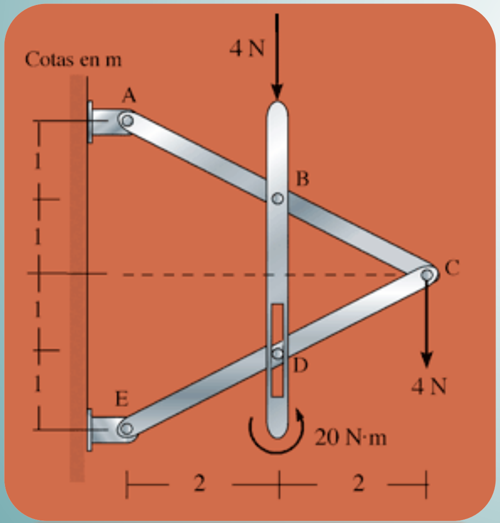
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

open course ware

# Mecánica

## Tema 10. Teoremas de conservación.




**Cecilia Pardo Sanjurjo**

DPTO. DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

# Teoremas de conservación

En el tema anterior se han deducido los teoremas fundamentales de la Dinámica y los teoremas de conservación.

Dedicaremos éste a aplicarlos en algunos sistemas

## Teorema del impulso en sistemas de puntos y/o sólidos

$$\sum \vec{F}_i dt = d\vec{p} \qquad \vec{p}=m\vec{v}_G \qquad \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_i \, dt = m\vec{v}_{G2} - m\vec{v}_{G1}$$

## Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \quad \rightarrow \quad m\vec{v}_G = \overrightarrow{cte}$$

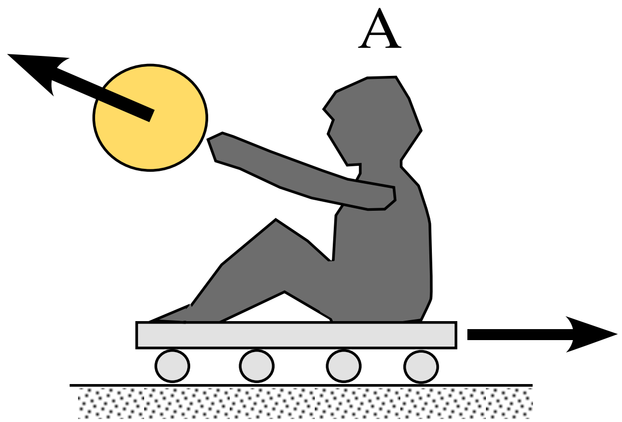
Si $\vec{v}_G = \vec{0}$ en un instante, la posición de G se mantiene constante en el tiempo

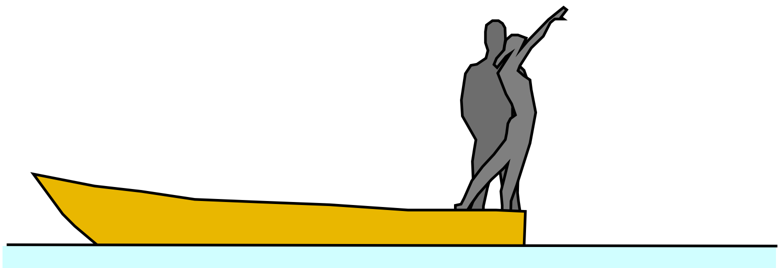
Puede ocurrir que sólo se conserve la cantidad de movimiento en una componente:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \rightarrow \quad mv_{Gx} = cte$$

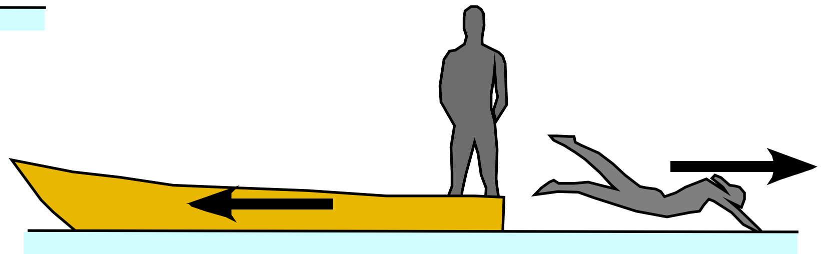
Si $v_{Gx} = 0$ en un instante $\rightarrow \quad x_G = cte$

La cantidad de movimiento del balón en la dirección horizontal se compensa con la del conjunto niño y carrito. No hay fuerzas horizontales

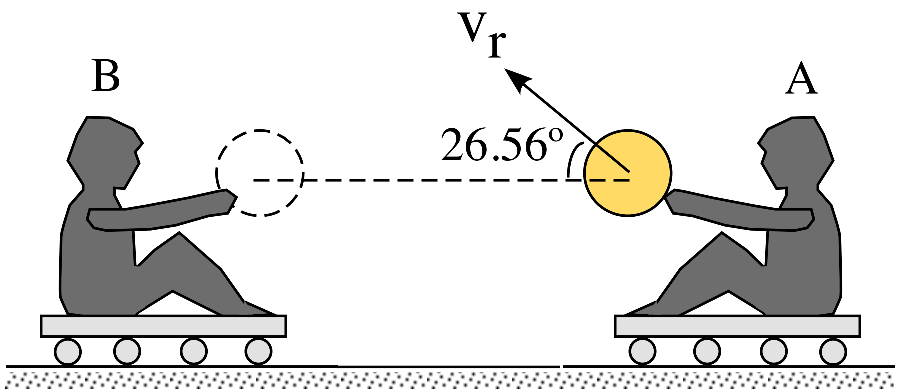


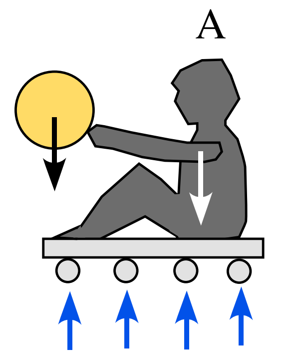



Lo mismo ocurre cuando alguien se lanza al agua desde una lancha



86) El niño A sobre una plataforma con ruedas lanza una pelota de 2 kg de masa a otro niño idéntico sentado en otra plataforma idéntica. La pelota es lanzada con una velocidad relativa al niño de 4.47 m/s. Si la masa conjunta del niño y de la plataforma es de 30 kg, hallar la velocidad del carrito B cuando ha cogido la pelota.





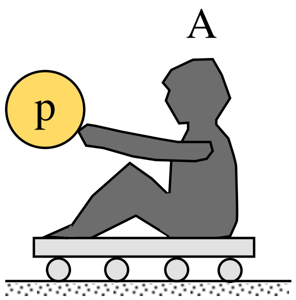

Esquema de fuerzas

En cualquier instante sólo hay fuerzas **verticales** actuando sobre el sistema pelota + niño-carro (A)

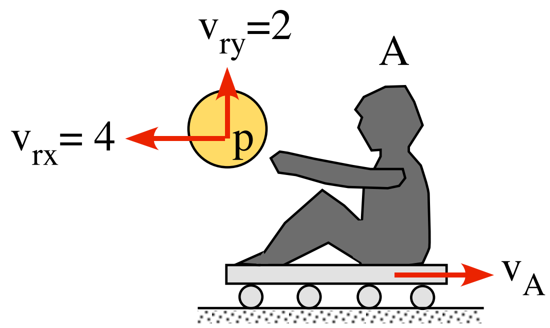
Se conserva la cantidad de movimiento horizontal: $p_x$=cte

$$\left(m_p v_{px} + m_A v_{Ax}\right)_1 = \left(m_p v_{px} + m_A v_{Ax}\right)_2$$

(velocidades absolutas)



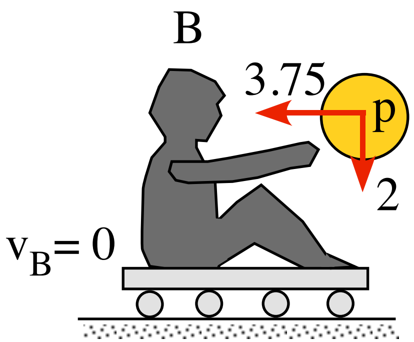

Instante 1: reposo




Instante 2: A tiene una velocidad absoluta $v_A$ y la pelota sale con velocidad absoluta

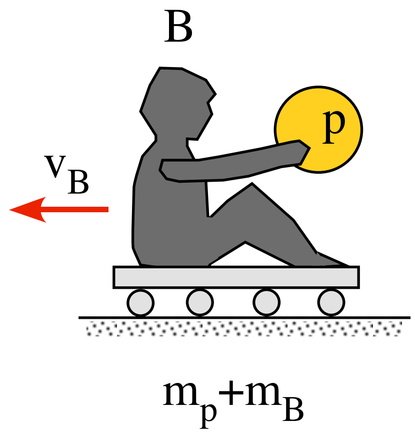
$$\vec{v}_p = \vec{v}_r + \vec{v}_a = \left(v_A - 4\right)\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$0 = m_p\left(v_A - 4\right) + m_A v_A \rightarrow v_A = \frac{4m_p}{m_p + m_A} = 0.25 \text{ m / s} \qquad v_{px} = -3.75 \text{ m / s}$$




Justo antes de recibir la pelota B está en reposo, mientras la pelota llega con $v_{px}$= -3.75 m/s

$$p_x = m_B \cdot 0 - 3.75 m_p$$




Cuando el niño la coge pelota y niño se mueven con una $v_B$ común

$$p_x = -\left(m_B + m_p\right) v_B$$

Como antes $p_x$=cte:

$$-3.75 m_p = -\left(m_B + m_p\right) v_B \rightarrow v_B = \frac{m_p}{\left(m_B + m_p\right)} 3.75 = \frac{2}{32} 3.75 \simeq 0.234 \text{ m / s}$$

## Teorema del momento angular

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \rightarrow \quad \vec{M}_A dt = d\vec{L}_A \quad \text{(A=pto fijo o G)}$$

Integrando en el tiempo entre los instantes $t_1$ y $t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_A \, dt = \vec{L}_{A_2} - \vec{L}_{A_1}$$

## Conservación del momento angular

Si el momento de las fuerzas es 0 en todo el intervalo temporal, el momento angular se conserva

$$\vec{M}_A = \vec{0} \rightarrow \quad \vec{L}_{A_2} = \vec{L}_{A_1}$$

Puede ser que sólo sea cero una componente del momento, en cuyo caso se conserva únicamente la componente correspondiente del momento angular

$$M_{Ax} = 0 \rightarrow \quad L_{Ax_2} = L_{Ax_1}$$

En sistemas planos sólo tenemos una componente perpendicular al plano.

$$z)\ M_A = 0 \rightarrow \ L_{A_2} = L_{A_1}$$

El momento angular de una masa puntual m que se encuentra en la posición P moviéndose con velocidad v se calcula como

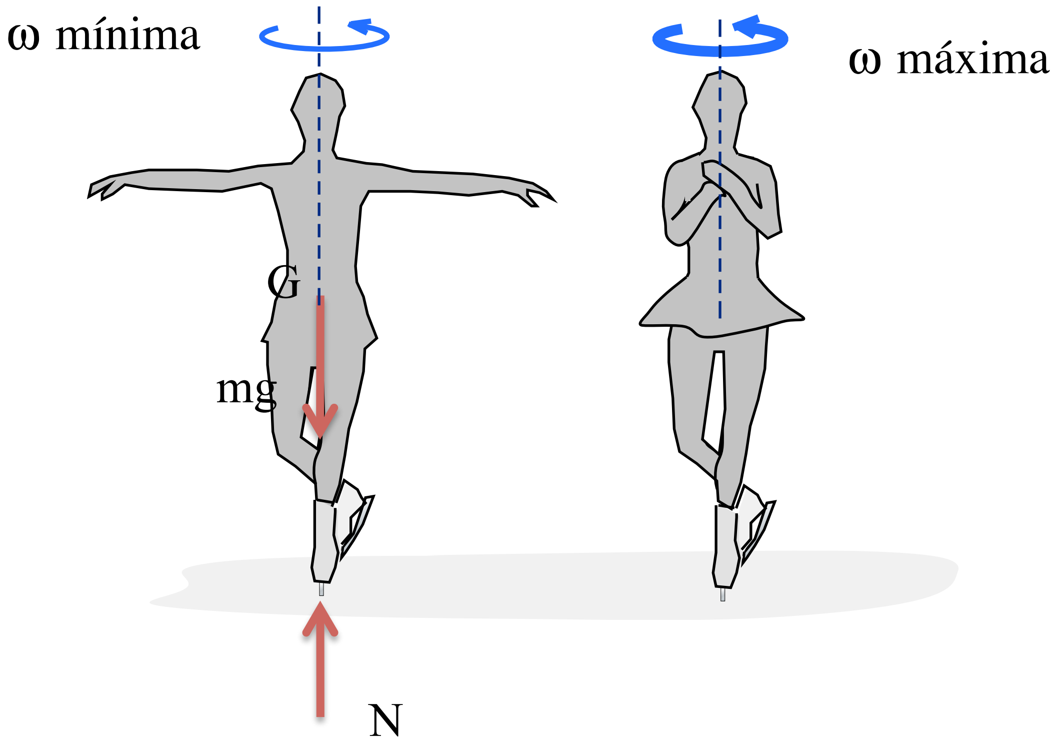
$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AP} \wedge m\vec{v}$$

Y el de un sólido rígido $\vec{L}_A = I_A\vec{\omega}$ (con A= pto fijo o G)

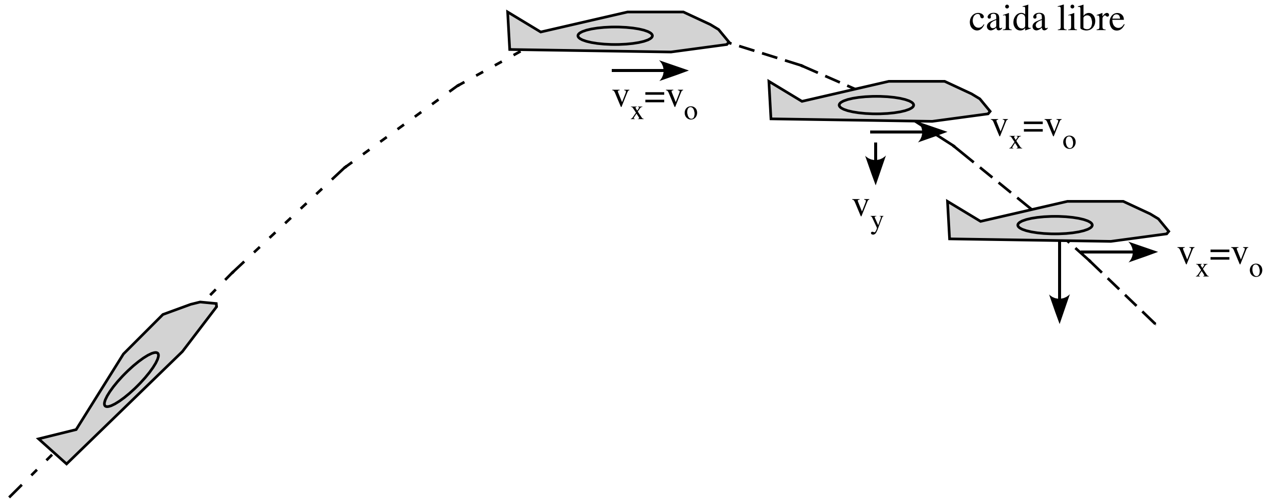
Ejemplo: $M_G = 0 \rightarrow L_G = I_G\omega = cte$

Brazos extendidos:
Inercia máxima

Brazos plegados:
Inercia mínima



Ejemplo: En un episodio de CSI Miami les interesa hacer una reconstrucción de un crimen que ocurrió en un vuelo en caída libre.

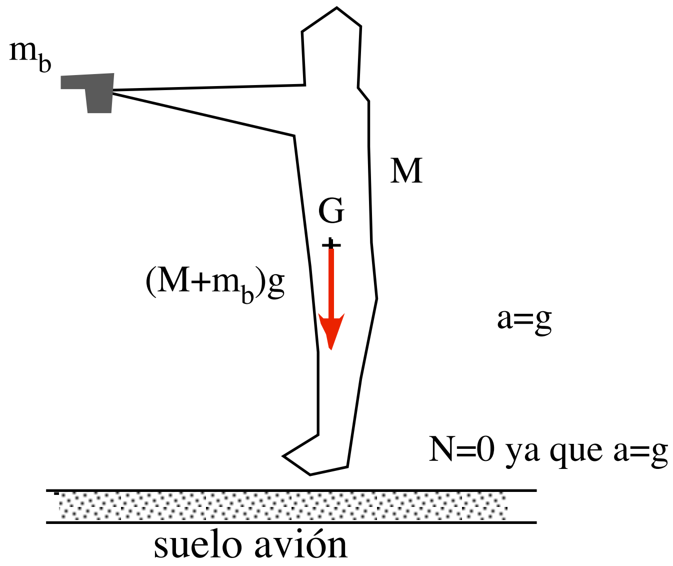



Al llegar a cierta altura, el avión apaga motores y cae siguiendo una trayectoria parabólica. Durante esa caída libre, el CSI Jesse Cardoza dispara una pistola sobre un figurín.

En la fase de caída libre (a=g) la normal es 0

$$\sum F_y = ma_{Gy} \Big) N - (M + m_b)g = (M + m_b)g$$

$$m_b = 10 \text{ g} \ll M = 90 \text{ kg}$$




Su efecto en el peso y en la posición de G es despreciable, podríamos eliminarla de este esquema

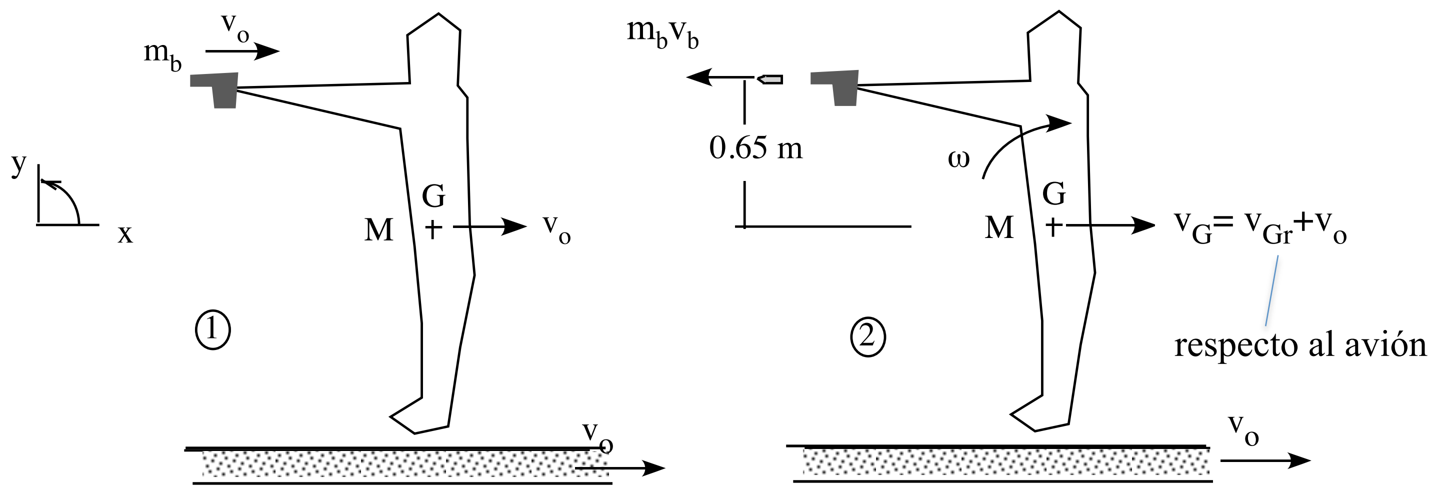
La velocidad de salida de la bala respecto a la pistola es la dada por el fabricante o nominal ($v_{bn}$)

En el sistema hombre con pistola y bala:

No hay fuerzas horizontales $\longrightarrow$ se conserva la componente horizontal de la cantidad de movimiento del sistema

$M_G=0$ $\longrightarrow$ se conserva el momento angular respecto a G del sistema

Sólo se indican las componentes horizontales de la velocidad ( $v_y$ son las mismas para todos los cuerpos y no van a intervenir)




• **Conservación cantidad de movimiento horizontal:**

$$\left.\begin{aligned}(p_x)_1 &= m_b v_o + M v_o \\ (p_x)_2 &= m_b v_b + M v_G\end{aligned}\right\} m_b v_o + M v_o = m_b v_b + M v_G$$

Las velocidades de G y b absolutas en el instante 2:

$$v_G = v_{G_r} + v_o \qquad \vec{v}_b = \vec{v}_{bn} + \vec{v}_{b_a} \simeq \left(-v_{bn} + v_o\right)\vec{i}$$

$$v_{G_r} = \frac{m_b}{M} v_{bn}$$

Velocidad horizontal que adquiere G respecto al avión

• **Conservación del momento angular:**

$$\left.\begin{aligned}(L_G)_1 &= -\ 0.65\cdot m_b v_o \\ (L_G)_2 &= 0.65\cdot m_b v_b - I_G\omega\end{aligned}\right\} -\ 0.65\cdot m_b v_o = 0.65\cdot m_b\left(-v_{bn} + v_o\right) - I_G\omega$$

$$\omega = \frac{0.65 m_b v_{bn}}{I_G}$$

Velocidad angular que adquiere Jesse como consecuencia del disparo

(Las $v_y$ de la caída libre darían la misma contribución a $L_1$ y a $L_2$ y se cancelarían al plantear $L_1=L_2$)

Datos:

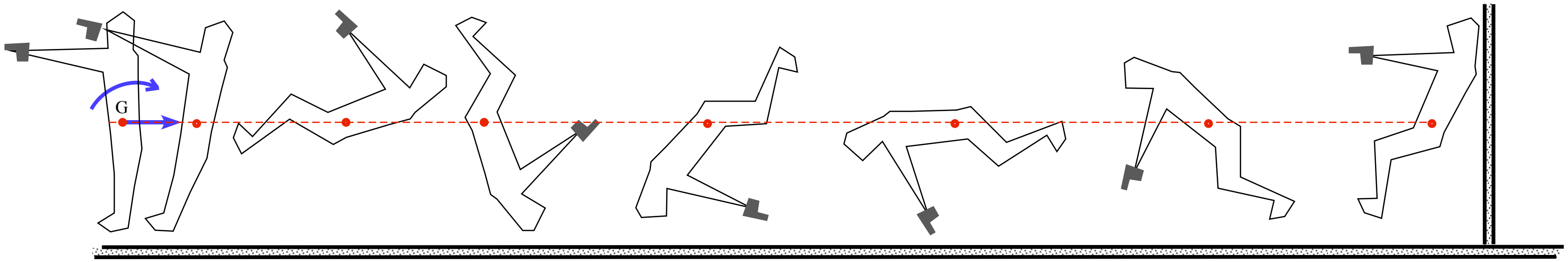
Bala: $m_b = 10\text{g}$ $v_{bn} = 400$ m/s (velocidad nominal de salida bala. relativa a la pistola)

Jesse con pistola: M=90 kg $I_G = 27\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ $M + m_b \simeq M$

$$v_{Gr} \simeq \frac{10^{-2}400}{90} \simeq 0.045\ \text{m/s}$$

$$\omega = \frac{0.65\cdot 10^{-2}400}{27} \simeq 0.1\ \text{rad/s}$$

Como la única fuerza en el movimiento que sigue es el peso, ($F_x$=0 y $M_G$=0 ), el movimiento horizontal de G es uniforme y el movimiento de rotación es también lo es.




Con estos resultados:

distancia recorrida **dentro del avión** en un tiempo t: $x_r(m) = v_{Gr} t = 0.045\ t$

Ángulo girado : $\theta(rad) = \omega\ t = 0.1\ t$

En la película daba una vuelta completa, así que la distancia desde el punto de disparo hasta la pared donde chocó (en donde buscarán transferencias):

$$1 \text{ vuelta } (2\pi \text{ rad}) \text{ en } t= 63 \text{ s} \rightarrow x_r = 2.8 \text{ m}$$

Como Jesse no es tan rígido, se dobla un poco y $I_G$ se reduce un poco, aumentando algo la velocidad angular. No se ha tenido en cuenta.

**Teorema de la energía:** $\boxed{dW = dE_c}$ en forma diferencial

$$\int_1^2 dE_c = \int_{1\to 2} \vec{F}\bullet d\vec{r} \Rightarrow \boxed{E_{c_2} - E_{c_1} = \int_{1\to 2} \vec{F}\bullet d\vec{r}}$$

El trabajo realizado por las fuerzas aplicadas un conjunto de sólidos a lo largo de un desplazamiento del sistema, es igual a la diferencia de energía cinética entre la posición final e inicial de dicho sistema

**Conservación de la energía mecánica**

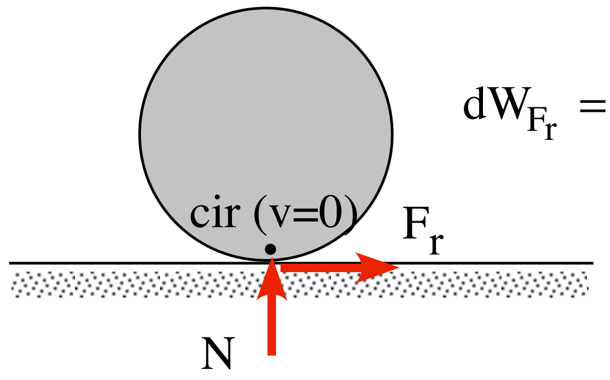
Si sólo actúan fuerzas conservativas sobre un cuerpo o conjunto de cuerpos la suma de la energía cinética y potencial del sistema es constante (energía mecánica).

$$E_c + E_p = cte$$

- Con fuerzas conservativas y no conservativas ($F_{nc}$):

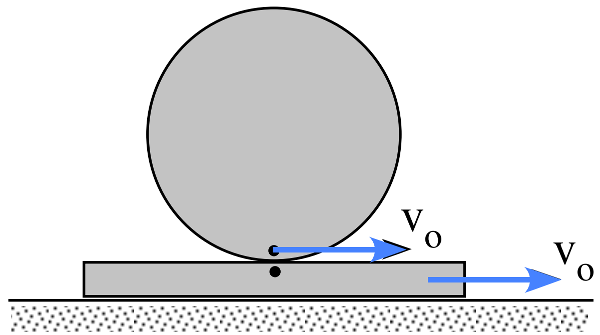
$$E_{c_2} - E_{c_1} = \int_{1\to 2} \vec{F}_c \bullet \overrightarrow{dr} + \int_{1\to 2} \vec{F}_{nc} \bullet \overrightarrow{dr} \rightarrow \boxed{\left(E_{c_2} + E_{p_2}\right) - \left(E_{c_1} + E_{p_1}\right) = \int_{1\to 2} \vec{F}_{nc} \bullet \overrightarrow{dr}}$$

En un sólido que **rueda sin deslizar sobre un suelo fijo**, la fuerza de rozamiento que actúa en el punto de contacto (centro instantáneo de rotación) no hace trabajo.




$$dW_{F_r} = 0$$

Si un **sólido rueda sin deslizar sobre un suelo que no es fijo**, el punto de contacto con él no es el cir absoluto

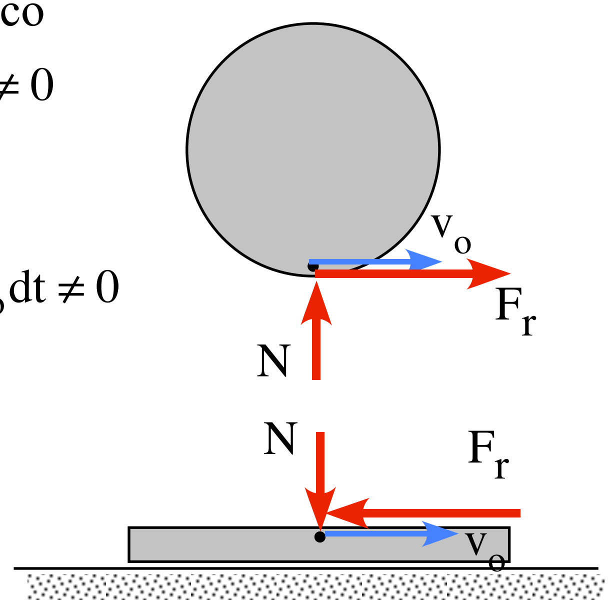



Considerando sólo el disco

$$dW_{F_r} = F_r dx_o = F_r v_o dt \neq 0$$

O sólo la plataforma:

$$dW_{F_r} = -F_r dx_o = -F_r v_o dt \neq 0$$




En cambio considerando **el conjunto** el trabajo del rozamiento se compensa

**Si hay deslizamiento relativo** entre dos cuerpos, **la fuerza de rozamiento produce un trabajo neto**, que hay que incluir en el teorema de la energía.

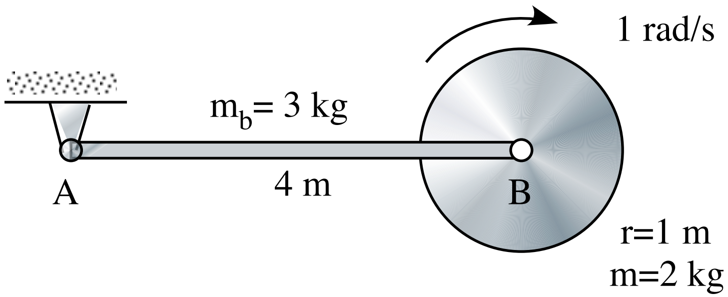
Si hay un conjunto de sólidos unidos mediante enlaces conviene aplicar el teorema de la energía al conjunto, ya que de esa forma se minimiza el número de fuerzas que contribuyen (recordar lo visto en el tema de Estática analítica)

**La energía cinética de un sólido rígido:** $E_c = \frac{1}{2} m\, v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$

En caso de que si el sólido tenga un punto fijo A $\rightarrow$ $E_c = \frac{1}{2} I_A \omega^2$

A la energía potencial a lo largo del curso se le llama indistintamente V o $E_p$ (en dinámica se ha preferido usar las denominaciones $E_c$ y $E_p$ usadas en el bachiller; en estática se ha usado V, notación habitual en mecánica analítica )

Ejemplo 1




El sistema barra y disco de la figura se libera desde la posición mostrada, en que la barra está en reposo y el disco gira a velocidad angular de 1 rad/s.
Hallar las velocidades angulares de ambos sólidos tras haber girado 53.13º, así como la velocidad del centro del disco

Conservación de la energía del conjunto entre las posiciones 1 y 2: $\left(E_c + E_p\right)_1 = \left(E_c + E_p\right)_2$

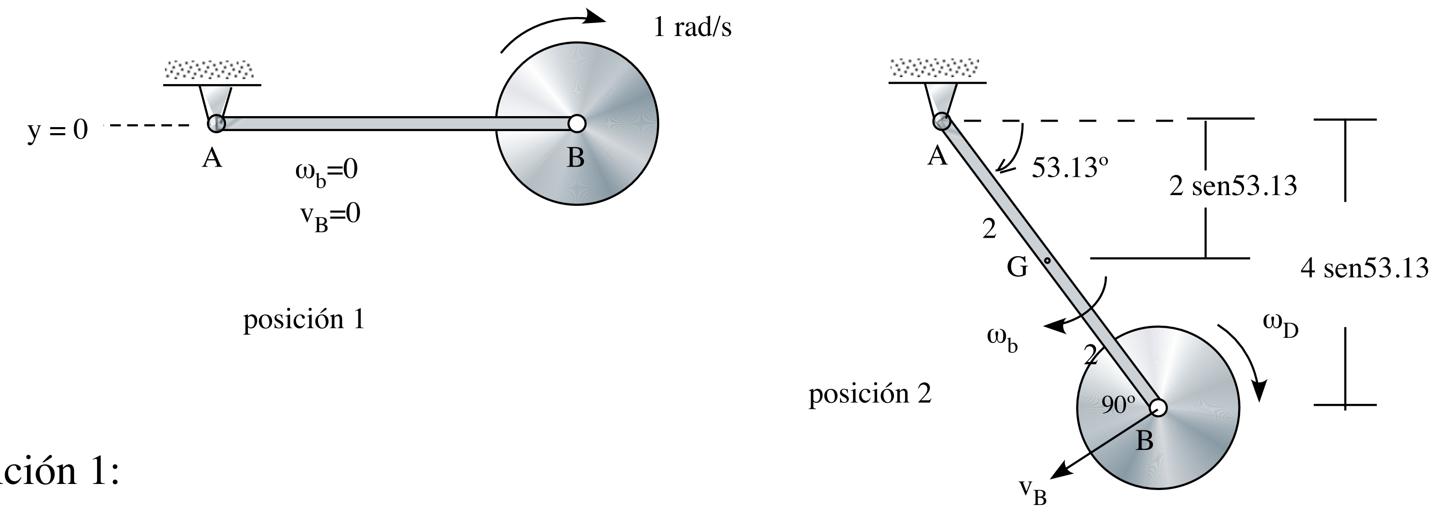
Siendo $E_c = E_{c\ barra} + E_{c\ disco} \qquad E_p = E_{p\ barra} + E_{p\ disco}$

Las energías cinéticas y potenciales las calcularemos mediante las expresiones para el sólido rígido:

$$E_{c\ barra} = \frac{1}{2} I_A \cdot \omega_b^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m_b AB^2\right) \cdot \omega_b^2 = \frac{1}{2} 16 \cdot \omega_b^2 \quad \text{(A= punto fijo)}$$

$$E_{c\ disco} = \frac{1}{2} m_D v_B^2 + \frac{1}{2} I_B \cdot \omega_D^2 = \frac{1}{2} 2 v_B^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_D r^2\right) \cdot \omega_D^2 = v_B^2 + \frac{1}{2} 1 \cdot \omega_D^2 \quad \text{(B= cdg del disco)}$$

$$E_p = mgy_G$$




Posición 1:

barra $\quad E_c = 0 \qquad E_p = 0$

disco $\quad E_c = 0 + \dfrac{1}{2} 1{\cdot}1^2 = 0.5\,\text{julios} \qquad E_p = 0$

Posición 2:

barra $\quad E_c = \dfrac{1}{2} 16{\cdot}\omega_b^2 = 8\omega_b^2 \qquad E_p = mgy_G = -3{\cdot}9.8{\cdot}1.6 = -47.07\text{J}$

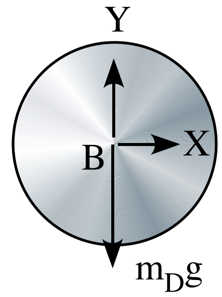
disco $\quad E_c = \dfrac{1}{2} 2 v_B^2 + \dfrac{1}{2} 1{\cdot}\omega_D^2 \qquad E_p = mgy_B = -2{\cdot}9.8{\cdot}3.2 = -62.72$

**Conservación de la energía :** $\quad 0.5 = 8\omega_b^2 + v_B^2 + \dfrac{1}{2} 1{\cdot}\omega_D^2 - 47.07 - 62.72$

Hace falta determinar o bien relacionar las velocidades que aparecen en la expresión

**Campo de velocidades en barra:**

$B \in$ barra (A=punto fijo, cir) $v_B = \omega_b AB = 4\omega_b$ perpendicular a AB




Las fuerzas que actúan sobre el disco **no producen momento respecto a su cdg** (B):

$$M_B = 0 = I_B \alpha_D \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_D = 0}$$

$$\omega_D = \text{constante} = 1 \text{ rad / s (horaria)}$$

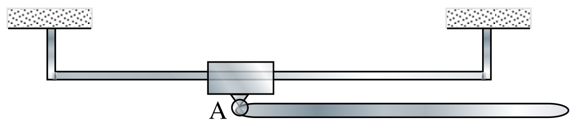
Sustituyendo en la energía:

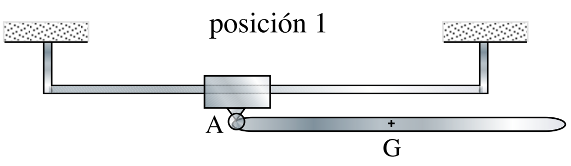
$$0.5 = 8\omega_b^2 + 16\omega_b^2 + \frac{1}{2} \quad - 47.07 - 62.72 \rightarrow \omega_b \simeq 2.14 \text{ rad / s (sentido horario)}$$

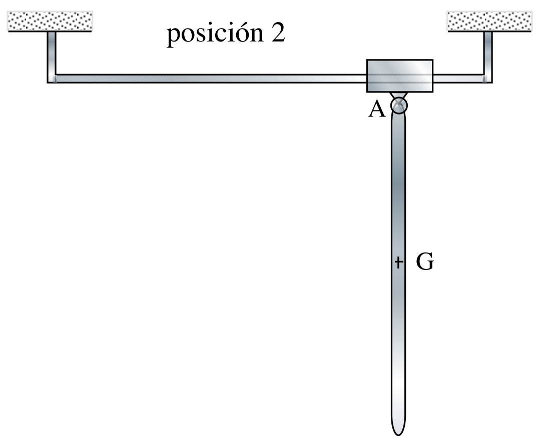
$$\vec{v}_B = 8.56\left(-0.8\vec{i} - 0.6\vec{j}\right) \quad \text{(m/s)}$$

Ejemplo 2:

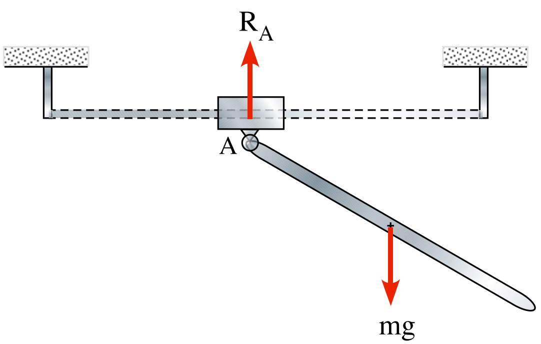
La barra de la figura está enlazada en A a un eje horizontal mediante una **deslizadera ideal**. La masa de la barra es 3 kg y su longitud 2 m. Si está en reposo en la posición mostrada, hallar su velocidad angular cuando alcanza la posición vertical.




• **La energía mecánica se conserva**



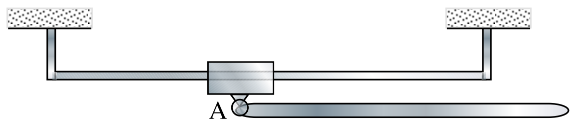

En cualquier posición : $F_x = 0$

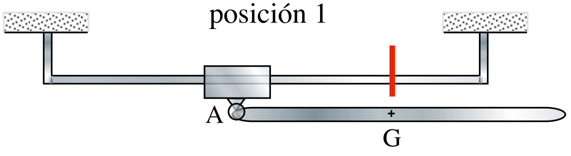
• **La cantidad de movimiento horizontal se conserva**

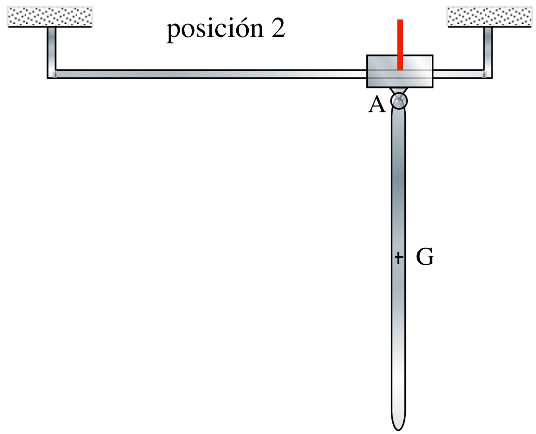
$$(p_x)_1 = (p_x)_2 \quad \rightarrow \quad 0 = v_{Gx} \qquad [1]$$

**La posición horizontal de G es constante**

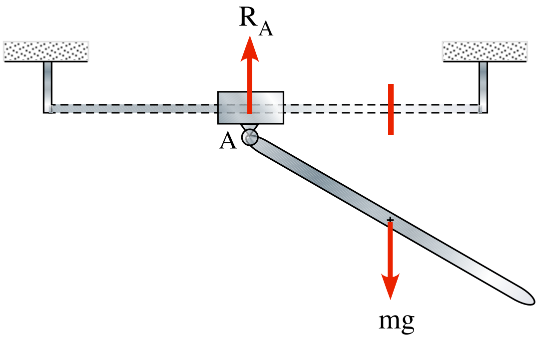
88) La barra de la figura está enlazada en A a un eje horizontal mediante una **deslizadera ideal**. La masa de la barra es 3 kg y su longitud 2 m. Si está en reposo en la posición mostrada, hallar su velocidad angular cuando alcanza la posición vertical.




• **La energía mecánica se conserva**

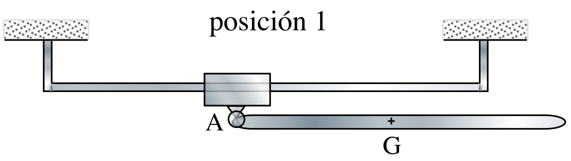


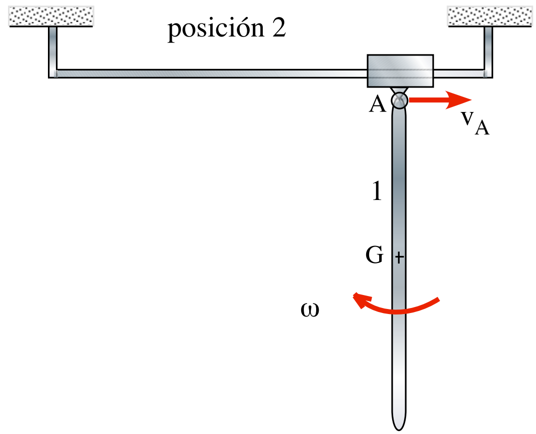

En cualquier posición : $F_x=0$

• **La cantidad de movimiento horizontal se conserva**

$$(p_x)_1 = (p_x)_2 \quad \rightarrow \quad 0 = v_{Gx} \qquad [1]$$

**La posición horizontal de G es constante**




<u>Posición 1</u>: reposo ; mido las alturas de G desde esa posición

<u>Posición 2</u>: $\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG} = v_A \vec{i} - \omega \vec{i} \xrightarrow[{[1]}]{} v_G = 0 \;,\; v_A = \omega$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} 3 \cdot 2^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \qquad E_p = mgh_G = -3 \cdot 9.8 \cdot 1 = -29.4 \text{ J}$$

Conservación de la energía mecánica:

$$\left(E_c + E_p\right)_1 = \left(E_c + E_p\right)_2 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2}\omega^2 - 29.4 \qquad \underline{\omega = 7.67 \text{ rad/s}}$$