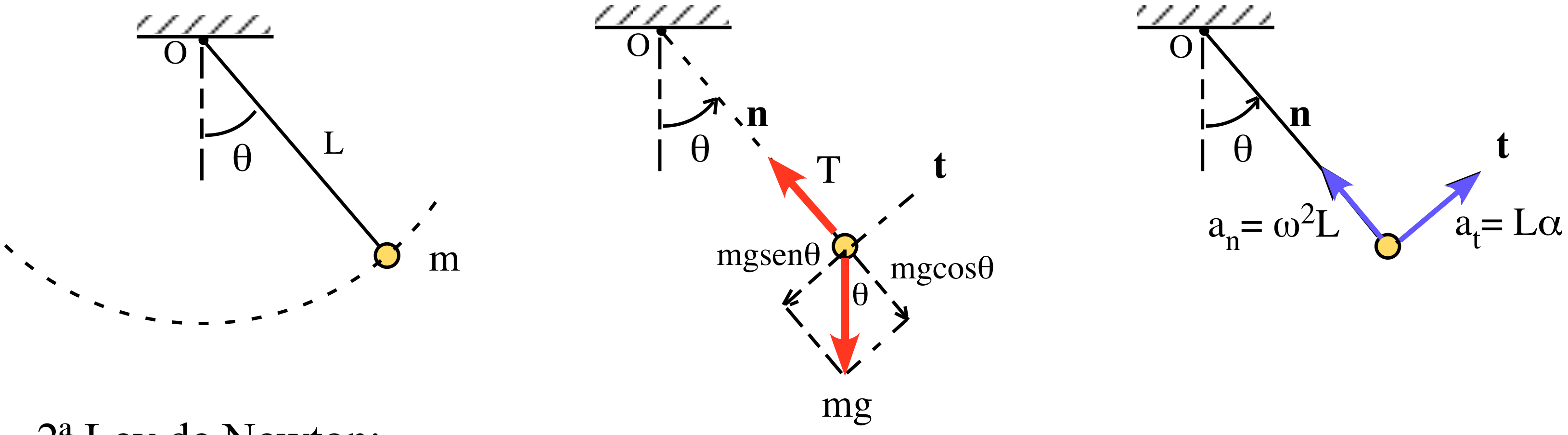
Conservación de la cantidad de movimiento

• Si alguna componente de la fuerza es cero en el transcurso del movimiento se conserva la componente correspondiente de la cantidad de movimiento:

$$F_x = 0 \rightarrow p_x = mv_x = cte \qquad mv_{x_1} = mv_{x_2}$$

• Si $\vec{F} = \vec{0}$ en el movimiento, se conserva la cantidad de movimiento :

$$m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1$$



2ª Ley de Newton:

$$\sum F_t = ma_t \Big) \quad -mg\ \mathrm{sen}\theta = m\ a_t$$

$$\sum F_n = ma_n \Big) \quad T - mg\ \cos\theta = m\ a_n$$

Ecs dinámica para el péndulo simple

Cinemática:

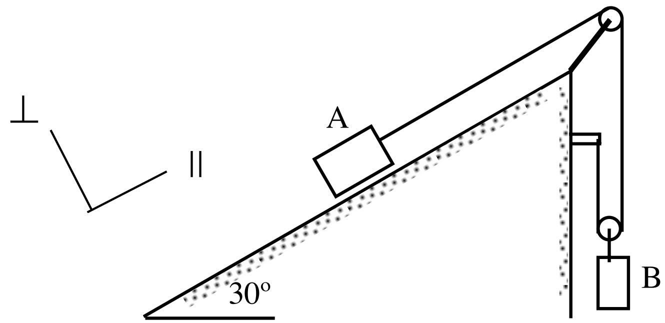
$$v = L\omega = L \cdot \frac{d\theta}{dt} \qquad a_t = L\alpha = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad a_n = \frac{v^2}{L} = L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\sum F_t = ma_t \Big) \quad -mg\ \mathrm{sen}\theta = m\ L\frac{d^2\theta}{dt^2} \longrightarrow \theta = \theta(t) \quad \text{ec del movimiento}$$

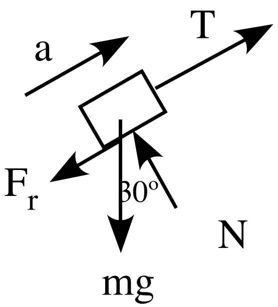
$$\sum F_n = ma_n \Big) \quad T - mg\ \cos\theta = m\ L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \longrightarrow T$$

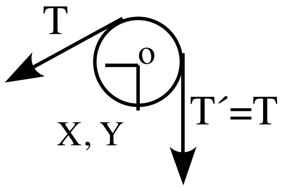
Ejemplo:

El bloque A tiene una masa m y la del B es 4m. El coeficiente de rozamiento es 0.5.
Hallar las aceleraciones de los bloques y la tensión en el hilo
La masa de las poleas es despreciable.

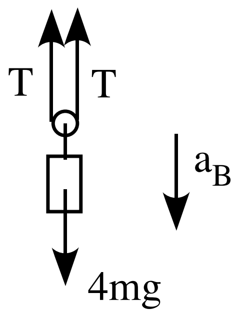


Esquemas de fuerzas:





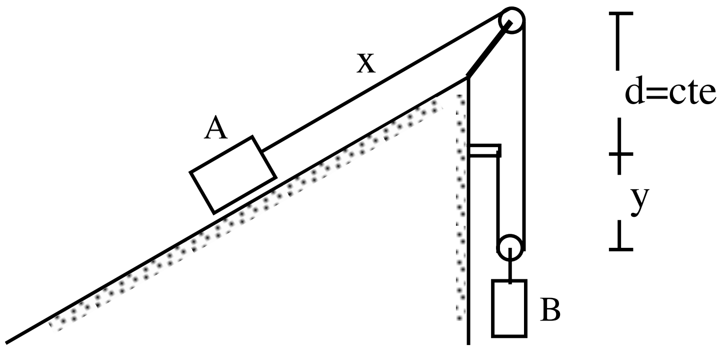
(Polea de m=0 : T′=T)



Ecuaciones de la dinámica: **Bloque A**

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_{||} = ma_{||}\big) \quad T - mg\ \text{sen}30 - F_r = m\ a \\ \sum F_{\perp} = ma_{\perp}\big) \quad N - mg\ \cos 30 = 0 \end{array}\right\} \text{bloque A deslizando: } F_r = 0.5N$$

Bloque B: $\sum F_y = ma_y\big) \quad 4mg - 2T = 4ma_B$



Relación entre aceleraciones:

$$L_{hilo} = cte = x + d + 2y$$

derivando 2 veces respecto al tiempo:

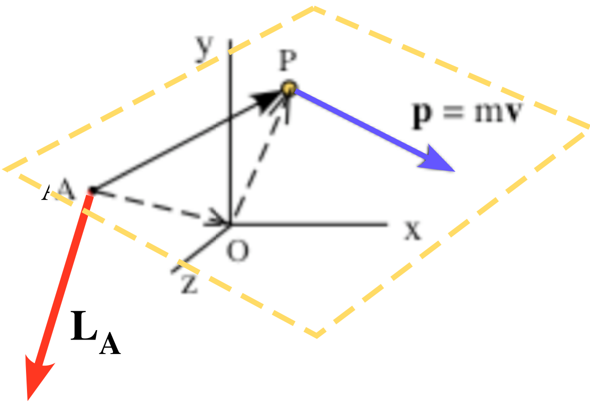
$$\ddot{x} + 2\ddot{y} = 0$$

$$\boxed{\text{Si } a_A = a = -\ddot{x} \quad \rightarrow \quad a_B = \frac{a}{2} \downarrow}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de dinámica:

$$\left.\begin{aligned} &T - 0.5mg \; - 0.5mg\frac{\sqrt{3}}{2} = m\ a \\ &4mg - 2T = 2ma \end{aligned}\right\} \; a = 5.23 \text{ m/s}^2 \quad T = 14.37 \text{ N}$$

Momento angular de una masa puntual respecto a un punto A $\left(\vec{L}_A \text{ o } \vec{H}_A\right)$



Producto vectorial del vector de posición del punto respecto a A por la cantidad de movimiento del punto

$$\boxed{\vec{L}_A = \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{v}} \qquad (\text{SI: } kg \cdot m^2/s)$$

Su variación respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{AP} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right) \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F} =$$

$$= \left(\vec{v} - \vec{v}_A\right) \wedge m\vec{v} + \vec{M}_A = -\vec{v}_A \wedge m\vec{v} + \vec{M}_A$$

Ya que el momento de las fuerzas que actúan sobre el punto respecto a A es $\longrightarrow$ $\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}$

Si elegimos que **A sea un punto fijo** el primer sumando es cero.

Teorema del momento angular:

El momento de las fuerzas respecto a **un punto fijo**, A, es igual a la variación respecto al tiempo del momento angular respecto a ese punto

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A}$$

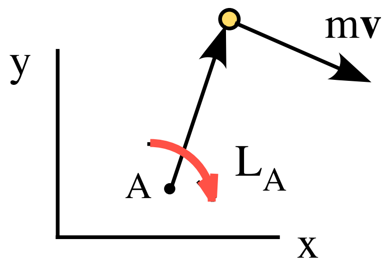
O bien: $\vec{M}_A dt = d\vec{L}_A$

Conservación del momento angular: si el momento de las fuerzas es cero en cualquier instante, el momento angular se conserva en el movimiento.

$$\vec{M}_A = \vec{0} \quad \rightarrow \vec{L}_A = \overrightarrow{cte}$$

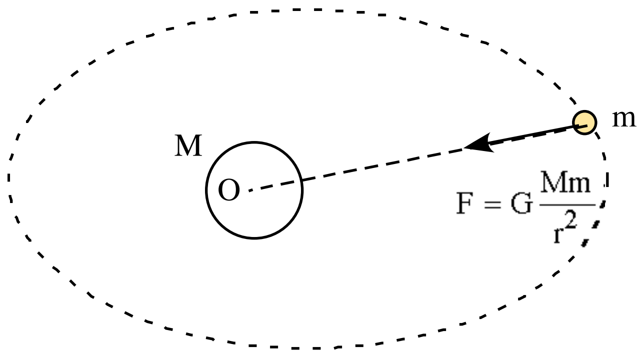
Puede ocurrir que se conserve sólo alguna componente:

$$M_{Az} = 0 \rightarrow L_{Az} = cte$$

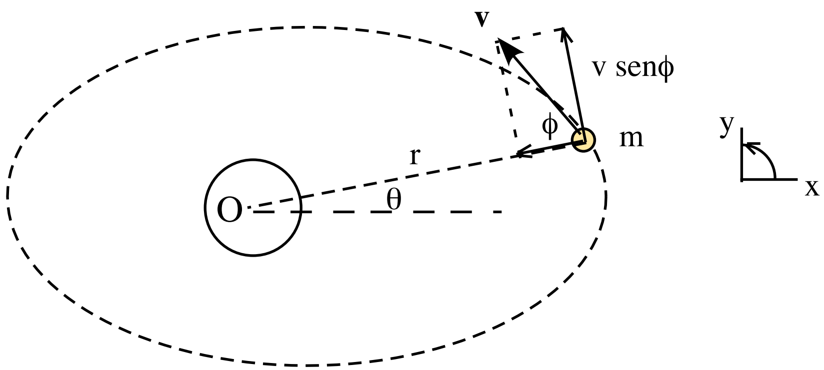


Si el punto A y fuerzas y velocidades están en el plano xy, el momento angular es perpendicular al plano, al igual que el momento de las fuerzas y el teorema del momento angular sólo tiene componente z

- **Conservación de L para fuerzas centrales**:



$$\vec{M}_O = \vec{0} \quad \rightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{cte}$$

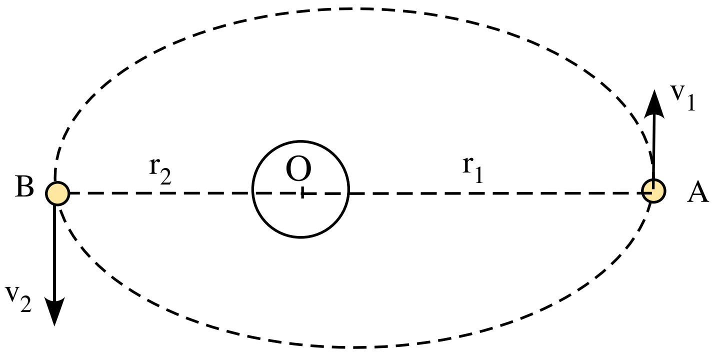


$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = r{\cdot}mv\text{sen}\phi\ \vec{k}$$

Órbita plana

$$rv\text{sen}\phi = \text{cte}$$

$$L_{O_1} = L_{O_2} \quad \rightarrow \quad r_1 v_1 = r_2 v_2$$



Trabajo y energía

El trabajo de las fuerzas en un desplazamiento dr:

$$dW = \vec{F}\bullet d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\bullet d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\bullet \vec{v}dt = m\ \vec{v}\bullet d\vec{v} = \frac{1}{2}m\ d\left(\vec{v}\bullet\vec{v}\right) = d\left(\frac{1}{2}m\ v^2\right)$$

Como la **energía cinética de la masa puntual** se define $E_c = \frac{1}{2}m\ v^2$

Teorema de la energía: $\boxed{dW = dE_c}$ en forma diferencial

El trabajo realizado por la fuerza en el recorrido de la masa de la posición 1 a la 2:

$$\int_1^2 dE_c = \int_{1\to 2} \vec{F}\bullet d\vec{r} \Rightarrow \boxed{E_{c_2} - E_{c_1} = \int_{1\to 2} \vec{F}\bullet d\vec{r}}$$

Teorema de la energía o de las fuerzas vivas: el trabajo realizado a lo largo del camino seguido por una masa puntual, es igual a la diferencia de energía cinética entre la posición final e inicial

En el caso de que **las fuerzas sean conservativas**, el trabajo entre dos puntos no depende del camino, y se puede escribir en función de la energía potencial:

$$E_{p_2} - E_{p_1} = -\int_{1\to 2} \vec{F}\bullet\vec{dr}$$

El teorema de la energía queda:

$$E_{c_2} - E_{c_1} = -\left(E_{p_2} - E_{p_1}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{E_{c_2} + E_{p_2} = E_{c_1} + E_{p_1}}$$

Conservación de la energía mecánica

Si sólo actúan fuerzas conservativas sobre una masa puntual la suma de la energía cinética y potencial es constante (energía mecánica).

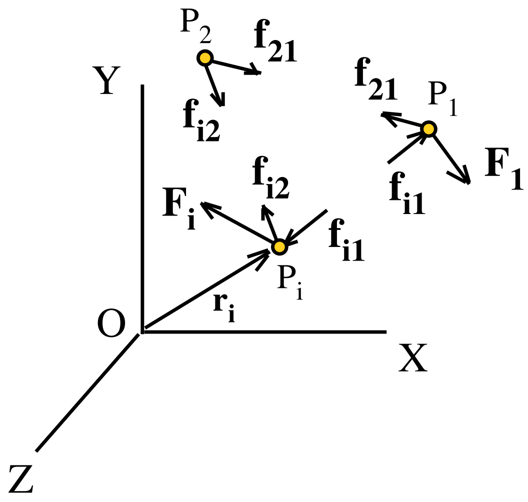
$$E_c + E_p = cte$$

Si hubiese fuerzas conservativas y no conservativas (F_{nc}):

$$E_{c_2} - E_{c_1} = \int_{1\to 2} \vec{F}_c\bullet\vec{dr} + \int_{1\to 2} \vec{F}_{nc}\bullet\vec{dr} \rightarrow \boxed{\left(E_{c_2} + E_{p_2}\right) - \left(E_{c_1} + E_{p_1}\right) = \int_{1\to 2} \vec{F}_{nc}\bullet\vec{dr}}$$

Potencia: Trabajo realizado por unidad de tiempo $\quad P = \dfrac{dW}{dt} \quad$ (SI: watios W)

Dinámica de un sistema de masas puntuales



Sea un sistema de masas puntuales $m_1,...,m_i,.....m_n$ sobre las que actúan fuerzas interiores (f_{ij}) y exteriores (F_i) y que en el instante considerado se mueven con $\vec{v}_1,...,\vec{v}_i,.....\vec{v}_n$

La cantidad de movimiento del sistema :

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left(m\vec{r}_{CDM}\right) = m\vec{v}_{CDM} \qquad \text{ya que} \quad \vec{r}_{CDM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \quad \text{siendo } m = \sum m_i$$

Cantidad de movimiento de un sistema de masas puntuales : $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}_{cdm}}$

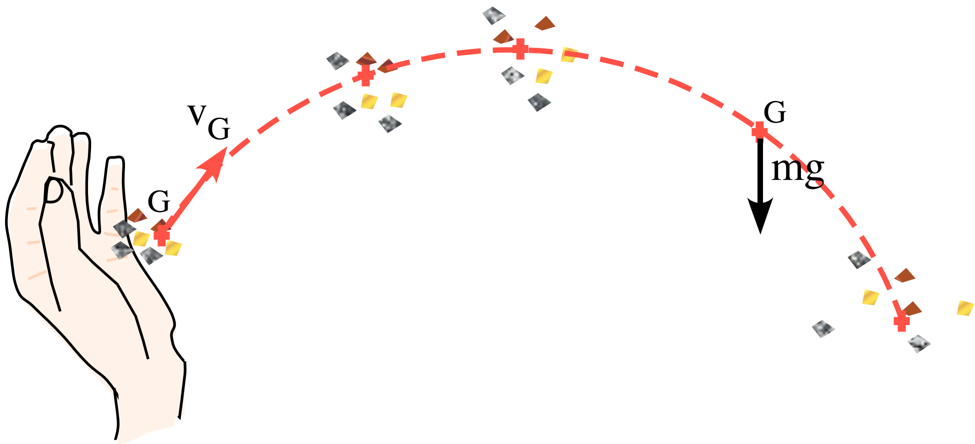
La cantidad de movimiento de un sistema equivale al que tendría toda la masa concentrada en el c.d.m. (a partir de ahora le llamaré G). A nuestra escala, cdm=cdg

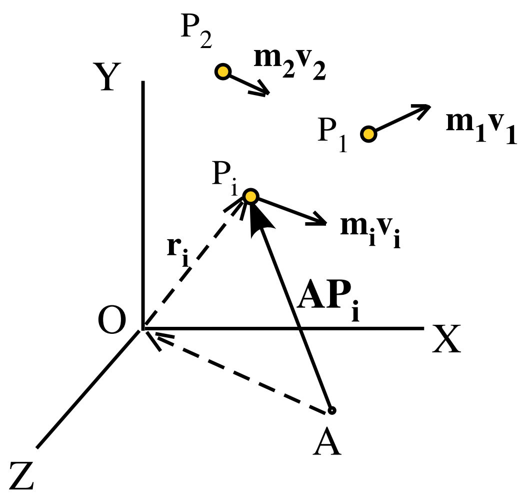
2^a ley de Newton para cada punto $\rightarrow \vec{F}_i + \sum_j f_{ij} = m_i \vec{a}_i$

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i \vec{r}_i = m\vec{a}_{CDM}$$

$$\boxed{\textbf{2}^{\textbf{a}}\ \textbf{Ley de Newton para un sistema de masas:}\quad \vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}_{\mathbf{G}}}$$

Como si toda la masa del sistema estuviese concentrada en el c.d.m.





Momento angular de un sistema de masas puntuales respecto a un punto A es la suma de los de cada partícula

$$\vec{L}_A = \sum \overrightarrow{AP}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \frac{d\overrightarrow{AP}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i + \sum \overrightarrow{AP}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \left(\vec{v}_i - \vec{v}_A\right) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum \overrightarrow{AP}_i \wedge \vec{F}_i =$$

$$= -\vec{v}_A \wedge \sum m_i \vec{v}_i + \vec{M}_A = -\vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G + \vec{M}_A = -\vec{v}_A \wedge \vec{p} + \vec{M}_A$$

Teorema del momento angular de un sistema: $\vec{M}_A = \dfrac{d\vec{L}_A}{dt}$ **(A= punto fijo o G)**

El teorema de la energía se expresa de la misma forma teniendo en cuenta que :

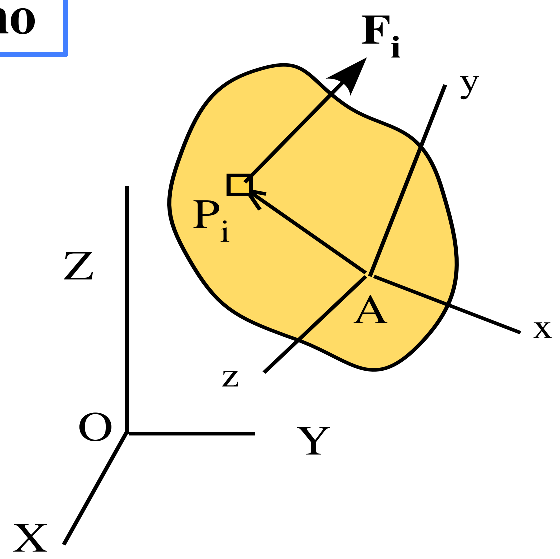
La **energía cinética del sistema** es la suma de las energías cinéticas de todos los puntos

$$E_c = \sum E_{ci} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

La **energía potencial del sistema** es la suma de las energías potenciales de sus puntos

$$E_p = \sum E_{pi}$$

Dinámica del sólido rígido en el movimiento plano



Es un sistema de puntos particular en que sólo hay que considerar las fuerzas exteriores.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_{i\ ext} \qquad \vec{M}_A = \sum \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{F}_{i\ ext}$$

2ª ley de Newton: $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_G}$

Cantidad de movimiento: $\boxed{\vec{p}=m\vec{v}_G}$

Momento angular respecto a un punto A **del sólido**: $\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_i}$

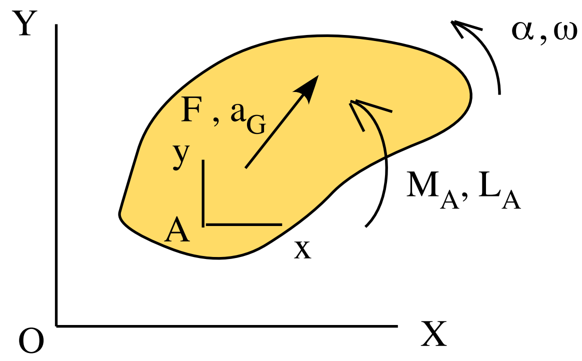
$$\vec{L}_A = \sum \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \vec{v}_i = \sum \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_i}\right) =$$

$$= \sum m_i \overrightarrow{AP_i} \wedge \vec{v}_A + \sum m_i \overrightarrow{AP_i} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_i}\right) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A + \sum m_i \left[AP_i^2 \vec{\omega} - \left(\overrightarrow{AP_i} \bullet \vec{\omega}\right) \overrightarrow{AP_i} \right]$$

Si el movimiento del sólido es en el plano xy:

$$\overrightarrow{AP_i} = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} \qquad \vec{\omega} = \omega\ \vec{k} \qquad \vec{L}_A = L_A \vec{k}$$

$$L_A = \left(m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A\right)_z + \left[\sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)\right]\omega$$



Si el sólido es continuo:

$m_i \rightarrow dm \qquad x_i, y_i \rightarrow x, y$

$\sum \rightarrow \int_S$

$$L_A = \left(m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A\right)_z + \left[\int_S\left(x^2 + y^2\right)dm\right]\omega$$

La integral dentro del corchete se llama **momento de inercia respecto al eje z que pasa por A:**

$$I_{Az} = \int_S\left(x^2 + y^2\right)dm$$

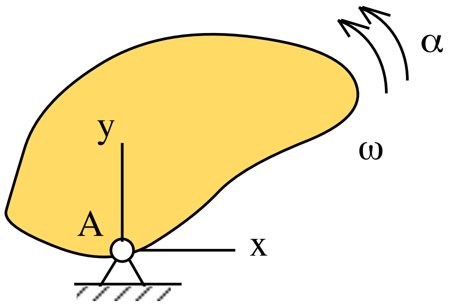
Además eligiendo como punto A un punto fijo del sólido (si lo hay) o el c.d.g., el primer sumando es 0.

Momento angular del sólido rígido respecto a un punto **A** (**fijo o G**):

$$\boxed{\vec{L}_A = I_{Az}\vec{\omega}}$$

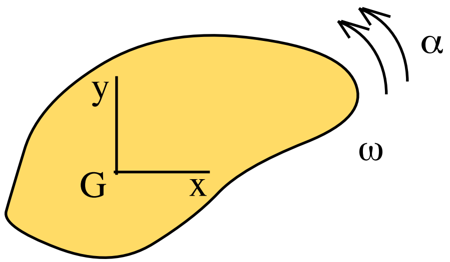
El **teorema del momento angular**:

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} = I_{A_z}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_{A_z}\vec{\alpha}$$



$$\boxed{\vec{M}_A = I_{Az}\vec{\alpha}} \quad \text{(1 ec escalar)}$$

con A= punto fijo o G



Como veremos más tarde, **en problemas planos** $I_{Az}=I_A$, y en las expresiones usaré este último.

Energía cinética del sólido:

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_i} \right)^2 =$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i v_A^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_i} \right)^2 + \sum m_i \vec{v}_A \bullet \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} m\ v_A^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \vec{v}_A \bullet \left(\vec{\omega} \wedge \sum m_i \overrightarrow{AP_i} \right) = \frac{1}{2} m\ v_A^2 + \frac{1}{2} I_A \omega^2 + m\vec{v}_A \bullet \left(\vec{\omega} \wedge A\vec{G} \right)$$

Si A=G $\rightarrow$ $E_c = \frac{1}{2} m\ v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

Si A es un punto fijo $\rightarrow$ $E_c = \frac{1}{2} I_A \omega^2$

Energía potencial debida al peso:

$$E_p = \sum E_{pi} = \sum m_i g h_i = g \sum m_i h_i = mgh_G$$

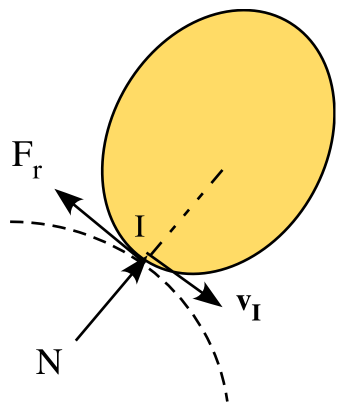
Conservación de la energía mecánica: si todas las fuerzas son conservativas,

$$E_c + E_p = cte$$

Trabajo en los apoyos:

$$dW_N = 0 \qquad \vec{N} \perp d\vec{r}_I$$

$$dW_{F_r} = \vec{F}_r \bullet d\vec{r}_I = -F_r v_I dt$$



Si el sólido r.s.d. sobre un suelo fijo, el punto I es su c.i.r.:

$dW_{F_r} = 0$ Se puede seguir aplicando la conservación de la energía mecánica

Si el sólido desliza en el suelo: $dW_{F_r} = -F_r v_I dt = -\mu_d N v_I dt \neq 0$

En este caso parte de la energía se disipa por fricción y la energía mecánica no se conserva.

Ecuaciones de la dinámica del sólido rígido en el movimiento plano

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a}_G \begin{cases} x)\ F_x = ma_{Gx} \\ y)\ F_y = ma_{Gy} \end{cases} \\ \\ z)\ M_A = I_A \alpha \qquad \text{(con A punto fijo del sólido o A=G)} \end{cases}$$

En forma diferencial:

$$\vec{F}dt = d\left(m\vec{v}_G\right)$$

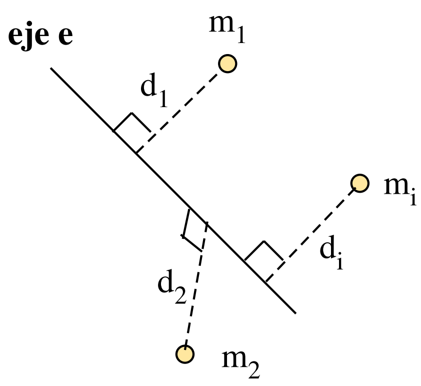
$$\vec{M}_A dt = d\left(I_A \vec{\omega}\right)$$

Energía cinética:

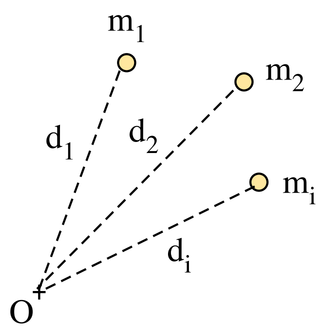
Si A=G $\rightarrow$ $E_c = \frac{1}{2} m\ v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

Si A es un punto fijo $\rightarrow$ $E_c = \frac{1}{2} I_A \omega^2$

Momento de inercia respecto a un eje o a un punto



Es la suma de los productos de **masas** por **distancias al cuadrado** al eje o al punto



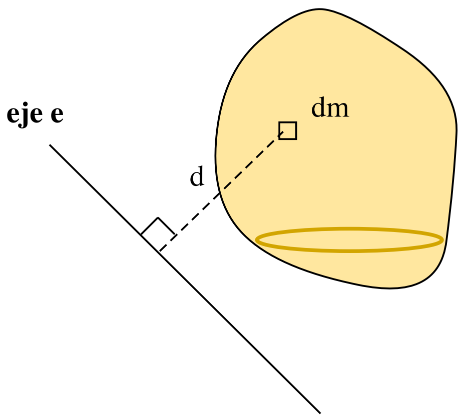
$$I_O = \sum_i m_i \, d_i^2 \qquad d_i = \text{distancia de i al punto O}$$

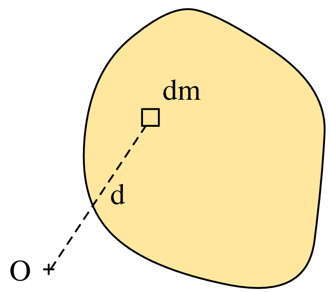
$$I_e = \sum_i m_i \, d_i^2 \qquad d_i = \text{distancia de i al eje e}$$

- Si el sistema de masa es continuo (sólido)

$$I_O = \int_S d^2 \, dm \qquad d = \text{distancia de O al dm}$$

$$I_e = \int_S d^2 \, dm \qquad d = \text{distancia del dm al eje e}$$



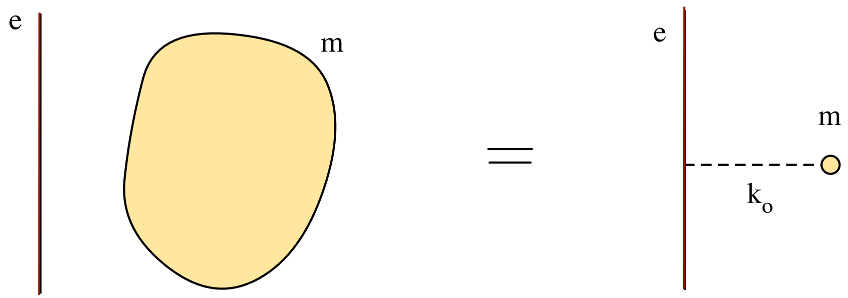


Unidades (SI): $kg \cdot m^2$

Siempre son cantidades positivas

Radio de giro (k_O):

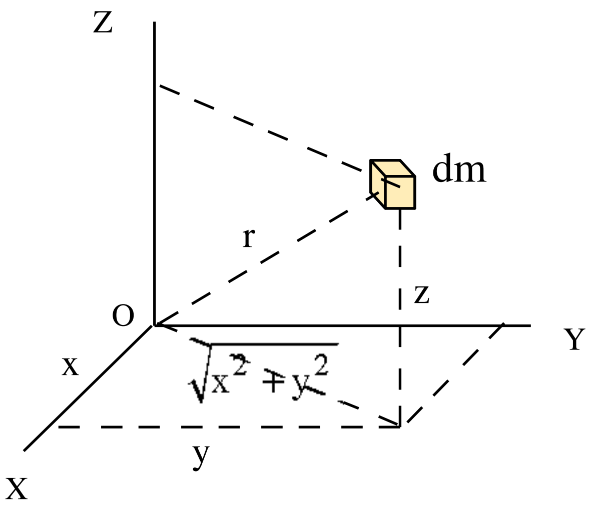
Se llama así a la distancia respecto a un eje a la que habría que concentrar la masa de un sólido a efectos de calcular su inercia respecto a dicho eje como si fuese una masa puntual



$$I_e = m\, k_o^2$$

•En Resistencia se usan momentos de inercia de <u>áreas</u>. En las leyes de la dinámica son de masas. Se pasa de unas a otras sin más que **intercambiar masa por área**. Por supuesto cambian las unidades.

Momentos de inercia respecto a los elementos de un sistema de ejes cartesiano Oxyz



• respecto al origen de coordenadas

$$I_O = \int_s r^2\, dm = \int_s \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm$$

(también llamado momento polar de inercia)

• Respecto a los 3 ejes coordenados:

$$I_x = \int_s \left(y^2 + z^2\right) dm$$

$$I_y = \int_s \left(x^2 + z^2\right) dm$$

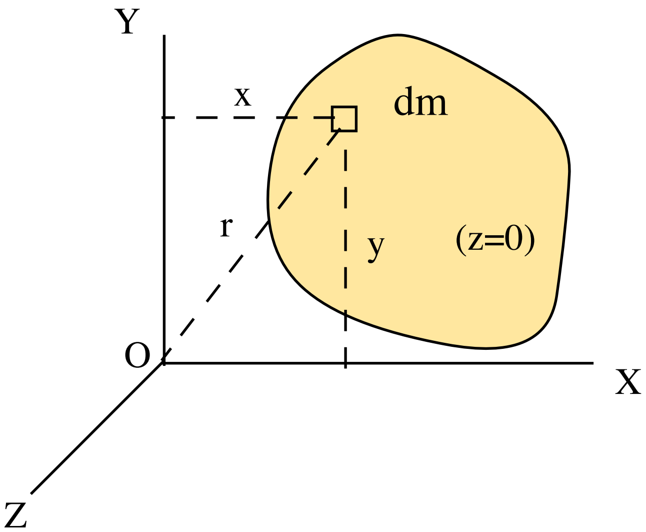
$$I_z = \int_s \left(x^2 + y^2\right) dm$$

•El momento polar de inercia y los de los ejes están relacionados:

$$I_x + I_y + I_z = 2 \cdot I_O$$

Momentos de inercia en el caso plano

Si nuestro sólido está en el plano XY (es decir z=0) las definiciones anteriores se reducen a:

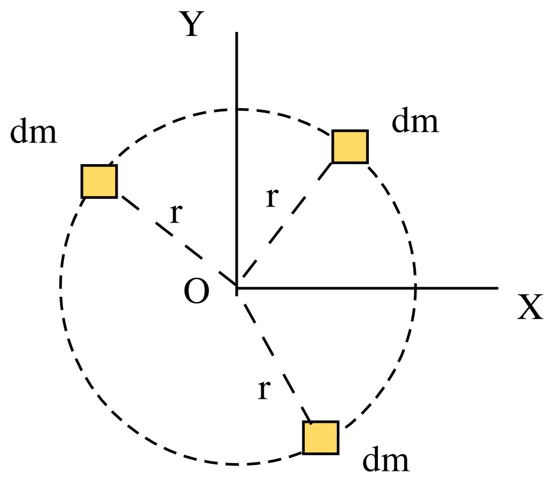


$$I_O = \int_s r^2\, dm = \int_s \left(x^2 + y^2\right) dm = I_z$$

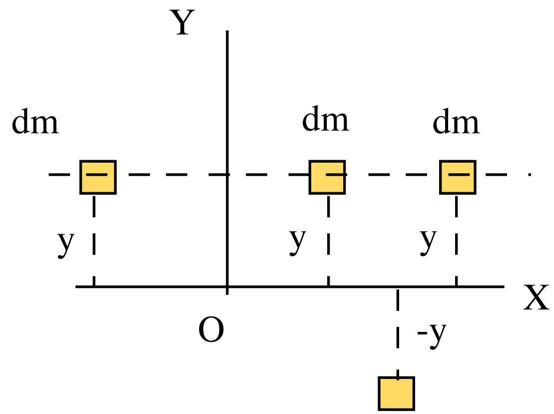
$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int_s y^2\, dm \\ I_y &= \int_s x^2\, dm \end{aligned}\right\} \quad I_z = I_O = I_x + I_y$$

Para calcular I_z, que es la inercia que interviene en las ecs de la dinámica del movimiento plano, a veces conviene hallarlo directamente, haciendo la integral de definición, otras veces es más fácil calcular I_x e I_y y la I_z como su suma.

Notar que cualquier otra posición del sólido en que se conserve la distancia al cuadrado a un eje mantiene el mismo valor del momento de inercia respecto a ese eje.



Es el caso de una rotación del sólido respecto al eje z como se indica en la figura, el I_z (igual al I_O en el plano) de todos los dm es el mismo.



Tampoco se modifica la inercia respecto a un eje si se traslada la masa paralelamente al mismo. El ejemplo muestra dm que dan el mismo I_x

• **Rectángulo** homogéneo de masa m y lados conocidos: Empiezo calculando

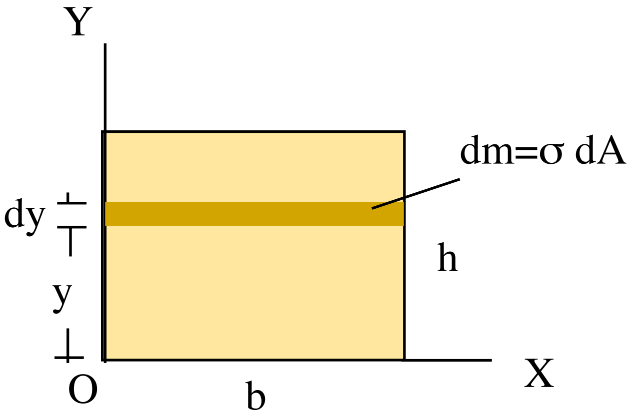
$$I_x = \int_S y^2 \, dm$$

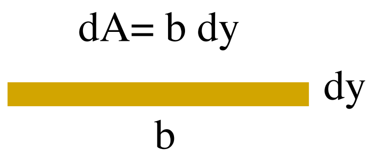
Escribo la masa como el área · densidad por unidad de superficie σ

$m = \sigma A = \sigma \cdot bh$

y análogamente un elemento de masa: $dm = \sigma dA$

Como elemento de masa para hacer la integral, tomo una franja estrecha (diferencial) paralela al eje X a una altura y del mismo.





$dm = \sigma dA = \sigma \, bdy$

$$I_x = \int_0^h y^2 \sigma \, b \, dy = \sigma \, b \int_0^h y^2 \, dy = \sigma \, b \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^h = \frac{1}{3} \sigma \, bh^3 = \frac{1}{3} mh^2$$

Respecto al eje y no hay más que cambiar altura por base: $I_y = \frac{1}{3} m b^2$

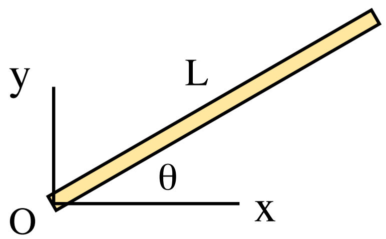
$$I_z \equiv I_O = I_x + I_y = \frac{1}{3} m \left(h^2 + b^2\right) \qquad \boxed{I_O = \frac{1}{3} m \left(h^2 + b^2\right)}$$

• **Una barra** es un rectángulo con una dimensión 0:

$$I_x = 0$$

$$I_y = \frac{1}{3} m L^2$$

$$I_z \equiv I_O = I_x + I_y = \frac{1}{3} m L^2$$



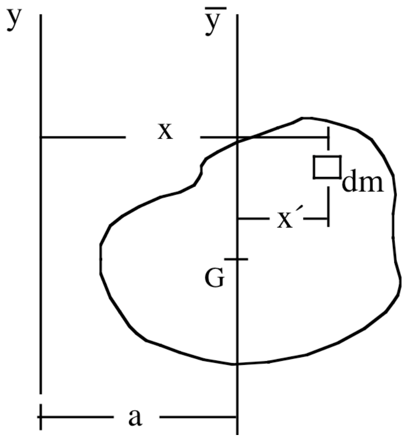
Girada un ángulo respecto al eje z sigue siendo

$$\boxed{I_O = \frac{1}{3} m L^2}$$

(I_x e I_y son distintos)

Teorema de Steiner para momentos de inercia:

Relaciona el momento de inercia respecto a un eje que pase por G con el de un eje paralelo que pasa por otro punto. También vale para momentos de inercia polares



$$I_e = I_{\bar{e}} + m d_{e\bar{e}}^2 \qquad \text{para ejes}$$

distancia entre los dos ejes

$$I_A = I_G + m d_{AG}^2 \qquad \text{para puntos}$$

Demostración para el eje y del dibujo:

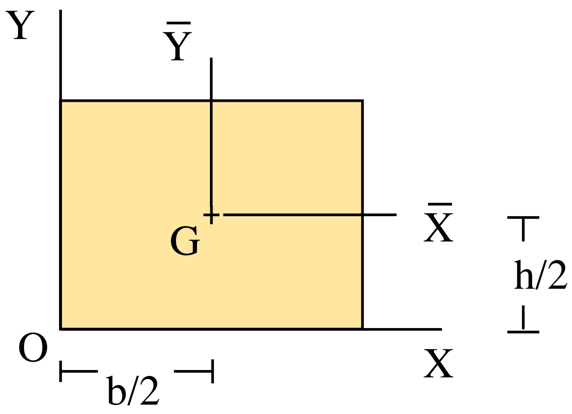
$$I_y = I_{\bar{y}} + m\, a^2$$

$$I_y = \int_s x^2\, dm = \int_s (x' + a)^2\, dm = \int_s x'^2\, dm + \int_s a^2\, dm + 2a \cancel{\int_s x'\, dm} =$$

$$= I_{\bar{y}} + m\, a^2$$

$$\left(x'_G = \frac{\int_s x'\, dm}{m} = 0 \right)$$

Aplicando Steiner calculamos I_G a partir de I_O

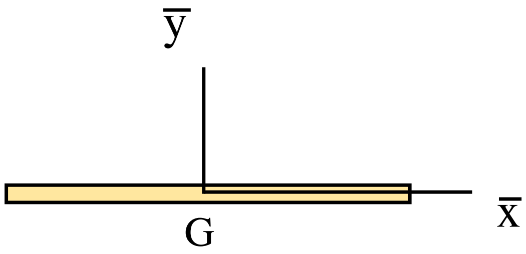


$$I_y = I_{\overline{y}} + md_{y\overline{y}}^2$$

$$\frac{1}{3}mb^2 = I_{\overline{y}} + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow I_{\overline{y}} = \frac{1}{12}mb^2$$

Análogamente $I_{\overline{x}} = \dfrac{1}{12}mh^2$

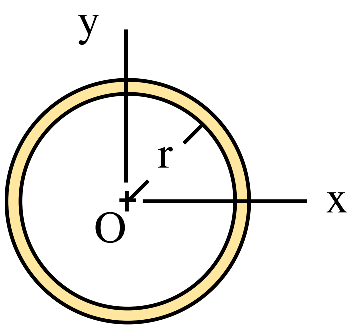
$$\boxed{I_G = \frac{1}{12}m\left(b^2 + h^2\right)}$$



Y en la barra:

$$I_{\overline{y}} = \frac{1}{12}mL^2 \qquad \boxed{I_G = \frac{1}{12}mL^2}$$

• Aro de radio r y masa m:



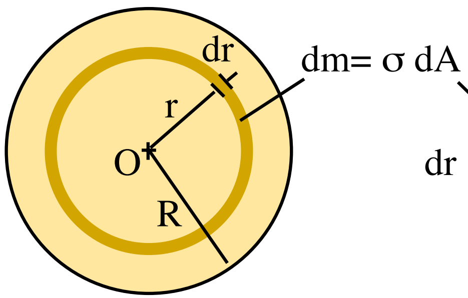
Toda la masa está a la misma distancia (r) de O

$$\boxed{I_O = m\ r^2}$$

Los ejes x y son equivalentes en inercias: “ven” la misma masa a la misma distancia: $I_X=I_Y$

$$I_O = I_x + I_y \rightarrow I_x = \frac{1}{2} m\ r^2$$

• Disco de radio R y masa m: $I_O = \int r^2\, dm$



Para hacer esa integral elijo como elemento de área un aro de radio r y espesor dr que contiene un dm:

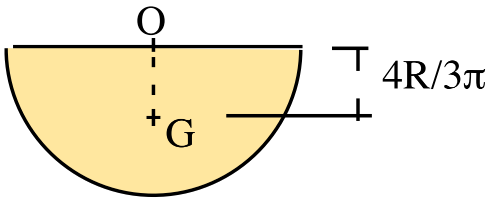
$$dm = \sigma dA = \sigma\ 2\pi r dr \qquad \left(m = \sigma \pi R^2\right)$$

$$I_O = \int r^2\, dm = \sigma 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4}\sigma 2\pi R^4$$

Y expresando el resultado en función de la masa total:

$$\boxed{I_O = \frac{1}{2} m R^2}$$

Como en el aro: $I_x = I_y = \dfrac{1}{4} m r^2$

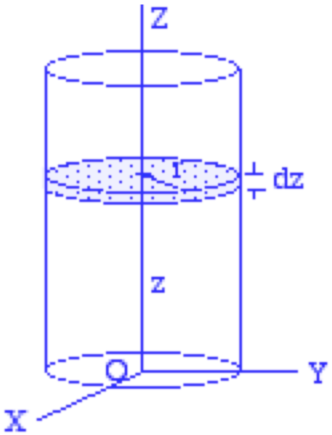


Para cualquier fracción de disco de radio R y de masa m, la expresión de la inercia respecto a O es la misma que para el disco completo:

$$I_O = \frac{1}{2} mR^2$$

Pero puede ser que necesitemos I_G; aplicando Steiner:

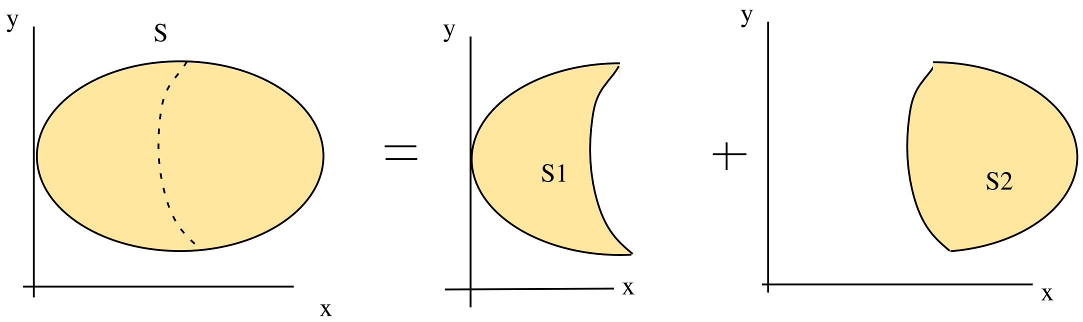
$$I_O = I_G + m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \rightarrow \boxed{I_G = I_O - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2}$$



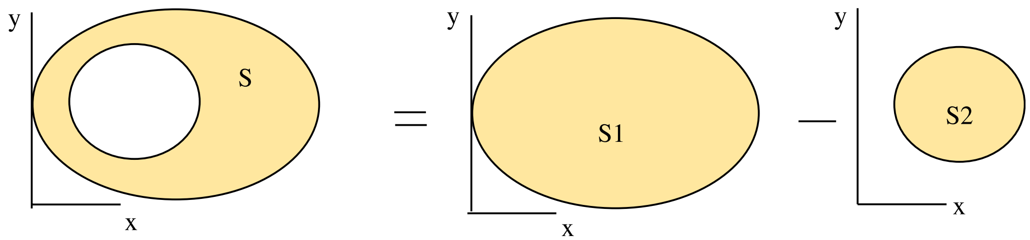
Un cilindro (masa m, radio r)está hecho a base de discos iguales centrados a lo largo del eje Z en la figura. La inercia respecto a Z es en este caso como la de un disco :

$$\boxed{I_Z = \frac{1}{2} mr^2}$$

Inercia de un cuerpo compuesto:



$$S = S1 + S2 \quad \rightarrow \quad I_y = \int_S x^2\, dm = \int_{S1} x^2\, dm + \int_{S2} x^2\, dm = I_{y1} + I_{y2} \rightarrow \boxed{I_S = I_{S1} + I_{S2}}$$



$$S = S1 - S2 \quad \rightarrow \quad \boxed{I_S = I_{S1} - I_{S2}}$$

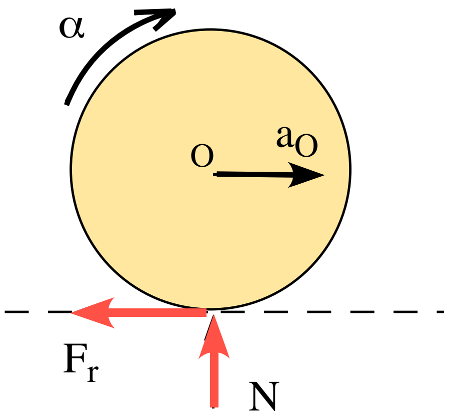
Pasos a seguir para analizar uno o varios sólidos:

• Aislar cada sólido y hacer el esquema de fuerzas (como en estática)

• Escribir las ecs. de la dinámica para cada uno

• Relaciones cinemáticas entre aceleraciones y aceleraciones angulares (y en velocidades)

• El sólido puede presentar varias posibilidades de movimiento (vuelco o/y deslizamiento). Cada elección supone alguna nueva ecuación.



• Si el disco r s d hay una relación entre a_O y α:

$a_O = \alpha \cdot r$ pero $F_r < \mu_e N$

• Si el disco está deslizando no hay relación entre a_O y α:

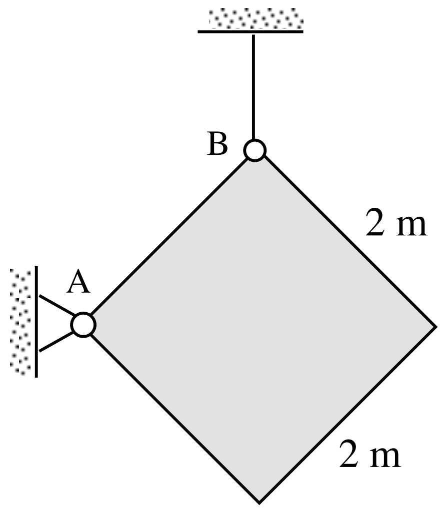
$a_O \neq \alpha \cdot r$ pero $F_r = \mu_d N$

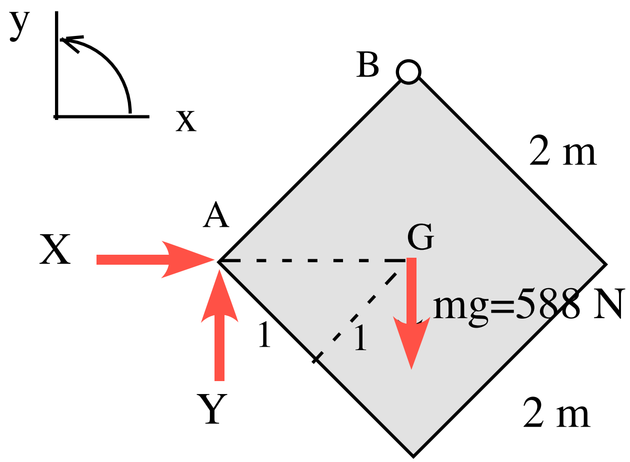
• La conservación de la energía (y/o de la cantidad de movimiento) puede ser necesaria para determinar el estado de velocidades en el instante de interés

Ejemplo:

La placa de la figura tiene una masa de 60 kg. Se pide, en el instante en que se corta el hilo que la sujeta en B:

a) La aceleración angular de la placa
b) La reacción en A





A punto fijo

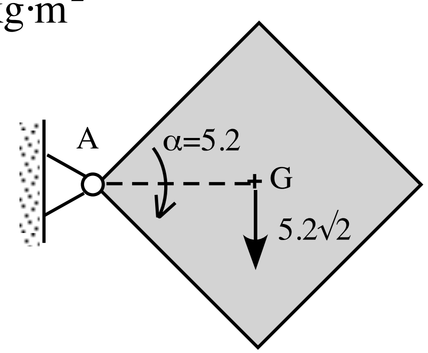
Leyes dinámica:

$$\sum F_x = m a_{Gx} \Big) \; X = 60 a_{Gx}$$

$$\sum F_y = m a_{Gy} \Big) \; Y - 588 = 60 a_{Gy}$$

$$M_A = I_A \alpha \Big) -588 \cdot \sqrt{2} = 160\alpha \quad \rightarrow \quad \underline{\alpha \simeq -5.2 \text{ rad/s}^2}$$

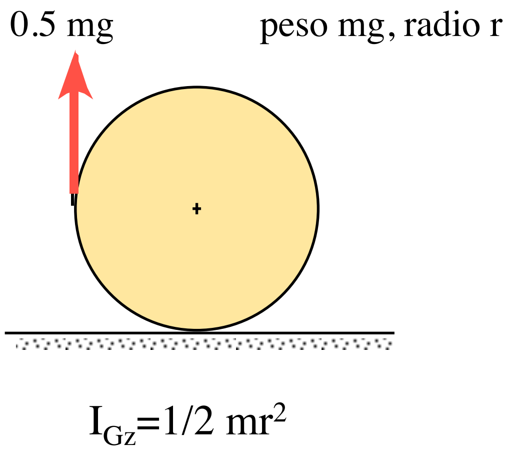
$$I_A = \frac{1}{3} 60\left(2^2 + 2^2\right) = 160 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$



Relaciones cinemáticas:

$$\vec{a}_G = \cancel{\vec{a}}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AG} - \cancel{\omega}^2 \overrightarrow{AG} = -5.2 \, \vec{k} \wedge \sqrt{2} \, \vec{i} = -5.2\sqrt{2} \, \vec{j}$$

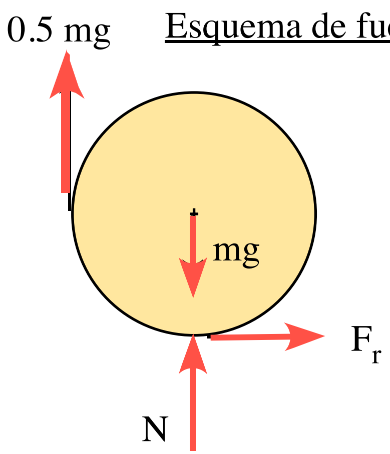
Sustituyendo en las dos primeras ecs: $\underline{X = 0 \qquad Y \simeq 146.8 \text{ N}}$

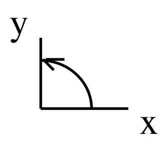


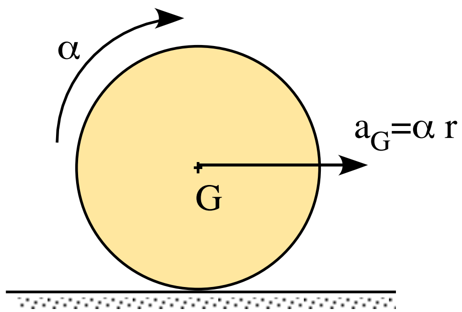
El cilindro de la figura rueda sin deslizar (**r.s.d.**) en el suelo. Hallar :

a) la aceleración angular
b) El coeficiente mínimo de fricción requerido para que eso ocurra.

Esquema de fuerzas:







r.s.d.

Esquema de aceleraciones

Ecs dinámica:

$$\sum F_x = m a_{Gx} \Big)\ F_r = m a_{Gx} = m\cdot\alpha r$$

$$\sum F_y = m a_{Gy} \Big)\ N + 0.5mg - mg = m a_{Gy} = 0$$

$$M_G = I_G\alpha \Big)\ r\cdot F_r - 0.5mg\cdot r = -\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\alpha$$

Inecs: $N \geq 0 \quad F_r < \mu_e N$

Resolviendo :

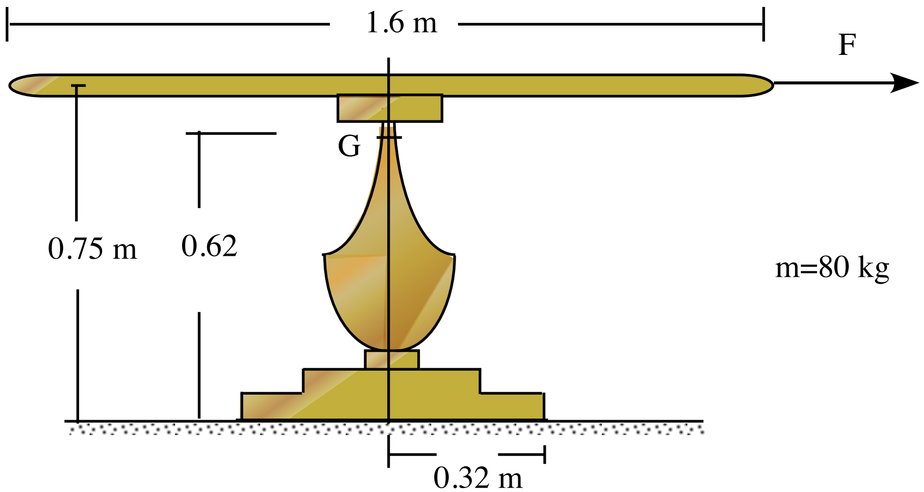
$$\alpha = \frac{1}{3}\frac{g}{r} \qquad N=0.5mg \qquad F_r = \frac{1}{3}mg$$

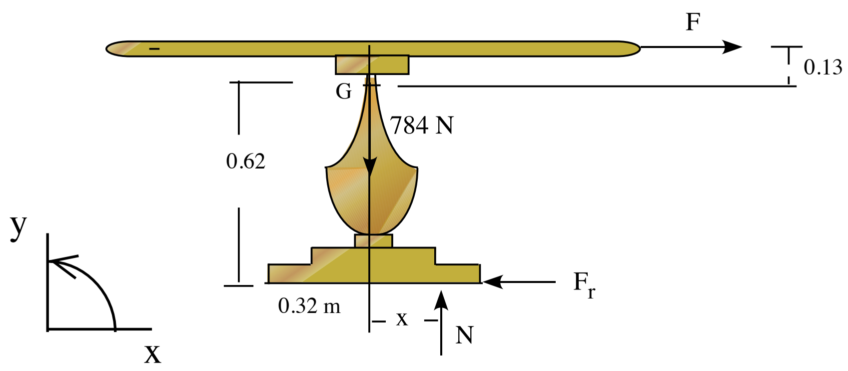
b) r s d : $F_r < \mu_e N \rightarrow \mu_e > \dfrac{F_r}{N} = \dfrac{2}{3}$

Se quiere mover una mesa de 80 kg de masa haciendo una fuerza F como se indica en la figura. El coeficiente de rozamiento estático es 0.25 y el dinámico 0.2.

El momento de inercia respecto al eje perpendicular al plano del movimiento que pasa por G es: I_G=16 kgm^2

Determinar cuál es la mínima fuerza que hay que hacer y la aceleración de G cuando se inicia ese movimiento





Para iniciar el movimiento:

$$\sum F_x = 0 \big) F - F_r = 0$$

$$\sum F_y = 0 \big) N - 784 = 0$$

$$M_G = 0 \big) Nx - 0.62 \cdot F_r - 0.13 \cdot F = 0$$

$$F_r \leq \mu_e N = 0.25N \quad N \geq 0$$

$$-0.32 \text{ m} \leq x \leq 0.32 \text{ m}$$

Supongo que empieza a deslizar:

$F_r = 0.25 \cdot 784 = 196 \quad x = 0.1875$ m (N dentro de la base)

$F_{mín} = 196$ N

Calculo ahora la aceleración mediante las ecs de la dinámica:

Está deslizando: $F_r = \mu_d N = 0.2N$ sin volcar, no está rotando $\quad a_{Gy} = 0 \quad a_{Gx} = a_G \quad \alpha = 0$

$$\sum F_x = ma_{Gx} \big) F - 0.2N = 80a_G$$

$$\sum F_y = ma_{Gy} \big) N - 784 = 0 \rightarrow \underline{N = 784}$$

$$M_G = I_G \alpha \big) Nx - 0.62 \cdot 0.2 \cdot N - 0.13 \cdot F = 0$$

Sustituyendo F=196 N, se obtiene: $a_G = 0.49 \text{ m/s}^2 \quad (\text{y } x = 0.1565\text{m})$

En función de F:

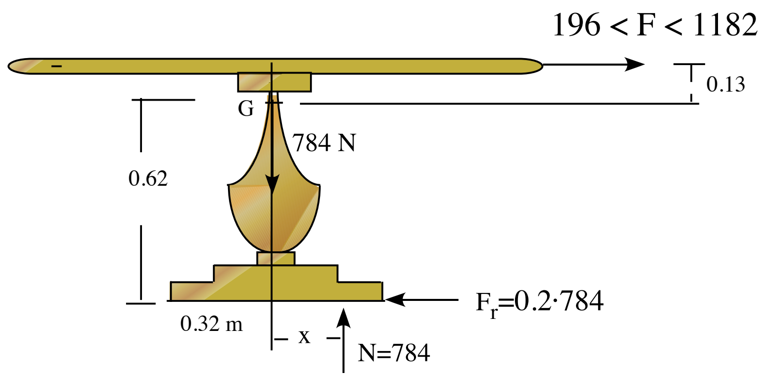
$$\sum F_x = ma_{Gx} \Big) F - 0.2N = 80a_G \rightarrow a_G = 0.0125F - 1.96$$

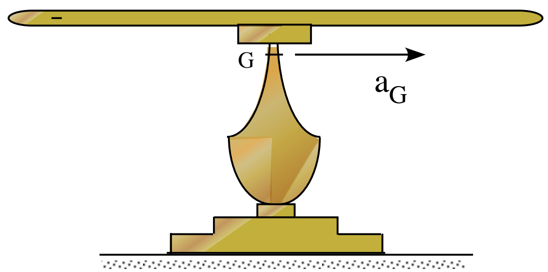
$$\sum F_y = ma_{Gy} \Big) N - 784 = 0 \rightarrow \underline{N = 784}$$

$$M_G = I_G\alpha \Big) Nx - 0.62 \cdot 0.2 \cdot N - 0.13 \cdot F = 0 \qquad \rightarrow x = \frac{0.13F + .62 \cdot 156.8}{784}$$

Si aumentamos F, la aceleración aumenta y también la x, hasta que ésta alcanza su valor límite:

x=0.32 m $\rightarrow$ F=1182 N $\quad a_G = 12.8 \text{ m/s}^2$ $\quad$ e iniciaría un vuelco





(Todos los puntos la misma aceleración)

Si aplicamos una fuerza de 1200 N :

(he elegido $\vec{\alpha} = -\alpha\,\vec{k}$)

$$\sum F_x = 0)\; 1200 - F_r = 80 a_{Gx}$$

$$\sum F_y = 0)\; N - 784 = 80 a_{G_y}$$

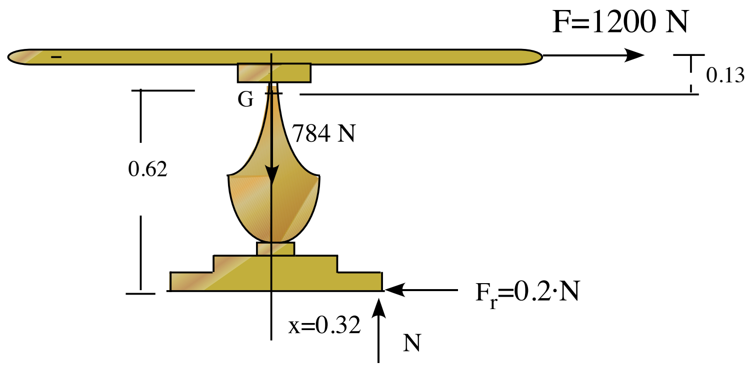
$$M_G = 0)\; N{\cdot}0.32 - 0.62{\cdot}F_r - 0.13{\cdot}1200 = -16\alpha$$

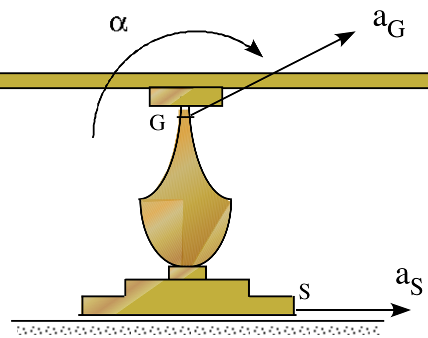
$$F_r = 0.2N$$

Cinemática : (Reposo v's=0)

$$\vec{a}_S = a_S\,\vec{i}$$

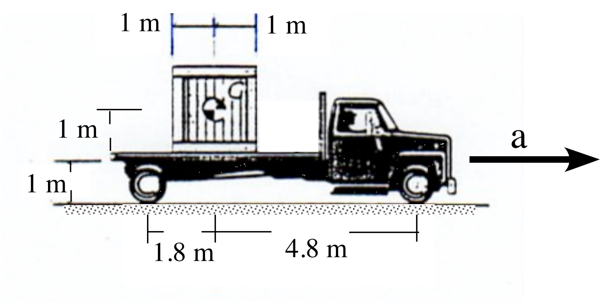
$$\vec{a}_G = \vec{a}_S + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{SG} - \omega^2\ \overrightarrow{SG} \begin{cases} a_{Gx} = a_S + 0.62\alpha \\ a_{Gy} = 0.32\alpha \end{cases}$$

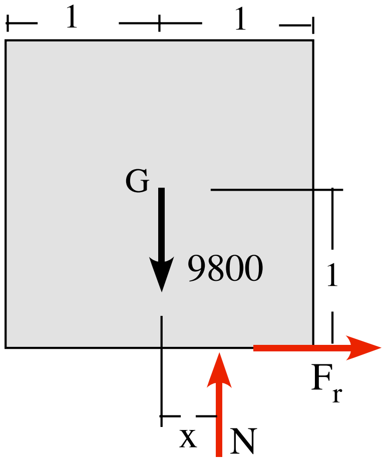




$$\alpha = 0.11\ \text{rad/s}^2 \quad N{=}786.8\ \text{N} \quad F_r = 157.4\text{N} \quad a_S = 12.9\ \text{m}/\text{s}^2 \quad \vec{a}_G = 13\vec{i} + 0.035\vec{j}$$

Una caja de 1000 kg descansa en la plataforma de un camión de tracción trasera de masa 2500 kg, cuyo centro de masa está situado 2 m detrás del eje delantero y 0.85 m por encima de la calzada. El coeficiente de rozamiento estático entre caja y plataforma es 0.25. Si la caja no ha de deslizar ni volcar, hallar la aceleración máxima que puede llevar el camión y el mínimo coeficiente estático entre neumáticos y calzada que permita alcanzar esa aceleración.





La caja ni desliza ni vuelca, se traslada horizontalmente con el camión: $\vec{a}_G = a\,\vec{i} \qquad \vec{\alpha} = \vec{0}$

Ecuaciones dinámica:

$$\sum F_x = ma_{Gx}\,)\; F_r = 1000\,a \qquad [1]$$

$$\sum F_x = ma_{Gy}\,)\; N - 9800 = 0 \;\rightarrow N{=}9800 > 0$$

$$M_G = I_G\alpha)\; N{\cdot}x + F_r{\cdot}1 = 0 \qquad [2]$$

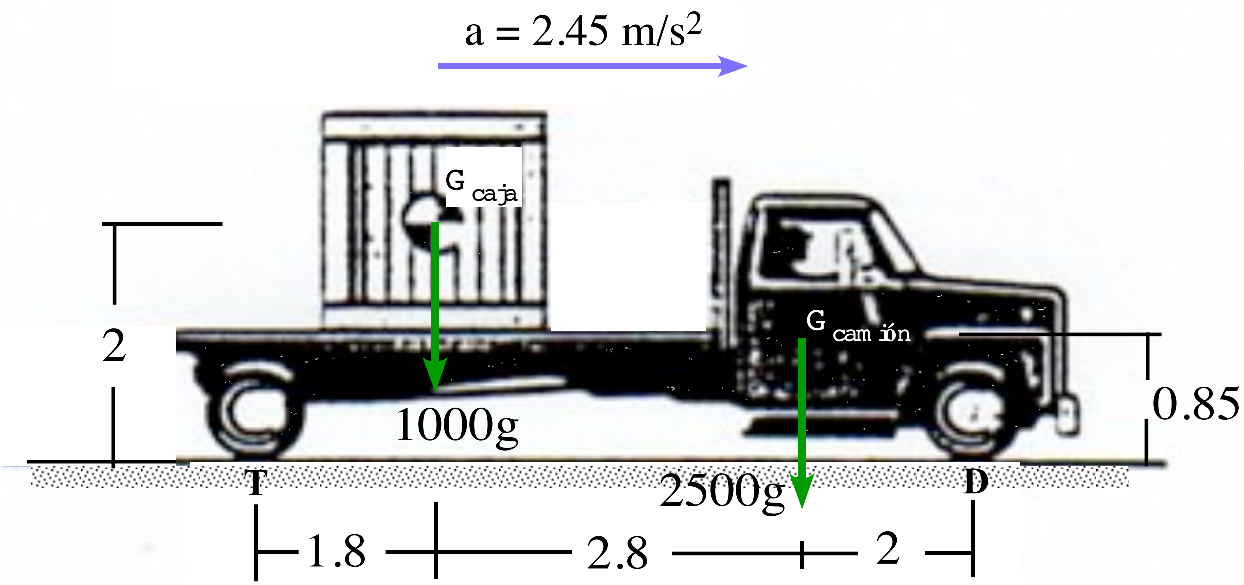
$$F_r \le \mu_e N = 0.25{\cdot}N \qquad -1 \le x \le 1$$

2 ecuaciones
3 incógnitas

Cuando la aceleración a aumenta llega un momento en que o bien empieza a deslizar o inicia un vuelco. Supongo que va a deslizar: $F_r = 0.25{\cdot}N = 2450 \quad [3]$

Resolviendo: $x = -0.25$ (cumple la inec.) $a_{máx} \equiv a = 2.45\ \text{m/s}^2$

Cumple la inecuación para x, luego esta es la solución correcta

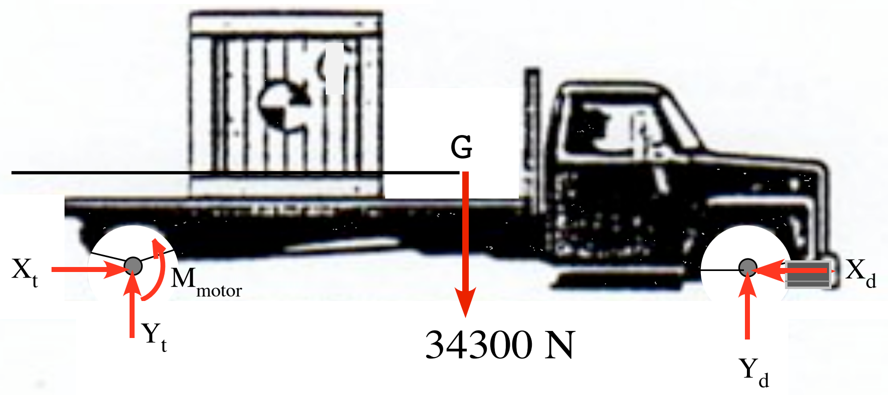


Caja y camión se mueven juntos. El c.d.m. del conjunto (desde T):

$$x_G = \frac{1000\cdot 1.8 + 2500\cdot 4.6}{3500} = 3.8 \text{ m}$$

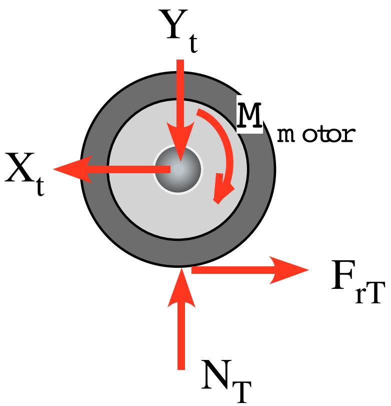
$$y_G = \frac{1000\cdot 2 + 2500\cdot 0.85}{3500} = 1.178 \text{ m}$$

Peso conjunto: 3500g = 34300 N



•Tracción trasera : par del motor sólo aplicado a las ruedas traseras

•Si las ruedas son de **masa despreciable**: m=0, I_G=0 $\longrightarrow$ $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ $\quad M_G = 0$

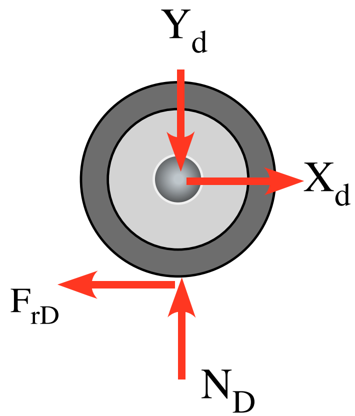


Trasera:

$M_G = 0)\ r \cdot F_{rT} = M_{motor}$

$\Sigma F_x = 0)\ X_t = F_{rT}$

$\Sigma F_y = 0)\ Y_t = N_T$

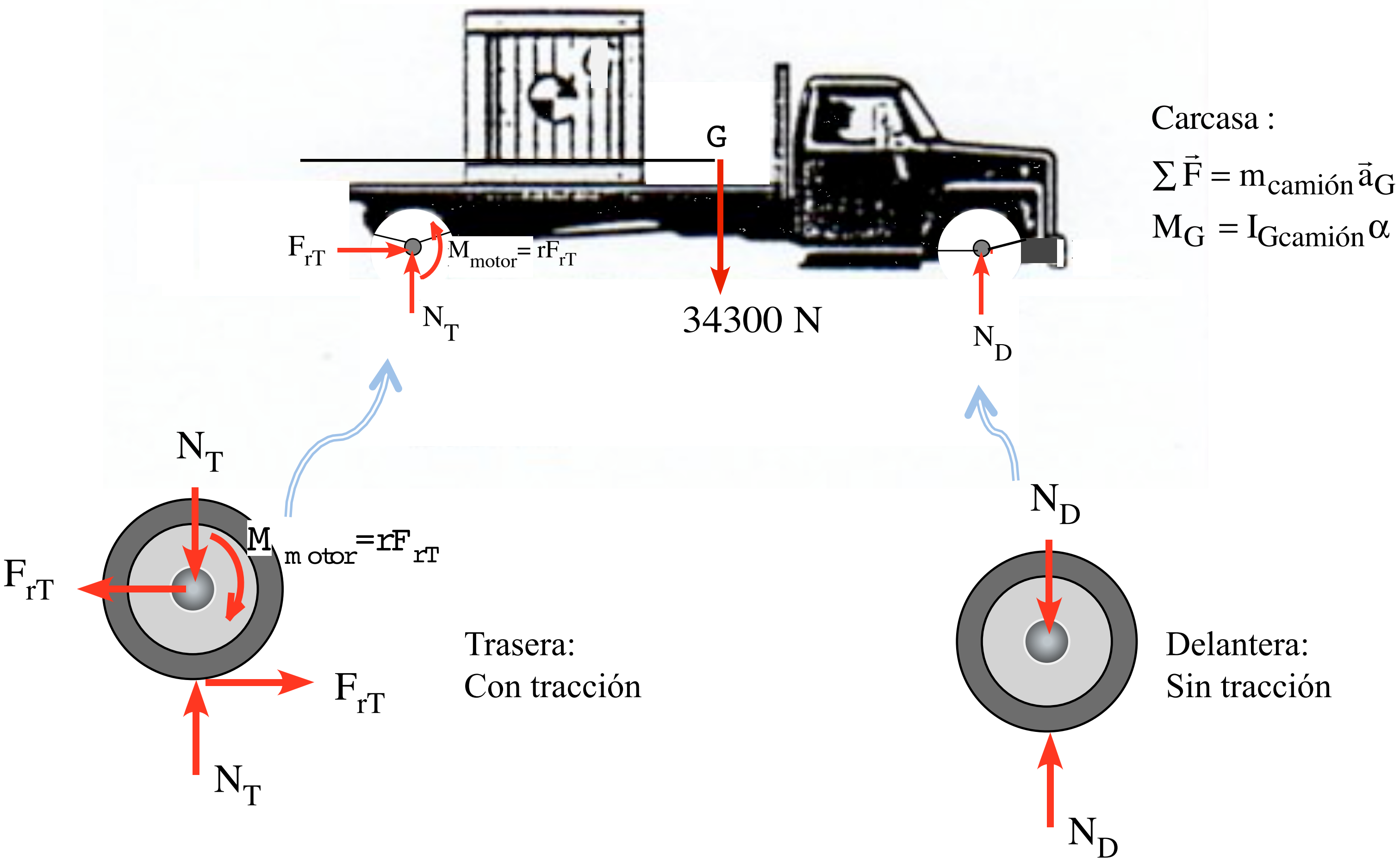


Delantera:

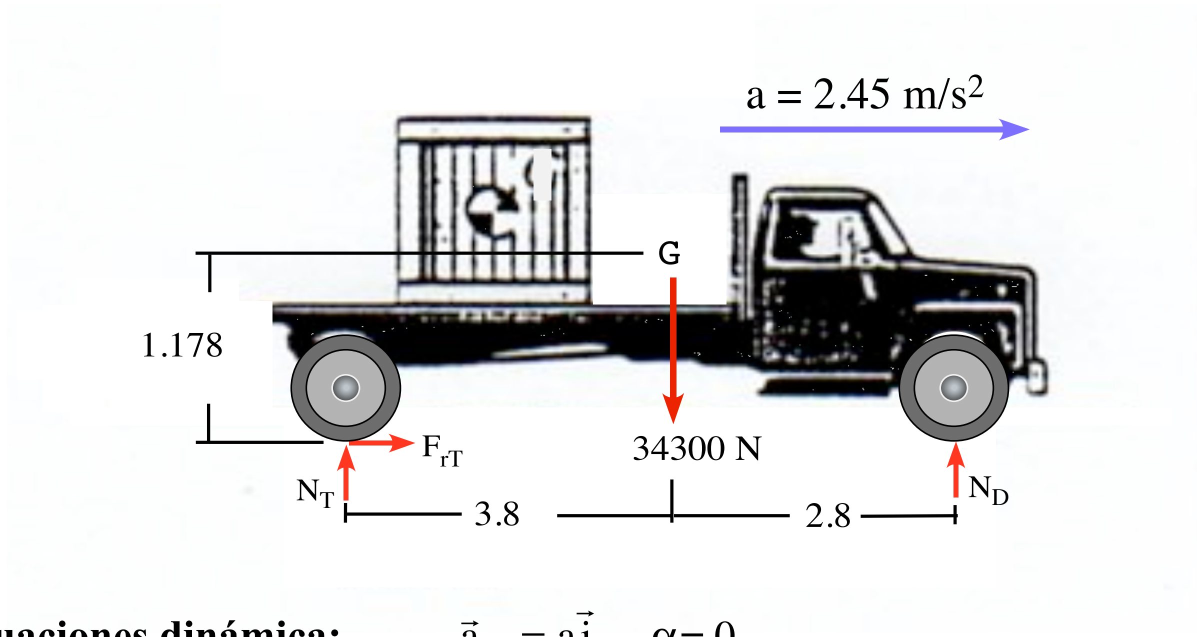
$M_G = 0)\ F_{rD} = 0$

$\Sigma F_x = 0)\ X_D = 0$

$\Sigma F_y = 0)\ Y_D = N_D$



Una vez que sabemos como son las fuerzas en cada rueda, y como no aportan masa ni inercia, es más cómodo aplicar las ecuaciones de la dinámica al sistema completo



Ecuaciones dinámica: $\vec{a}_G = a\vec{i} \qquad \alpha = 0$

$$\sum F_x = m a_{G_x} \Big) \; F_{rT} = 3500 \cdot a \quad [1]$$

$$\sum F_y = m a_{G_y} \Big) \; N_T + N_D = 34300 \quad [2] \qquad N_D \geq 0 \quad N_T \geq 0 \qquad F_{rT} \leq \mu_e N_T$$

$$M_G = I_G \alpha \big) \; 1.178\ F_{rT} + 2.8\ N_D - 3.8\ N_T = 0 \quad [3]$$

Para $a = 2.45\ \text{m/s}^2 \rightarrow F_{rT} = 8575$

$[2] y [3] \rightarrow N_T = 16082\ \text{N} \qquad N_D = 18218\ \text{N}$ (ambas mayores que 0)

El coeficiente de rozamiento con el suelo para que el camión no deslice: $F_{rT} < \mu_e N_T \rightarrow \mu_e > \dfrac{8575}{16082} \simeq 0.54$